Rapport et exercices oraux HEC Mathématiques ECG Maths approfondies

Juin 2025

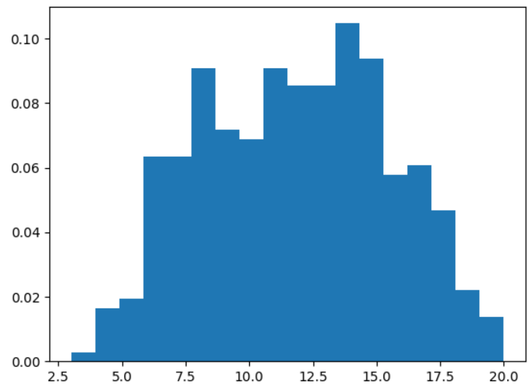
Les oraux se sont bien passés malgré la chaleur.

Certains élèves maîtrisaient mal le cours et jouaient la montre. D'autres au contraire étaient dynamiques et combatifs essayant de trouver des solutions. Nous avons valorisé ces derniers.

Nous avons vu des élèves extrêmement brillants, ayant une approche intuitive rivalisant avec les scientifiques. D'autres malheureusement ne connaissaient pas les hypothèses des théorèmes ou des propriétés et parfois mal leurs résultats.

Les notes se sont étalées de 3 à 20 avec une moyenne de 11,75 et un écart-type de 3,84.

```
count    384.000000
mean      11.858073
std        3.880060
min        3.000000
25%        9.000000
50%       12.000000
75%       15.000000
max       20.000000
```



Le jury aimerait insister sur les points suivants.

- Il est important de bien organiser son tableau : les candidats doivent le découper et y écrire en colonnes. Plusieurs candidats effacent leurs résultats trop vite, alors que la moitié du tableau est encore vide. De plus, avant d'effacer quoi que ce soit au tableau, il faut demander l'autorisation du jury.
- Les candidats annoncent parfois qu'ils ont des pistes alors qu'ils n'ont rien. C'est à la longue assez agaçant…
- Il faut savoir illustrer des résultats de propriétés : les sommes de Riemann, la convexité ou des définitions projecteur…
- Il faut rappeler que l'intégrande doit être continue et qu'une « impropreté » est là où l'intégrande n'est pas continue et non aux bornes de l'intégrale.
- Le jury ne souhaite pas que les candidats passent des questions mais qu'ils se confrontent aux questions difficiles.
- Le jury attend des candidats qu'ils sachent prouver si une intégrale converge et ne calculent pas « sous réserve de convergence ».
- Il faut savoir mieux revenir aux définitions en étant plus méthodique et structuré. La manipulation des quantificateurs est parfois déficiente et cela a pu empêcher certains candidats ayant de bonnes intuitions de conclure proprement un raisonnement.
- Quand un exercice propose le code d'une fonction Python et demande au candidat d'expliquer ce que fait la fonction, le jury n'attend pas qu'il se contente de paraphraser voir simplement lire le code.
- Plusieurs candidats ont semblé mal à l'aise avec la convexité, en particulier l'interprétation géométrique de la définition n'était pas toujours maitrisée.

- Il est important de participer à la journée de l'oral ou, au moins, de la visionner. Elle répond aux questions de l'organisation et des attendus de chaque oral.

  Cela permet aux étudiants d'apprendre le déroulement d'un oral du point de vue des membres du jury.

Nous félicitons ceux, nombreux, qui se sont accrochés jusqu'au bout, essayant diverses méthodes, proposant des idées.

L'exercice sans préparation a très bien rempli son rôle et permet de rattraper des premières parties d'oraux mal commencés, ou de confirmer une prestation remarquable.

Voici quelques sujets proposés cette année. Nous publions aussi leurs corrigés, mais insistons sur le fait que ces corrigés sont indicatifs, ont été écrit à l'intention des membres de jury et ne correspondent pas toujours exactement à un attendu.

SUJET Maths Approfondies 1

Exercice principal 1

Toutes les variables aléatoires considérées ici sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Soit $I = [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$. On considère la fonction $\varphi \ : \ I \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in I, \ \varphi(x) = \ln(\cos(x)) + \frac{x^2}{2}.$$

1. Question de cours : rappeler la formule de Taylor avec reste intégral (à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ quelconque), pour une fonction de classe C^∞.
2. Montrer que tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin(x)| \leqslant |x|$.
3. Montrer qu'il existe une constante $M > 0$ telle que

$$\forall x \in I, \ |\varphi(x)| \leqslant Mx^4.$$

4. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi et vérifiant

$$\mathbb{P}(X_1 = -1) = \mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{1}{2}.$$

   On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{2k-1}X_k.$$

   (a) Montrer que pour tout $t \in I$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\mathbb{E}(\cos(tY_n)) = \prod_{k=1}^{n}\cos(\frac{\sqrt{2k-1}}{n}t).$$

   (b) Soit $t \in I$. Montrer qu'il existe un entier $N_t \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall n \geqslant N_t, \ \forall k \in \{1, \cdots, n\}, \frac{\sqrt{2k-1}}{n}t \in I.$$

