

## Exercice 1

On considère les matrices carrées réelles d'ordre 3 suivantes:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer  $A^2$  et exprimer  $J$  comme combinaison linéaire de  $I$  et  $A^2$
2.
  - a) Calculer les valeurs propres de  $A$  (on trouvera trois réels  $\lambda_1, \lambda_2$  et  $\lambda_3$  que l'on rangera de sorte que  $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ ).
  - b) Pour chaque entier  $k$  de  $\{1, 2, 3\}$ , calculer un vecteur propre  $X_k$  associé à la valeur propre  $\lambda_k$  de  $A$ , tel que l'élément de la première ligne de  $X_k$  soit égal à 1.
  - c) En déduire une matrice carrée réelle  $P$  d'ordre 3, inversible, de première ligne égale à  $(1, 1, 1)$  telle qu'en notant  $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ , on ait  $A = PDP^{-1}$ .
3. Soient  $a, b$  et  $c$  des réels et  $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a+c & b \\ c & b & a \end{pmatrix}$ .
  - a) Exprimer  $M$  comme combinaison linéaire de  $I, A$  et  $J$ , puis comme combinaison linéaire de  $I, A$  et  $A^2$ .
  - b) En déduire une matrice diagonale réelle  $\Delta$  d'ordre 3 telle que  $M = P\Delta P^{-1}$ , où  $P$  est la matrice obtenue à la question 2.c.

## Exercice 2

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{e^x}{e^{2x} + 1}$

1.
  - a) Montrer que  $f$  est paire.  
Etudier les variations de  $f$  et tracer sa courbe dans repère orthogonal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .  
(unités: 2 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées).
  - b) Montrer qu'il existe un unique réel  $\ell$  tel que  $f(\ell) = \ell$ . Justifier :  $0 \leq \ell \leq \frac{1}{2}$  (on donne  $f(1/2) < 1/2$ )
  - c) Montrer que pour tout réel  $x$ :  $|f'(x)| \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$
2. On définit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par:

$$u_0 = 0 \quad \text{et } \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

- a) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$   $u_n \in [0, \frac{1}{2}]$

b) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ :

$$|u_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{2}|u_n - \ell| \quad \text{puis} \quad |u_n - \ell| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$$

c) En déduire que la suite  $(u_n)$  converge vers  $\ell$ .

d) Ecrire un programme PASCAL permettant d'obtenir une valeur approchée de  $\ell$  à  $10^{-3}$  près.

### Exercice 3

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\begin{cases} f(x) = e^{-|x|} & \text{si } -\ln 2 \leq x \leq \ln 2 \\ f(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Etudier les variations de  $f$  et tracer sa représentation graphique dans un repère orthonormé (unité 5cm).
2. Montrer que  $f$  est une densité de probabilité.
3. Soit  $X$  une variable aléatoire réelle admettant  $f$  comme densité.
  - a) Déterminer la fonction de répartition  $F$  de  $X$ .
  - b) Montrer que  $X$  admet une espérance et calculer l'espérance de  $X$ .
  - c) On pose  $Y = |X|$ .  
Déterminer la fonction de répartition  $G$  de  $Y$ . Montrer que  $Y$  est une variable à densité et déterminer une densité  $g$  de  $Y$ .

### Exercice 4

Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$

1.
  - a) Montrer que:  $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$
  - b) En déduire que la suite  $(I_n)$  converge et donner sa limite.
2. A l'aide d'une intégration par parties, établir que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad I_n = \frac{1}{(n+1)e} + \frac{I_{n+1}}{n+1}$$

3.
  - a) En déduire que  $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq I_n - \frac{1}{(n+1)e} \leq \frac{1}{(n+1)(n+2)}$
  - b) Trouver un équivalent simple de  $I_n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .