ESCL 1995
Option économique – Première épreuve.

Exercice 1

On considère la matrice carrée d'ordre 3 réelle :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. a) Établir que A admet une valeur propre et un seule, λ, que l'on calculera.
   b) A est-elle inversible ?
   c) A est-elle diagonalisable ?
2. On note $B = A - 3I$, où $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   a) Calculer B^2.
   b) En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de A^n en fonction de n.

Exercice2

Soit $f : \begin{array}{ccc} [0;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x\ln(1+x) \end{array}$.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in]0;+\infty[$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. a) Montrer que f est de classe C^2 sur $[0;+\infty[$ et calculer, pour tout x de $[0;+\infty[$, $f'(x)$ et $f''(x)$.
   b) Étudier les variations de f', puis celles de f.
   c) Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.
2. Résoudre l'équation $f(x) = x$, d'inconnue $x \in [0;+\infty[$.
3. On suppose dans cette question : $u_0 \in]e-1;+\infty[$.
   a) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$: $e - 1 < u_n \leq u_{n+1}$.
   b) En déduire que u_n tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.
4. On suppose, dans cette question : $u_0 \in]0;e-1[$. Étudier la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 3

Dans un jeu, il y a n numéros (de 1 à n) dont p numéros gagnants choisis à l'avance et connus du seul meneur de jeu.
On suppose : $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{N}^*$, $p \leq \dfrac{n}{3}$.
Dans la première phase du jeu, le joueur tire au hasard, successivement, p numéros différents. Le meneur de jeu dévoile alors p numéros perdants parmi les $n - p$ numéros qui n'ont pas été tirés.
Dans la deuxième phase du jeu, le joueur a le choix entre deux stratégies.

– Stratégie A : il garde les p numéros qu'il a tirés.
– Stratégie B : il échange les p numéros qu'il a tirés contre p nouveaux numéros tirés au hasard, successivement, parmi les $n-2p$ numéros qui n'ont été ni tirés ni dévoilés durant la première phase.

Le but de l'exercice est de déterminer laquelle de ces deux stratégies permet d'espérer obtenir le plus de numéros gagnants.

1. **Étude directe d'un cas simple**

   On suppose ici : $n = 3$, $p = 1$. Calculer la probabilité d'obtenir le numéro gagnant avec la stratégie A, puis avec la stratégie B.

2. **Étude du cas général**

   Pour $1 \leq i \leq p$, on note X_i la variable aléatoire égale à 1 si le $i-$ème numéro tiré dans la première phase est gagnant, à 0 sinon.

   On note X la variable aléatoire égale au nombre de numéros gagnants parmi les p numéros tirés dans la première phase.

   Ainsi : $X = X_1 + \ldots + X_p$.

   a) Démontrer que, pour $1 \leq i \leq p$: $P(X_i = 1) = \dfrac{p}{n}$. En déduire : $E(X) = \dfrac{p^2}{n}$.

   b) Déterminer la loi de X. En déduire les formules :

$$(1) \quad \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k}\binom{n-p}{p-k} = \binom{n}{p} \qquad\qquad (2) \quad \sum_{k=0}^{p} k\binom{p}{k}\binom{n-p}{p-k} = \frac{p^2}{n}\binom{n}{p}.$$

   On suppose désormais, dans toute la suite de l'exercice, que le joueur utilise la stratégie B.

   Pour $1 \leq i \leq p$, on note Z_i la variable aléatoire égale à 1 si le $i-$ème numéro tiré durant la deuxième phase est gagnant, à 0 sinon.

   On note Z la variable aléatoire égale au nombre de numéros gagnants parmi les p numéros tirés dans la deuxième phase.

3. a) Pour tout entier naturel k tel que $0 \leq k \leq n$ et pour $1 \leq i \leq p$, calculer la probabilité conditionnelle : $P_{X=k}(Z_i = 1)$.

   b) Pour $1 \leq i \leq p$, démontrer que :

$$P(Z_i = 1) = \frac{1}{(n-2p)\binom{n}{p}} \sum_{k=0}^{p} (p-k)\binom{p}{k}\binom{n-p}{p-k}.$$

   c) En utilisant les formules démontrées en b), vérifier que :

$$E(Z) = \frac{p^2(n-p)}{n(n-2p)}.$$

   Des stratégies A et B, laquelle est préférable ?

Exercice 4

On définit la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} [2;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \end{array}$$

1. Démontrer que, pour tout réel x supérieur ou égal à 2 :

$$\frac{1}{x} \leq f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x-1}}.$$

2. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on définit l'intégrale :

$$I_n = \int_2^n f(x)\,\mathrm{d}x.$$

   a) Démontrer que : $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = +\infty$.

   b) On définit la fonction

$$F : \begin{array}{rcl} [2;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right). \end{array}$$

   Calculer la dérivée de F, et en déduire une expression de I_n en fonction de n.

   c) Déterminer la limite de $I_n - \ln(n)$ quand n tend vers $+\infty$.

3. On définit, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 :

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k^2-1}}.$$

   a) Montrer que : $I_{n+1} \leq S_n \leq I_n + \frac{1}{\sqrt{3}}$.

   b) Trouver un équivalent simple de S_n quand n tend vers $+\infty$.