   (c) Soit $t \in I$. Déterminer la limite

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left(\cos(tY_n)\right).$$

Solution :

1. Voie EC, mathématiques approfondies de première année p19
2. Par parité, il suffit de montrer l'inégalité quand $x \geqslant 0$. On sait dans ce cas que

$$\forall t \in [0, x], \ |(\sin)'(t)| = |\cos(t)| \leqslant 1.$$

   En utilisant l'inégalité des accroissements finis, on en déduit que $|\sin(x)| \leqslant |x|$.
3. On a pour tout $x \in I$

$$\varphi'(x) = -\frac{\sin(x)}{\cos(x)} + x$$

   et

$$\varphi''(x) = 1 - \frac{1}{\cos^2(x)} = -\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$$

Ainsi,

$$|\varphi''(x)| \leqslant \frac{\sin^2 x}{\cos^2 \frac{\pi}{4}} = 2\sin^2 x \leqslant 2x^2.$$

En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral en 0, on a pour tout $x \in I$ avec $x \geqslant 0$:

$$|\varphi(x)| = |\varphi(0) + \varphi'(0)x + \int_0^x (x-t)\varphi''(t)dt| = |\int_0^x (x-t)\varphi''(t)dt|$$

Ainsi, pour $x \geqslant 0$ on a

$$|\varphi(x)| \leqslant \int_0^x (x-t)|\varphi''(t)|dt \leqslant 2\int_0^x (x-t)t^2 dt = 2(\frac{x^4}{3} - \frac{x^4}{4}) = \frac{x^4}{6}.$$

Pour $x \leqslant 0$, on utilise la parité de φ.

4. (a) Montrons par récurrence sur n la propriété :

$$\forall t \in I,\ \mathbb{E}\cos(tY_n)) = \prod_{k=1}^{n} \cos(\frac{\sqrt{2k-1}}{n}t).$$

On pose dans la suite pour tout $n \geqslant 1$:

$$Z_n = nY_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{2k-1}X_k.$$

La propriété est vraie pour $n = 1$ car

$$\mathbb{E}(\cos(tY_1)) = \mathbb{E}\cos(tX_1)) = \frac{1}{2}\cos(-t) + \frac{1}{2}\cos(t) = \cos(t).$$

Supposons qu'elle est vraie pour un certaine $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$Y_{n+1} = \frac{Z_{n+1}}{n+1} = \frac{Z_n + \sqrt{2n+1}X_{n+1}}{n+1} = \frac{nY_n}{n+1} + \frac{\sqrt{2n+1}}{n+1}X_{n+1}$$

Donc

$$\mathbb{E}(\cos(tY_{n+1})) = \mathbb{E}\left(\cos(\frac{ntY_n}{n+1})\cos(\frac{\sqrt{2n+1}}{n+1}tX_{n+1}) - \sin(\frac{ntY_n}{n+1})\sin(\frac{\sqrt{2n+1}}{n+1}tX_{n+1})\right).$$

Par linéarité de l'espérance et le lemme des coalitions on a

$$\mathbb{E}(\cos(tY_{n+1})) = \mathbb{E}\left(\cos(\frac{ntY_n}{n+1})\right)\mathbb{E}\left(\cos(\frac{\sqrt{2n+1}}{n+1}tX_{n+1})\right) - \mathbb{E}\left(\sin(\frac{ntY_n}{n+1})\right)\mathbb{E}\left(\sin(\frac{\sqrt{2n+1}}{n+1}tX_{n+1})\right).$$

On a

$$\mathbb{E}\left(\cos(\frac{\sqrt{2n+1}}{n+1}tX_{n+1})\right) = \frac{1}{2}\cos(-\frac{\sqrt{2n+1}}{n+1}) + \frac{1}{2}\cos(\frac{\sqrt{2n+1}}{n+1}) = \cos(\frac{\sqrt{2n+1}}{n+1}).$$

$$\mathbb{E}\left(\sin(\frac{\sqrt{2n+1}}{n+1}tX_{n+1})\right) = \frac{1}{2}\sin(-\frac{\sqrt{2n+1}}{n+1}) + \frac{1}{2}\sin(\frac{\sqrt{2n+1}}{n+1}) = 0,$$

et par hypothèse de récurrence

$$\mathbb{E}\left(\cos(\frac{ntY_n}{n+1})\right) = \prod_{k=1}^{n}\cos(\frac{\sqrt{2k-1}}{n}\frac{nt}{n+1}) = \prod_{k=1}^{n}\cos(\frac{\sqrt{2k-1}}{n+1}t).$$

