

# EML 1997 voie Eco

## Exercice 1

Soient  $a, b, c$  trois réels tous non nuls, et  $M$  la matrice carrée d'ordre 3 suivante :  $M = \begin{pmatrix} 1 & a/b & a/c \\ b/a & 1 & b/c \\ c/a & c/b & 1 \end{pmatrix}$

- Montrer  $M^2 = 3M$
  - En déduire que l'ensemble des valeurs propres de  $M$  est inclus dans  $\{0, 3\}$ .
- Déterminer les valeurs propres de  $M$  et, pour chaque valeur propre, une base du sous-espace propre associé.
  - La matrice  $M$  est-elle diagonalisable ?

On note :

$$P = \begin{pmatrix} a & a & a \\ b & -b & 0 \\ c & 0 & -c \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 1/a & 1/b & 1/c \\ 1/a & -2/b & 1/c \\ 1/a & 1/b & -2/c \end{pmatrix}$$

- Calculer  $PQ$ . Montrer que  $P$  est inversible. Quel est son inverse ?
  - Vérifier :  $M = PDP^{-1}$
- Déterminer l'ensemble des matrices  $Y$  de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  telles que  $DY - YD = 3Y$
- Montrer que l'ensemble des matrices  $X$  de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  telles que  $MX - XM = 3X$  est un espace vectoriel de dimension 2 sur  $\mathbb{R}$ .

## Exercice 2

Le but de l'exercice est l'étude des extremums de la fonction  $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$   
 $(x, y) \longmapsto x^2 - 2xy + 2y^2 + e^{-x}$

- Établir que l'équation  $e^{-x} = x$ , d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$ , admet une solution et une seule.
  - Montrer qu'il existe  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  unique tel que :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \end{cases} \quad \text{et établir que} \quad \begin{cases} x_0 - e^{-x_0} = 0 \\ y_0 = \frac{x_0}{2} \end{cases}$$

- Montrer que  $f$  admet un extremum en  $(x_0, y_0)$ . Est-ce un minimum ou un maximum ?
- On note  $g : [0, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$   
 $x \longmapsto \frac{1+x}{1+e^x}$ 
  - Montrer que l'équation  $g(x) = x$ , d'inconnue  $x \in [0, +\infty[$ , admet une solution et une seule, que celle-ci est  $x_0$ , et que  $\frac{1}{2} < x_0 < 1$
  - Former le tableau des variations de  $g$  et tracer sa courbe représentative (repère orthonormé, unité : 5 cm).

On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_0 = 0$  et, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = g(u_n)$

- c) Établir que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante et converge vers  $x_0$ .
- d) i. Montrer :  $\forall x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$  ,  $|g'(x)| \leq 0,125$  , où  $g'$  désigne la dérivée de  $g$ .  
 On donne  $g'(\frac{1}{2}) \simeq 0,025$  et  $g'(1) \simeq -0,124$
- ii. Etablir :  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  ,  $|u_n - x_0| \leq (0,125)^{n-1} \cdot 0,5$
- iii. Ecrire un programme PASCAL qui calcule et affiche une valeur approchée de  $x_0$  à  $10^{-8}$  près.
- iv. Montrer que  $f(x_0, y_0) = \frac{x_0^2}{2} + x_0$ , et en déduire une valeur approchée décimale à  $10^{-7}$  près de  $f(x_0, y_0)$ .

## Exercice 3

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces et d'une pièce truquée telle que la probabilité d'apparition de "pile" soit égale à  $p$  ,  $p \in ]0; 1[$ .

On pourra noter  $q = 1 - p$  .

Soit  $N$  un entier naturel non nul fixé.

On effectue  $N$  lancers du dé ; si  $n$  est le nombre de "6" obtenus, on lance alors  $n$  fois la pièce.

On définit trois variables aléatoires  $X, Y, Z$  de la manière suivante :

- $Z$  indique le nombre de "6" obtenus aux lancers du dé,
- $X$  indique le nombre de "piles" obtenus aux lancers de la pièce,
- $Y$  indique le nombre de "faces" obtenues aux lancers de la pièce.

Ainsi,  $X + Y = Z$  et, si  $Z$  prend la valeur 0, alors  $X$  et  $Y$  prennent la valeur 0.

1. Préciser la loi de  $Z$ , son espérance et sa variance.
2. Pour  $k \in \mathbb{N}$  ,  $n \in \mathbb{N}$ , déterminer la probabilité conditionnelle  $P(X = k / Z = n)$ . On distinguera les cas :  $k \leq n$  et  $k > n$ .
3. Montrer, pour tout couple d'entiers naturels  $(k, n)$  :

- si  $0 \leq k \leq n \leq N$  alors  $P(X = k \text{ et } Z = n) = \binom{n}{k} \binom{N}{n} \cdot p^k (1-p)^{n-k} \left(\frac{5}{6}\right)^{N-n} \left(\frac{1}{6}\right)^n$
- si  $n > N$  ou  $k > n$  alors  $P(X = k \text{ et } Z = n) = 0$

4. Calculer la probabilité  $P(X = 0)$
5. Montrer pour tout couple d'entiers naturels  $(k, n)$  tel que  $0 \leq k \leq n \leq N$  :

$$\binom{n}{k} \binom{N}{n} = \binom{N}{k} \binom{N-k}{n-k}$$

En déduire la probabilité  $P(X = k)$ .

6. Montrer que la variable aléatoire  $X$  suit une loi binomiale de paramètre  $(N, \frac{p}{6})$ .  
 Quelle est la loi de la variable aléatoire  $Y$  ?
7. Est-ce que les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont indépendantes ?  
 Déterminer la loi du couple  $(X, Y)$ .
8. En comparant les variances de  $Z$  et de  $X + Y$ , déterminer la covariance du couple  $(X, Y)$ .