ESCP-EAP

OPTION ÉCONOMIQUE

MATHÉMATIQUES III

Jeudi 15 mai 2003, de 8h à 12h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE

Soit a, b deux entiers naturels non nuls et s leur somme.
Une urne contient initialement a boules noires et b boules blanches indiscernables au toucher.
On effectue dans cette urne une suite infinie de tirages au hasard d'une boule selon le protocole suivant :
- si la boule tirée est blanche, elle est remise dans l'urne ;
- si la boule tirée est noire, elle est remplacée dans l'urne par une boule blanche prise dans une réserve annexe.

Avant chaque tirage, l'urne contient donc toujours s boules.
On désigne par $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé qui modélise cette expérience et, pour tout entier naturel n non nul, on note :
- B_n l'événement "la n-ième boule tirée est blanche " ;
- X_n la variable aléatoire désignant le nombre de boules blanches tirées au cours des n premiers tirages ;
- u_n l'espérance de la variable aléatoire X_n, c'est-à-dire $u_n = \mathbf{E}(X_n)$.

1. Étude d'un ensemble de suites

Soit A l'ensemble des suites $(x_n)_{n \geqslant 1}$ de réels qui vérifient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad s\, x_{n+1} = (s-1)\, x_n + b + n$$

a) Soit α et β deux réels et $(v_n)_{n \geqslant 1}$ la suite définie par : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \alpha\, n + \beta$.
Déterminer en fonction de b et de s les valeurs de α et β pour que la suite $(v_n)_{n \geqslant 1}$ appartienne à A.

b) Soit $(x_n)_{n\geqslant 1}$ une suite appartenant à A, $(v_n)_{n\geqslant 1}$ la suite déterminée à la question précédente et $(y_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad y_n = x_n - v_n$.
Montrer que la suite $(y_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite géométrique et expliciter, pour tout entier naturel n non nul, y_n puis x_n en fonction de x_1, b, s et n.

2. Expression de la probabilité $\mathbf{P}(B_{n+1})$ à l'aide de u_n

a) Donner, en fonction de b et de s, les valeurs respectives de la probabilité $\mathbf{P}(B_1)$ et du nombre u_1.

b) Calculer la probabilité $\mathbf{P}(B_2)$ et vérifier l'égalité : $\mathbf{P}(B_2) = \dfrac{b+1-u_1}{s}$.

c) Soit n un entier naturel vérifiant $1 \leqslant n \leqslant a$. Montrer que, pour tout entier k de l'intervalle $[0, n]$, la probabilité conditionnelle $\mathbf{P}_{X_n=k}(B_{n+1})$ est égale à $\dfrac{b+n-k}{s}$
En déduire l'égalité : $\mathbf{P}(B_{n+1}) = \dfrac{b+n-u_n}{s}$

d) Soit n un entier naturel vérifiant $n > a$.
Si k est un entier de l'intervalle $[0, n-a-1]$, quel est l'événement $[X_n = k]$?
Si k est un entier de l'intervalle $[n-a, n]$, justifier l'égalité : $\mathbf{P}_{X_n=k}(B_{n+1}) = \dfrac{b+n-k}{s}$
Montrer enfin que l'égalité $\mathbf{P}(B_{n+1}) = \dfrac{b+n-u_n}{s}$ est encore vérifiée.

3. Calcul des nombres u_n et $\mathbf{P}(B_n)$

a) Soit n un entier naturel non nul. Établir, pour tout entier k de l'intervalle $[n+1-a, n]$ l'égalité :

$$\mathbf{P}([X_{n+1} = k]) = \frac{a-n+k}{s}\mathbf{P}([X_n = k]) + \frac{b+n-k+1}{s}\mathbf{P}([X_n = k-1])$$

Vérifier cette égalité pour $k = n+1$, $k = n-a$ et pour tout entier k de l'intervalle $[1, n-a-1]$.

b) Calculer, pour tout entier naturel n non nul, u_{n+1} en fonction de u_n et de n. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ appartient à l'ensemble A étudié dans la question **1.**

c) Donner, pour tout entier naturel n non nul, les valeurs de u_n et de $\mathbf{P}(B_{n+1})$ en fonction de b, s et n.

d) Quelles sont les limites des suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(\mathbf{P}(B_n))_{n\geqslant 1}$?

PROBLÈME

Dans tout le problème, on désigne par $\mathcal{C}$ l'espace vectoriel des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
À toute application f de $\mathcal{C}$, on associe l'application $D(f)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad D(f)(x) = f(x+1) - f(x)$$

*Les parties **A**, **B** et **C** sont indépendantes.*
Question préliminaire : D est-il un endomorphisme de $\mathcal{C}$?

Partie I : Image par D d'une fonction de répartition

1. Soit F une application de $\mathcal{C}$. Rappeler les propriétés que doit posséder F pour être considérée comme une fonction de répartition.

2. Soit F une application de $\mathcal{C}$ qui est une fonction de répartition et g l'application $D(F)$.

a) Montrer que g est positive.

b) Prouver, pour tout réel x, la double inégalité : $F(x) \leqslant \displaystyle\int_x^{x+1} F(t)\,\mathrm{d}t \leqslant F(x+1)$.

En déduire que les limites $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\int_x^{x+1} F(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_x^{x+1} F(t)\,\mathrm{d}t$ existent et préciser leurs valeurs.

c) Soit A et B deux réels vérifiant $A < 0 < B$ et $I(A,B)$ l'intégrale : $I(A,B) = \displaystyle\int_A^B g(t)\,\mathrm{d}t$.

Justifier l'égalité : $I(A,B) = \displaystyle\int_B^{B+1} F(t)\,\mathrm{d}t - \int_A^{A+1} F(t)\,\mathrm{d}t$.

d) Prouver alors soigneusement que g est une densité de probabilité.