D'où

$$\mathbb{E}\cos(tY_{n+1})) = \prod_{k=1}^{n+1}\cos(\frac{\sqrt{2k-1}}{n+1}t).$$

(b) Si $t = 0$, $N_t = 1$. Si $t \neq 0$, alors

$$\forall k \in \{1, \cdots, n\}, \frac{\sqrt{2k-1}}{n}t \in I$$

si et seulement si

$$\forall k \in \{1, \cdots, n\}, |\frac{\sqrt{2k-1}}{n}||t| \leqslant \frac{\pi}{4}$$

ou si et seulement si

$$\frac{\sqrt{2n-1}}{n}|t| \leqslant \frac{\pi}{4}.$$

Il suffit que ensuite d'observer que

$$\lim_{n\to+\infty} |\frac{\sqrt{2n-1}}{n}||t| = 0.$$

(c) Etant donné que $t \mapsto \mathbb{E}\cos(tY_n))$ est une fonction paire, on supposera que $t \geqslant 0$. On a pour $n \geqslant N_t$:

$$\forall k \in \{1, \cdots, n\}, \quad \cos(\frac{\sqrt{2k-1}}{n}t) \in [\cos(\frac{\pi}{4}), \cos 0] = [\frac{1}{\sqrt{2}}, 1].$$

Ainsi, pour $n \geqslant N_t$

$$\ln(\mathbb{E}(\cos(tY_{n+1}))) = \sum_{k=1}^{n+1} \ln\left(\cos(\frac{\sqrt{2k-1}}{n+1}t)\right) = \sum_{k=1}^{n+1}\left(\varphi(\frac{\sqrt{2k-1}}{n+1}t) - \frac{1}{2}\frac{2k-1}{(n+1)^2}t^2\right).$$

D'où

$$\ln(\mathbb{E}(\cos(tY_{n+1}))) = -\frac{1}{(n+1)^2}t^2\sum_{k=1}^{n+1}(k-\frac{1}{2}) + \varepsilon_t(n) = -\frac{1}{2}t^2 + \varepsilon_t(n)$$

où

$$\varepsilon_t(n) = \sum_{k=1}^{n+1}\varphi(\frac{\sqrt{2k-1}}{n+1}t)$$

On a alors

$$|\varepsilon_t(n)| \leqslant M\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(2k-1)^2}{(n+1)^4}t^4 \leqslant M\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(2n+1)^2}{(n+1)^4}t^4 = M\frac{(2n+1)^2}{(n+1)^3}t^4.$$

Ainsi,

$$\lim_{n\to+\infty}\varepsilon_t(n) = 0.$$

On conclut que

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbb{E}(\cos(tY_n)) = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Exercice sans préparation 1

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

```
def ST(A): # A est une matrice 3*3
    alpha=rd.normal(0,1,1000)
    beta=rd.normal(0,1,1000)
    S=0
    for i in range(3):
        for j in range(i+1):
            S+=A[i,j]**2
    dep= S - (A[0,1])**2+(A[0,2])**2+(A[1,2])**2
    min=S
    for k in range(1000):
        T=dep+(A[0,1]-alpha[k])**2+(A[0,2]-beta[k])**2+(A[1,2]-alpha[k])**2
        if T < min :
            min=T
    return min
ST(B)
4.0097773450062455
```

Que vaut la valeur prise par dep ? Que calcule $ST(B)$? Justifier le résultat.

Solution :

1. On cherche la distance de A à $F = vect\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$

$$M = P_F(A) = \frac{(a_{1,2} + a_{2,3})}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{1,3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$d(A, F)^2) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (a_{i,j} - M_{i,j})^2 = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

2. Si besoin En introduisant le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on remarque qu'il s'agit alors de minimiser la quantité

$$||A - S||^2$$

pour S variant dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ autrement dit de calculer

$$d(A, \mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^2$$

Or les sous-espace $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux et la décomposition

$$A = \frac{A +^t A}{2} + \frac{A -^t A}{2}$$

montre que

$$d(A, \mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^2 = d(A, \frac{A +^t A}{2})^2 = \frac{1}{4} \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (a_{i,j} - a_{j,i})^2$$

SUJET Maths Approfondies 2

Exercice principal 2

Toutes les variables aléatoires considérées ici sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles admettant une variance et vérifiant les trois propriétés suivantes

— $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}(X_n) = 0$.

— $\forall k, n \in \mathbb{N}^*$ tels que $k \neq n$, $\mathbb{E}(X_k X_n) = 0$.

— $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathbb{V}(X_n)}{n} = 0$.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$Z_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}.$$

On admet dans un premier temps le lemme de Césaro :
Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle qui converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$. Soit $(v_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par

$$\forall n \geqslant 1, v_n = \frac{u_1 + \cdots + u_n}{n}.$$

La suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ converge également vers ℓ.

1. Question de cours : rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
2. Montrer que
$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(Z_n^2) = 0.$$
3. En déduire que Z_n converge en probabilité vers 0.
4. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle vérifiant les deux hypothèses :

   — La suite $\dfrac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$ converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$.

   — $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n^2}{n} = 0$.

   Soit $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi admettant une variance. Montrer que
$$\frac{a_1 Y_1 + \cdots + a_n Y_n}{n}$$
   converge en probabilités vers $\ell\,\mathbb{E}(Y_1)$.
5. Démontrer le lemme de Césaro.

