Edhec, 1999, option économique.

EXERCICE 1 :

Soit a un réel positif ou nul. On considère la matrice $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & a-2 & a & 1 \\ a & -1 & 1 & a \\ 0 & 0 & -a & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Montrer que $A(0)$ admet 1 et -1 comme seules valeurs propres.
   Donner les sous-espaces propres correspondants.

Dans la suite, on suppose $a > 0$.

2. Montrer que les valeurs propres de $A(a)$ sont les réels λ solutions de l'une des équations :

$$\lambda^2 = (a-1)^2 \quad \text{et} \quad \lambda^2 + a\lambda + 1 = 0.$$

3. a) Déduire de la question précédente la valeur de a pour laquelle $A(a)$ n'est pas inversible.
   b) Pour cette valeur, dire si $A(a)$ est diagonalisable.
4. On suppose dans cette question que $a > 2$.
   a) Montrer que $A(a)$ possède 4 valeurs propres distinctes deux à deux.
   b) En déduire que $A(a)$ est diagonalisable.

Exercice 2

Pour tout réel a, on considère la fonction f_a de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par :
$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, f_a(x, y) = (1 + y + xy + ax^2)\, e^y$.

Partie 1 : étude des extrema de f_a

Dans cette partie, on suppose $a \neq 0$ et $a \neq -\dfrac{1}{2}$

1. a) Calculer les dérivées partielles premières de f_a.
   b) En déduire que f_a possède deux points critiques (c'est-à-dire des couples de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ en lesquels f_a est susceptible de présenter un extremum local) et donner leurs coordonnées
2. Calculer les dérivées partielles secondes de f_a.
3. a) Examiner, pour chacun des deux points critiques, à quelle condition portant sur a, f_a présente en ces points un extremum local.
   b) Déterminer, en distinguant trois cas, si f_a présente sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ un maximum local ou un minimum local et donner sa valeur en fonction de a.

Partie 2 : étude d'un fonction définie à l'aide de f_a

1. a) Pour tout réel x et pour tout réel t inférieur à x, calculer $\int_t^x e^y dy$.

   En déduire que l'intégrale $I = \int_{-\infty}^x e^y dy$ converge et donner sa valeur.

   b) Pour tout réel x, montrer grâce à une intégration par parties, que l'intégrale $J = \int_{-\infty}^x ye^y dy$ converge et donner sa valeur

2. a) Déduire des deux questions précédentes que l'on définit bien une fonction F_a, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, en posant : $F_a(x) = \int_{-\infty}^x f_a(x, y)\, dy$.

   b) Après avoir écrit $F_a(x)$ en fonction de a et de x, donner le tableau de variations de F_a. (On distinguera les trois cas : $a = -1, a < -1$ et $a > -1$)

EXERCICE 3

Soient X, Y et Z trois variables aléatoires mutuellement indépendantes et définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose que X, Y et Z suivent la loi $\mathcal{U}_{[|1,n|]}$

(c'est-à-dire que : $\forall k \in [|1, n|], P(X = k) = P(Y = k) = P(Z = k) = \dfrac{1}{n}$).

1. a) Montrer que : $\forall k \in [|2, n+1|], P(X + Y = k) = \dfrac{k-1}{n^2}$.

   b) Montrer que : $\forall k \in [|n+2, 2n|], P(X + Y = k) = \dfrac{2n-k+1}{n^2}$.

2. Utiliser la formule des probabilités totales pour déduire de la première question que :

$$P(X + Y = Z) = \frac{n-1}{2n^2}.$$

3. a) Montrer que la variable aléatoire $T = n + 1 - Z$ suit la loi $\mathcal{U}_{[|1,n|]}$.

   b) Pourquoi T est-elle indépendante de X et de Y ?

   c) En faisant intervenir la variable T et en utilisant la deuxième question, déterminer la probabilité $P(X + Y + Z = n + 1)$.

PROBLEME

Les parties 1 et 2 sont indépendantes.

Partie 1

On pose, pour tout n élément de $\mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{p=1}^{n} \dfrac{1}{p}$.

1. a) Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}^*, \int_p^{p+1} \dfrac{dt}{t} \geqslant \dfrac{1}{p+1}$.

   b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leqslant 1 + \ln(n)$.

2. On considère la fonction φ_1 définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\begin{cases} \varphi_1(0) = 0 \\ \varphi_1(x) = x(1+\ln(x)) \text{ si } x > 0 \end{cases}$

   Montrer que φ_1 est continue sur $\mathbb{R}_+$.

3. Pour tout réel x positif et pour tout entier naturel n non nul, on pose :

   $\varphi_{n+1}(x) = \displaystyle\int_0^x \varphi_n(t)\,dt$ (On rappelle que φ_1 a été définie à la question 2).

   a) Montrer que, pour tout n élément de $\mathbb{N}^*$, la fonction φ_n est parfaitement définie et continue sur $\mathbb{R}_+$. Que vaut $\varphi_n(0)$?

   b) Vérifier qu'il existe deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telles que :
   $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \varphi_n(x) = x^n(a_n + b_n \ln x)$.
   On montrera que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_{n+1} = \dfrac{a_n}{n+1} - \dfrac{b_n}{(n+1)^2}$ et $b_{n+1} = \dfrac{b_n}{n+1}$

4. Ecrire un programme en Turbo Pascal qui calcule et affiche les n premiers termes de chacune des suites (a_n) et (b_n) pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

5. Calculer b_n.

6. Pour tout n élément de $\mathbb{N}^*$, on pose : $c_n = n!\, a_n$.

   a) Montrer que $c_n = 2 - u_n$.

   b) En déduire que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 : $|c_n| \leqslant 1 + \ln(n)$.

   c) Conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

   d) Montrer enfin que la série de terme général a_n est absolument convergente.

Partie 2

On considère les fonctions e_1, e_2, e_3 et e_4 définies par :

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, e_1(x) = x, e_2(x) = x^2, e_3(x) = x\ln(x)$ et $e_4(x) = x^2\ln(x)$.

On note E l'espace vectoriel engendré par e_1, e_2, e_3 et e_4.

1. On suppose dans cette question que a, b, c et d sont 4 réels tels que :
   (*) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, ax + bx^2 + cx\ln(x) + dx^2\ln(x) = 0$.

   a) Montrer que $a + b = 0$.

   b) Etablir que : $\forall x > 1, \dfrac{a}{x\ln(x)} + \dfrac{b}{\ln(x)} + \dfrac{c}{x} + d = 0$. En déduire que $d = 0$.

   c) Etablir ensuite que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \dfrac{a}{x} + b + c\dfrac{\ln(x)}{x} = 0$. En déduire que $b = 0$.

   d) Montrer finalement que $a = b = c = d = 0$.

2. a) Déduire de la question précédente que (e_1, e_2, e_3, e_4) est une famille libre.

   b) Montrer que (e_1, e_2, e_3, e_4) est une base de E.

3. On note u l'application qui à toute fonction f de E associe la fonction $g = u(f)$ définie par :
   $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, g(x) = xf'(x)$.

   a) Montrer que u est une application linéaire.

   b) Déterminer $u(e_1), u(e_2), u(e_3)$ et $u(e_4)$.

   c) En déduire que u est un endomorphisme de E.

4. a) Donner la matrice A de u dans la base (e_1, e_2, e_3, e_4).

   b) Montrer que u est un automorphisme de E.