ESCL 1998

Mathématiques I Option Economique

Exercice 1

La fonction logarithme népérien est notée $\ln$.

1. Soit $x \in [-1;1[$.

   a) Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}$ et tout t de $[-1;1[$:

   $$\frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n} t^k = \frac{t^{n+1}}{1-t}$$

   b) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}$ et tout t de $[-1;x]$:

   $$\left| \frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n} t^k \right| \leqslant \frac{|t|^{n+1}}{1-x}$$

   c) Etablir, pour tout n de $\mathbb{N}$:

   $$\left| -\ln(1-x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k+1}}{k+1} \right| \leqslant \frac{1}{(n+2)(1-x)}$$

   d) En déduire que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n}$ converge et a pour somme $-\ln(1-x)$.

   En particulier, montrer : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n2^n} = \ln 2$.

2. Un joueur lance une pièce équilibrée jusqu'à l'obtention du premier pile. S'il lui a fallu n lancers $(n \in \mathbb{N}^*)$ pour obtenir ce premier pile, on lui fait alors tirer au hasard un billet de loterie parmi n billets dont un seul est gagnant.

   Quelle est la probabilité que le joueur gagne ?

Exercice 2

Dans l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre 3, on note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$
.

1. a) Calculer A^2 et A^3 .
   b) En déduire que A n'est pas inversible et que A admet 0 pour unique valeur propre.
   c) Déterminer une base du sous-espace propre de A associé ý la valeur propre 0.
   d) La matrice A est-elle diagonalisable ?

2. On note, pour tout réel a, $M(a) = I + 2\,a\,A + 2\,a^2\,A^2$, et E l'ensemble des matrices $M(a)$ lorsque a décrit $\mathbb{R}$.

   a) Calculer, pour tout couple (a, b) de réels, le produit $M(a)M(b)$ et montrer que ce produit appartient à E.
   b) En déduire que, pour tout réel a, $M(a)$ est inversible et préciser son inverse.

3. Soit a un réel non nul.

   a) Montrer que tout vecteur propre de A est vecteur propre de $M(a)$.
   b) Calculer $(M(a) - I)^3$.
      En déduire que $M(a)$ admet 1 pour seule valeur propre.
      Préciser une base du sous-espace propre de $M(a)$ associé ý la valeur propre 1.
   c) La matrice $M(a)$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 3

Une urne contient des boules vertes et des boules blanches, indiscernables au toucher. La proportion de boules vertes est p, $0 < p < 1$; la proportion de boules blanches est $1 - p$.

On effectue une suite de tirages successifs d'une boule avec remise. (Toute boule tirée de l'urne y est remise avant de procéder au tirage suivant.)

1. On note N_V la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule verte, et N_B la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule blanche.

   a) Quelles sont les lois des variables aléatoires N_V et N_B ?

   b) Les variables aléatoires N_V et N_B sont-elles indépendantes ?

   On définit le couple de variables aléatoires (X, Y) à valeurs dans $(\mathbb{N}^*)^2$ de la façon suivante :

   pour tout $(i, j) \in (\mathbb{N}_n^*)^2$, $\big(X = i \mathrm{et} Y = j\big)$ est l'événement :

   " les i premières boules tirées sont blanches, les j suivantes sont vertes et la $(i + j + 1)^{\text{ieme}}$est blanche

   ou

   les i premières boules tirées sont vertes, les j suivantes sont blanches et la $(i + j + 1)^{\text{ieme}}$ est verte"

   Par exemple, pour la suite de tirages $BBBVVBVBB\cdots$ (où V est mis pour vert et B pour blanc), on a $X = 3$ et $Y = 2$.

2. a) Déterminer la loi de la variable aléatoire X.

   b) Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance et que $E(X) = \frac{p}{1-p} + \frac{1-p}{p}$.

   c) Montrer que $E(X)$ est minimale lorsque $p = \frac{1}{2}$, et calculer cette valeur minimale.

3. Montrer, pour tout (i, j) de $(\mathbb{N}_n^*)^2$:

$$P(X = i \text{ et } Y = j) = p^{i+1}(1-p)^j + (1-p)^{i+1}p^j$$

4. a) En déduire la loi de la variable aléatoire Y.

   b) Montrer que la variable aléatoire Y admet une espérance que l'on calculera.

5. a) Etablir que, si $p \neq \frac{1}{2}$, les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes (on pourra envisager $P(X = 1 \text{ et } Y = 1)$).

   b) Démontrer que, si $p = \frac{1}{2}$, les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.