Solution :

1. Voie EC, mathématiques approfondies de première année p24
2. $$Z_n^2 = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} X_k^2 + \frac{2}{n^2}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}^{n} X_i X_j.$$
   D'où
$$0 \leqslant \mathbb{E}(Z_n^2) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}(X_k^2) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k\frac{\mathbb{E}(X_k^2)}{k} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\mathbb{E}(X_k^2)}{k}.$$
   Il suffit ensuite de faire tendre n vers $+\infty$, utiliser le lemme de Césaro pour le terme à droite et conclure avec le théorème des Gendarmes.

3. Soit $\varepsilon > 0$. On utilise l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev (on note que $\mathbb{E}(Z_n) = 0$) :

$$\mathbb{P}(|Z_n| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathbb{E}(Z_n^2)}{\varepsilon^2}$$

puis on fait tendre $n \to +\infty$.

4. On pose

$$U_n = a_n(Y_n - \mathbb{E}(Y_n)).$$

On a alors pour tous $n, k \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{E}(U_n) = 0, \text{ et si } k \neq n, \ \mathbb{E}(U_k U_n) = a_k a_n \mathrm{Cov}(Y_k, Y_n) = 0.$$

De plus

$$\forall n \geqslant 1, \ \mathbb{E}(U_n^2) = a_n^2(\mathbb{E}(Y_n^2) - \mathbb{E}(Y_n)^2) = a_n^2 \mathbb{V}(Y_n) = a_n^2 \mathbb{V}(Y_1)$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathbb{E}(U_n^2)}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n^2 \mathbb{V}(Y_1)}{n} = 0.$$

Donc

$$\frac{U_1 + \cdots + U_n}{n}$$

converge en probabilité vers 0, c'est-à-dire pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|\frac{U_1 + \cdots + U_n}{n}| \geqslant \varepsilon) = 0.$$

ou encore

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|\frac{a_1Y_1 + \cdots + a_nY_n}{n} - \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\mathbb{E}(Y_1)| \geqslant \varepsilon) = 0.$$

On a par ailleurs,

$$|\frac{a_1Y_1 + \cdots + a_nY_n}{n} - \ell\mathbb{E}(Y_1)| \leqslant |\frac{a_1Y_1 + \cdots + a_nY_n}{n} - \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\mathbb{E}(Y_1)| + |\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} - \ell||\mathbb{E}(Y_1)|.$$

Il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, on a

$$|\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} - \ell||\mathbb{E}(Y_1)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Donc pour $n \geqslant n_0$, on a

$$|\frac{a_1Y_1 + \cdots + a_nY_n}{n} - \ell\mathbb{E}(Y_1)| \leqslant |\frac{a_1Y_1 + \cdots + a_nY_n}{n} - \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\mathbb{E}(Y_1)| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Donc

$$\{|\frac{a_1Y_1 + \cdots + a_nY_n}{n} - \ell\mathbb{E}(Y_1)| \geqslant \varepsilon\} \subset \{|\frac{a_1Y_1 + \cdots + a_nY_n}{n} - \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\mathbb{E}(Y_1)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\}.$$

Ainsi, pour $n \geqslant n_0$

$$\mathbb{P}(|\frac{a_1Y_1 + \cdots + a_nY_n}{n} - \ell\mathbb{E}(Y_1)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \mathbb{P}|\frac{a_1Y_1 + \cdots + a_nY_n}{n} - \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\mathbb{E}(Y_1)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}).$$

Il suffit de passer ensuite à la limite quand $n \to +\infty$.

5. bien connu.

Exercice sans préparation 2

On note I_3 la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et O_3 la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. On admet que $(A+I_3)^3 = O_3$.

Comment pourrait-on déterminer, pour tout $p \in \mathbb{N}$, une expression de A^p en fonction de p ?

Solution :

Le résultat admis donne : $P(x) = (x+1)^3$ est un polynôme annulateur de A.

Pour $p \in \mathbb{N}$, on effectue la division euclidienne de X^p par P, ce qui s'écrit ici, compte tenu de la formule de Taylor pour les polynômes :

$$x^p = (x+1)^3 Q(x) + (-1)^p \frac{p(p-1)}{2}(x+1)^2 + (-1)^{p-1}p(x+1) + (-1)^p,$$

où $Q \in \mathbb{R}[x]$. On peut donc écrire :

$$A^p = (-1)^p \frac{p(p-1)}{2}\left(A+I_3\right)^2 + (-1)^{p-1}p\left(A+I_3\right) + (-1)^p I_3$$

On calcule alors $\left(A+I_3\right)^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et on en déduit :

$$A^p = (-1)^p \begin{pmatrix} p^2-4p+1 & -\dfrac{p(p-3)}{2} & \dfrac{p(p-5)}{2} \\ p(p-6) & \dfrac{-p^2}{2}+\dfrac{5}{2}p+1 & \dfrac{p(p-7)}{2} \\ -p(p-2) & \dfrac{p(p-1)}{2} & -\dfrac{p^2}{2}+\dfrac{3}{2}p+1 \end{pmatrix}.$$

Remarque : on peut remarquer que la matrice $N = A + I_3$ est nilpotente, et développer $A^p = (-I_3+N)^p$ a l'aide de la formule du binôme.