3. Un exemple

On suppose, dans cette question, que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$ et on pose : $g = D(F)$.

Déterminer $g(x)$ pour tout réel x, en distinguant les cas $x < -1$, $-1 \leqslant x < 0$, $0 \leqslant x < 1$ et $1 \leqslant x$. Représenter graphiquement l'application g.

Partie II : Recherche des valeurs propres de D

Si λ est un réel, on dit que λ est une *valeur propre* de D s'il existe une application f de $\mathcal{C}$, distincte de l'application nulle, vérifiant : $D(f) = \lambda f$.

1. Soit a un réel. On note g_a l'application de $\mathcal{C}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, g_a(x) = e^{ax}$.
Déterminer l'application $D(g_a)$.

2. En déduire que tout réel λ strictement supérieur à -1 est une valeur propre de D.

3. Soit a un réel. On note h_a l'application de $\mathcal{C}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, h_a(x) = \sin(\pi x)\, e^{ax}$.
Déterminer l'application $D(h_a)$.

4. En déduire que tout réel λ strictement inférieur à -1 est une valeur propre de D.

5. Le réel -1 est-il une valeur propre de D ?

Partie III : Image par D d'une application polynomiale

Pour tout entier naturel p, on désigne par E_p le sous-espace de $\mathcal{C}$ dont les éléments sont les applications polynomiales de degré au plus p.
On note X l'application $x \mapsto x$ et, pour tout entier naturel non nul k, on note X^k l'application $x \mapsto x^k$.
Soit $(H_i)_{i\in\mathbb{N}}$ la suite d'applications polynomiales définie par :

$$H_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall i \in \mathbb{N}^*, \quad H_i = \frac{1}{i!}\prod_{k=0}^{i-1}(X-k)$$

1. Préciser $H_1,\ H_2,\ H_3$ et montrer que $\mathcal{U}_3 = (H_0,\ H_1,\ H_2,\ H_3)$ est une base de E_3.

2. Soit $\mathcal{B}_3 = (1, X, X^2, X^3)$ la base canonique de E_3.

a) Écrire la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}_3$ à la base $\mathcal{U}_3$ et calculer la matrice P^{-1}.

b) Soit $a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3$ des réels et Q l'application polynomiale $a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$.
Quelles sont les coordonnées de Q dans la base $\mathcal{U}_3$?
En particulier, vérifier l'égalité : $X^3 = H_1 + 6\,H_2 + 6\,H_3$.

3. Application : moment d'ordre 3 d'une variable aléatoire de Poisson
Soit a un réel strictement positif et Z une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre a.

a) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on pose : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k^3\,a^k}{k!}$.
Transformer S_n à l'aide de la relation : $\forall k \in \mathbb{N},\quad k^3 = H_1(k) + 6\,H_2(k) + 6\,H_3(k)$.
En déduire que la série de terme général $\dfrac{n^3\,a^n}{n!}$ est convergente et préciser $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3\,a^n}{n!}$.

b) En déduire que la variable aléatoire Z admet un moment d'ordre 3 donné par :

$$\mathbf{E}(Z^3) = a + 3a^2 + a^3$$

4. Dans cette question, p est un entier naturel non nul fixé.

a) Montrer que, si Q appartient à E_p, $D(Q)$ appartient aussi à E_p.
On note alors D_p l'endomorphisme de E_p qui, à tout Q de E_p, associe $D(Q)$.

b) Montrer que la famille $\mathcal{U}_p = (H_0, H_1, \ldots, H_p)$ est une base de E_p.

c) Déterminer $D_p(H_0)$, $D_p(H_1)$ et prouver, pour tout entier i vérifiant $0 < i \leqslant p$, l'égalité : $D_p(H_i) = H_{i-1}$.

d) Écrire la matrice M_p représentative de D_p dans la base $\mathcal{U}_p$.

e) Préciser la ou les valeurs propres de M_p. Cette matrice est-elle diagonalisable ?

5. Application : moment d'ordre p d'une variable aléatoire de Poisson
Soit p un entier naturel non nul fixé et $b_0, b_1, \ldots, b_p$ les réels vérifiant

$$X^p = b_0H_0 + b_1H_1 + \cdots + b_pH_p$$

Par une méthode analogue à celle de la question **3.**, montrer que la variable aléatoire Z définie dans la question **3.** admet un moment d'ordre p donné par $\mathbf{E}(Z^p) = \displaystyle\sum_{i=0}^{p} \frac{b_i\,a^i}{i!}$ ·

6. Dans cette question, p est un entier naturel non nul et, pour tout entier i vérifiant $0 \leqslant i \leqslant p$, on considère l'application φ_i de E_p dans $\mathbb{R}$ qui, à tout élément Q de E_p, associe le réel :

$$\varphi_i(Q) = \sum_{k=0}^{i} (-1)^{i-k}\,\mathrm{C}_i^k\,Q(k)$$

où C_i^k désigne le coefficient binomial d'indices i et k.

a) Montrer que, pour tout entier i vérifiant $0 \leqslant i \leqslant p$, l'application φ_i est linéaire.

b) Soit i et j deux entiers vérifiant $0 \leqslant i \leqslant p$ et $0 \leqslant j \leqslant p$; établir les égalités :

$$\varphi_i(H_i) = 1 \qquad \text{et si} \quad j \neq i, \quad \varphi_i(H_j) = 0$$

c) En déduire, pour tout entier i vérifiant $0 \leqslant i \leqslant p$, la relation : $b_i = \displaystyle\sum_{k=0}^{i} (-1)^{i-k}\,\mathrm{C}_i^k\,k^p$.