Question supplémentaire : Étude du cas $p \in \mathbb{Z}$.

Le résultat admis donne $\mathrm{Sp}\,(A) \subset \{-1\}$. Puisque 0 n'est pas valeur propre de A, la matrice A est inversible et l'expression A^p pour p entier négatif a bien un sens. En notant $M(p)$ la matrice obtenue pour A^p dans le cas $p \in \mathbb{N}$, on remarque que $M(p) \times M(-p) = I_3$, ce qui permet de conclure que $A^{-p} = M(-p)$.

SUJET Maths Approfondies 3

Exercice principal 3

Toutes les variables aléatoires considérées ici sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de même loi admettant une varaince. Pour tout réel θ et tout entier naturel non nul n on pose

$$u_n(\theta) = \mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n \leqslant n\theta).$$

1. Question de cours : rappeler le théorème limite central.
2. On suppose dans cette question que les variables X_n suivent une loi binomiale de paramètres (m,p). Trouver l'expression de $u_n(\theta)$ en fonction de n, θ, m et p.
3. On suppose dans cette question que les variables X_n suivent une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Trouver l'expression de $u_n(\theta)$ en fonction de n, θ et λ.
4. On revient au cas général. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\theta \neq \mathbb{E}(X_1)$. Montrer que la suite $(u_n(\theta))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.
5. On se place dans le cas $\theta = \mathbb{E}(X_1)$. Montrer que la suite $(u_n(\theta))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.
6. En déduire la limite de la somme suivante en fonction de θ

$$\sum_{k=0}^{\min(mn,\lfloor\theta n\rfloor)} \binom{nm}{k} p^k(1-p)^{nm-k},$$

où $\lfloor\theta n\rfloor$ désigne la partie entière de θn.

Solution :

1. Voie EC, mathématiques approfondies de seconde année p 22.
2. On sait que $X_1 + X_2$ suit la loi binomiale de paramètres $(2m,p)$. Plus généralement, pour tout $n \geqslant 1$, $X_1 + \cdots, +X_n$ suit la loi binomiale de paramètres (nm,p). Donc

$$u_n(\theta) = \sum_{k=0}^{\min(nm,[n\theta])} \mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n = k) = \sum_{k=0}^{\min(mn,[n\theta])} \binom{nm}{k} p^k(1-p)^{nm-k}.$$

3. Dans ce cas, on montre facilement par récurrence que $X_1+\cdots+X_n$ suit aussi une loi de Poisson de paramètre $n\lambda$. Donc

$$u_n(\theta) = \sum_{k=0}^{[n\theta]} \mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n = k) = e^{-n\lambda} \sum_{k=0}^{[n\theta]} \frac{(n\lambda)^k}{k!}.$$

4. Si $\theta < M = \mathbb{E}(X_1)$ alors pour tout $\varepsilon > 0$ on a

$$\mathbb{P}(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - M\right| \geqslant \varepsilon) = \mathbb{P}\left(X_1 + \cdots + X_n \geqslant (\varepsilon + M)n\right) + \mathbb{P}\left(X_1 + \cdots + X_n \leqslant (M-\varepsilon)n\right).$$

D'où :

$$0 \leqslant \mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n \leqslant (M-\varepsilon)n) \leqslant \mathbb{P}\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - M\right| \geqslant \varepsilon).$$

En appliquant la loi des grands nombres et le théorème des Gendarmes, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n \leqslant (M-\varepsilon)n) = 0.$$

En choisissant $\varepsilon = M - \theta$, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} u_n(\theta) = 0$.
Si $\theta > M$. On choisit $\varepsilon = \theta - M > 0$. On a alors

$$\mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n \leqslant \theta n) = \mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n \leqslant (M+\varepsilon)n) = 1 - \mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n \geqslant (M+\varepsilon)n).$$

Or

$$0 \leqslant \mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n \geqslant (M+\varepsilon)n) \leqslant \mathbb{P}\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - M\right| \geqslant \varepsilon).$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n \geqslant (M+\varepsilon)n) = 0.$$

Ainsi,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n \leqslant \theta n) = 1.$$

5. D'après le théorème limite central, en notant σ l'écart-type :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - M\right) \leqslant 0\right) = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{t^2}{2})dt = \frac{1}{2}.$$

D'où

$$\lim_{n\to+\infty} u_n(\theta) = \frac{1}{2}.$$

6. On revient au cas où X_1 suit une loi binomiale de paramètres (m,p). Ainsi, $\mathbb{E}(X_1) = mp$. Si $\theta > mp$ on a

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{\min(mn,[\theta n])} \binom{nm}{k} p^k (1-p)^{nm-k} = 1.$$

Si $\theta < mp$ on a

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{\min(mn,[\theta n])} \binom{nm}{k} p^k (1-p)^{nm-k} = 0.$$

Si $\theta = mp$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{\min(mn,[nmp])} \binom{nm}{k} p^k (1-p)^{nm-k} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{[nmp]} \binom{nm}{k} p^k (1-p)^{nm-k} = \frac{1}{2}.$$

Exercice sans préparation 3

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$. Soient (a, b) une famille libre de deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et $c \in \mathbb{R}^n$.

Déterminer deux réels λ et μ dépendant de $(a, b, c) \in (\mathbb{R}^n)^3$ et minimisant la quantité $\sum_{k=1}^{n} |\lambda a_k + \mu b_k + c_k|^2$, où $a = (a_1, ..., a_n)$, $b = (b_1, ..., b_n)$ et $c = (c_1, ..., c_n)$.

Solution :
DEMANDER UN DESSIN pour $n = 3$ On veut trouver λ et μ minimisant $\|c + (\lambda a + \mu b)\|^2$, où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne associée au produit scalaire de $\mathbb{R}^n$. Cette quantité est minimale si et seulement si $\lambda a + \mu b$ est l'opposé du projeté orthogonal de c sur le plan $\operatorname{Vect}(a, b)$.

Comme la famille (a, b) est libre, on peut contruire une base orthonormée de $\operatorname{Vect}(a, b)$.

Prenons par exemple :

$$(e_1, e_2) = \left(\frac{1}{\|a\|}a, \frac{\|a\|}{\alpha}b - \frac{\langle a, b\rangle}{\alpha\|a\|}a\right), \quad \text{où} \quad \alpha = \sqrt{\|a\|^2\|b\|^2 - \langle a, b\rangle^2}.$$

On sait alors que le projeté de c sur $\operatorname{Vect}(a, b)$ est $\langle c, e_1\rangle e_1 + \langle c, e_2\rangle e_2$.

Comme la famille (a, b) est libre, par identification on trouve :

$$\lambda = \frac{-\langle c, a\rangle}{||a||^2} + \frac{\langle c, b\rangle\langle a, b\rangle}{\alpha^2} - \frac{\langle a, b\rangle^2\langle c, a\rangle}{\alpha^2||a||^2} \quad \text{et} \quad \mu = \frac{|-|a||^2\langle c, b\rangle}{\alpha^2} + \frac{\langle c, a\rangle\langle a, b\rangle}{\alpha^2}.$$

SUJET Maths Approfondies 4

Exercice principal 4

Toutes les variables aléatoires considérées ici sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
On dit qu'une variable aléatoire X est unimodale si sa fonction de répartition F_X est convexe sur $]-\infty, 0[$ et concave sur $]0, +\infty[$.

1. Question de cours : rappeler les propriétés de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.
2. On suppose dans cette question que X suit une loi normale de paramètres (μ, σ^2). Donner des conditions nécessaires et suffisantes sur μ et σ pour que X soit unimodale.
3. Soit $t \in \mathbb{R}^*$ et soit Z_t une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur I_t où I_t est l'intervalle égal à $[t, 0]$ si $t < 0$ et à $[0, t]$ si $t > 0$. Montrer que Z_t est unimodale.
4. Pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, on note U_t la fonction de répartition de Z_t. Quand $t = 0$, on définit U_0 par : $U_0(x) = 1$ pour $x \geqslant 0$ et $U_0(x) = 0$ pour $x < 0$.

   Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto tU_t(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
5. Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition donnée par
$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} U_t(x)h(t)\,\mathrm{d}t\ ,$$
   où $h\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1, positive, vérifiant $h(0) = 0$ et telle que l'intégrale
$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)dt$$
   converge.
   (a) Montrer que X est unimodale.
   (b) Montrer que X est une variable aléatoire à densité et déterminer sa densité en fonction de h.

Solution :

1. Voie EC, mathématiques approfondies de seconde année p14
2. La densité de X dans ce cas est donnée par
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$
   D'où
$$f'(x) = -\frac{(x-\mu)}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$
   Ainsi, f est strictement croissante sur $]-\infty, \mu]$ et strictement décroissante sur $[\mu, +\infty[$. Pour que X soit unimodale, il faut et il suffit que $\mu = 0$.
3. Soit U_t la fonction de répartition de Z_t. Si $t > 0$, on montre facilement que
$$U_t(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \dfrac{x}{t} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant t, \\ 1 & \text{si } x > t. \end{cases}$$
   Il en résulte directement que Z_t est unimodale.
   De même, si $t < 0$, on montre facilement que
$$U_t(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant t, \\ \dfrac{t-x}{t} & \text{si } t \leqslant x \leqslant 0, \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$
   Il en résulte aussi que Z_t est unimodale.

4. Des expressions précédentes, on a si $x < 0$

$$U_t(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \geqslant x, \\ \dfrac{t-x}{t} & \text{si } t < x. \end{cases}$$

Si $x \geqslant 0$, on a

$$U_t(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \leqslant x, \\ \dfrac{x}{t} & \text{si } t > x. \end{cases}$$

On en déduit facilement que $t \mapsto tU_t(x)$ est continue.

5. .
   (a) Il suffit d'utiliser le fait que $x \mapsto U_t(x)$ est unimodale pour tout $t \in \mathbb{R}$.
   (b) On peut écrire pour $x > 0$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} h(t)dt + \int_{x}^{+\infty} \frac{x}{t}h(t)dt = \int_{-\infty}^{x} h(t)dt + x\int_{x}^{+\infty} \frac{h(t)}{t}dt.$$

Puisque h est continue et que $t \in \mathbb{R}^* \mapsto \dfrac{h(t)}{t}$ peut être prolongée par continuité en 0, on en déduit facilement que F_X est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$. On conclut que X est une variable aléatoire à densité. Notons f sa densité. On a pour tout $x > 0$

$$f(x) = F_X'(x) = \int_{x}^{+\infty} \frac{h(t)}{t}dt.$$

Pour $x < 0$, on a

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{t-x}{t}h(t)dt = \int_{-\infty}^{x} h(t)dt - x\int_{-\infty}^{x} \frac{h(t)}{t}dt.$$

Ainsi, F_X est de classe C^1 sur $]-\infty, 0[$.

$$f(x) = F_X'(x) = -\int_{-\infty}^{x} \frac{h(t)}{t}dt.$$

Exercice sans préparation 4

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.
On dit qu'un endomorphisme non nul f de E est nilpotent s'il existe un entier positif k tel que $f^k = 0$.
On dit que f est unipotent si $f - \mathrm{Id}_E$ est nilpotent.
Si f est nilpotent et k un entier positif tel que $f^k = 0$, on définit un endomorphisme e^f de E par :

$$e^f = \sum_{\ell=0}^{k-1} \frac{f^\ell}{\ell!}$$

1. Montrer que pour tout endomorphisme nilpotent f de E, on a $f^n = 0$.
2. On note $\mathcal{N}$ et $\mathcal{U}$ les ensembles des endomorphismes nilpotents et unipotents respectivement. Montrer que l'application :

   $$\exp : \mathcal{N} \to \mathcal{L}(E), \quad f \mapsto e^f$$

   établit une bijection entre $\mathcal{N}$ et $\mathcal{U}$.

Solution :

1. Soit k l'ordre de nilpotence de f (le plus entier k tel que $f^k = 0$). Il existe $v \in E$ tel que $f^{k-1}(v) \neq 0$. La famille $(v, f(v), \ldots, f^n(v))$ est liée et $f^n(v)$ est forcément combinaison linéaire de $v, f(v), \ldots, f^{n-1}(v)$. On a donc

   $$f^n(v) = \alpha_1 f^{n-1}(v) + \ldots + \alpha_\ell f^{n-\ell}(v)$$

   avec $\alpha_\ell \neq 0$. Si $k > n$, on a alors

   $$f^{k-1-n+\ell}(f^n(v)) = f^{k-1-n+\ell}(\alpha_1 f^{n-1}(v) + \ldots + \alpha_\ell f^{n-\ell}(v)) = \alpha_1 f^{k-1-n+\ell}(f^{n-1}(v)) + \ldots + \alpha_\ell f^{k-1-n+\ell}(f^{n-\ell}(v))$$

   $$f^{k-1+\ell}(v) = \alpha_1 f^{k-1+\ell-1}(v) + \ldots + \alpha_\ell f^{k-1}(v)$$

   On conclut que $f^{k-1}(v) = 0$ et on a une contradiction. Donc $k \leqslant n$.
2. Il suffit de remarquer que l'exponentielle admet un inverse. Si $u \in \mathcal{U}$ et $f = u - Id_E$, l'application inverse est

   $$\ln(u) = \ln(Id_E + f) = \sum_{\ell=1}^{n-1} (-1)^{\ell-1} \frac{(f)^\ell}{\ell} \; .$$

SUJET Maths Approfondies 5

Exercice principal 5

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.

1. Question de cours : Endomorphismes symétriques.
2. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle et $B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur colonne. On considère la fonction $f\ :\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par
$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ f(x) = \frac{1}{2}{}^tXAX - {}^tBX,$$
où on a noté $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (lettre majuscule) le vecteur coordonnées de x dans la base canonique.
Montrer que f est minorée si et seulement si A et B vérifient les deux conditions :
   (a) les valeurs propres de A sont positives,
   (b) $B \in \ \mathrm{Im}\ (A)$,
   (où $\ \mathrm{Im}\ (A) = \{Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid \exists X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $AX = Y\}$).
3. Soient $f_1,\ f_2$ deux fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définies par
$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ f_i(x) = \frac{1}{2}{}^tXA_iX - {}^tB_iX,\ \text{pour } i = 1, 2,$$
où A_1 et A_2 sont deux matrices réelles symétriques et $B_1, B_2 \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On suppose que f_1 et f_2 sont minorées et que
$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ ||\nabla f_1(x)|| = ||\nabla f_2(x)||\,.$$
Montrer que $f_1 = f_2$.
4. Soient A_1 et A_2 deux matrices réelles symétriques vérifiant la condition (a) de la question 2. Montrer que
$$\mathrm{Im}\ (A_1 + A_2) = \ \mathrm{Im}\ (A_1) + \ \mathrm{Im}\ (A_2),$$
puis en déduire que
$$\mathrm{Ker}\ (A_1 + A_2) = \ \mathrm{Ker}\ (A_1) \cap \ \mathrm{Ker}\ (A_2).$$
(où $\ \mathrm{Im}\ (A) = \{Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid \exists X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \quad Y = AX\}$ et $\ \mathrm{Ker}\ (A) = \{X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 0\}$).

Solution :

1. Voie EC, mathématiques approfondies de seconde année p17.
2. On peut raisonner avec les fonction de plusieurs variables ou aussi de façon algébrique.
   — Supposons que f est minorée par un réel $m \in \mathbb{R}$. Ainsi,
$$\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \frac{1}{2}{}^tXAX - {}^tBX \geqslant m.$$
   En remplaçant X par λX, où $\lambda \in \mathbb{R}$ est quelconque, on a
$$\frac{\lambda^2}{2}{}^tXAX - \lambda{}^tBX \geqslant m.$$
   En divisant par λ et en faisant $\lambda \to +\infty$, on obtient
$$\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tXAX \geqslant 0,$$
   ce qui signifie que A est semi-définie positive. De plus, pour tout X tel que $AX = 0$, on a
$${}^tBX \geqslant m.$$
   Nécessairement ${}^tBX = 0$ pour tout X tel que $AX = 0$. Ainsi $B \in \ \mathrm{Ker}\ (A)^\perp = \ \mathrm{Im}\ (A)$.

— Réciproquement, si $B \in \text{ Ker } (A)^{\perp} = \text{ Im } (A)$ et A à valeurs propres positives, on peut introduire une B.O.N. $(V_1, \cdots, V_n)$ de vecteurs propres de A associés aux valeurs propres $0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$. On suppose que
$0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_{p-1} < \lambda_p, \cdots, \lambda_n$. Ainsi $B \in \text{ Ker } (A)^{\perp} = vect\{V_p, \cdots, V_n\}$. On a alors

$$f(x) = \frac{1}{2}\sum_{k=p}^{n} \lambda_k \beta_k^2 - \sum_{k=p}^{n} \gamma_k \beta_k,$$

où $\gamma_p, \cdots, \gamma_n$, $\beta_1, \cdots, \beta_n$ sont les composantes de B et de X dans la base $(V_1, \cdots, V_n)$. Clairement f est minorée.

3. On a

$$\nabla f_i = A_i X - B_i.$$

Ainsi

$$\forall X,\ \|A_1 X - B_1\| = \|A_2 X - B_2\|$$

En fixant X, puis le remplaçant par λX dans cette identité, divisant par $|\lambda|$ et faisant tendre λ vers $+\infty$ donne

$$\forall X,\ \|A_1 X\| = \|A_2 X\|$$

En levant au carré, cela donne

$$\forall X,\ {}^t X(A_2^2 - A_1^2)X = 0.$$

Forcément $A_1^2 = A_2^2$. Etant donné que les vecteurs propres de A_1 et de A_1^2 sont les mêmes, on en déduit que les vecteurs propres de A_1 et A_2 sont les mêmes. On peut donc diagonaliser ces deux matrices dans une même base. Puisqu'elles sont SDP, on en déduit facilement que $A_1 = A_2$. On revient à l'égalité $\|A_1 X - B_1\| = \|A_2 X - B_2\|$ qui devient $\|A_1 X - B_1\| = \|A_1 X - B_2\|$ pour tout X. Ainsi

$$\forall X,\ 2^t(B_2 - B_1)A_1 X + \|B_1\|^2 - \|B_2\|^2 = 0.$$

Avec $X = 0$ on obtient $\|B_1\|^2 - \|B_2\|^2 = 0$. Ensuite, on a ${}^t(B_2 - B_1)A_1 X = 0$ pour tout X. Ce qui prouve que $B_1 - B_2 \in (\text{ Im } A_1)^{\perp}$. Comme $B_1 - B_2 \in \text{ Im } (A_1)$ on en déduit que $B_1 = B_2$.

4. On a $\text{ Im } (A_1 + A_2) \subset \text{ Im } (A_1) + \text{ Im } (A_2)$. Montrons l'inclusion réciproque. Soient $B_1 \in \text{ Im } (A_1)$ et $B_2 \in \text{ Im } (A_2)$ quelconques. Les fonctions f_i construites comme ci-dessus avec les couples (A_i, B_i), $i = 1, 2$, sont minorées. Donc leurs somme

$$(f_1 + f_2)(X) = \frac{1}{2}{}^t X(A_1 + A_2)X - {}^t(B_1 + B_2)X,$$

est minorée. Ainsi, $B_1 + B_2 \in \text{ Im } (A_1 + A_2)$. On conclut que $\text{ Im } (A_1 + A_2) \subset \text{ Im } (A_1 + A_2)$. On raisonne ensuite par orthogonalité pour la dernière égalité.

Exercice sans préparation 5

Soit n un entier positif non nul. On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et un n-échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ de variables aléatoires sur Ω indépendantes de loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$. Pour chaque $\omega \in \Omega$ fixé, on ordonne les valeurs $X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)$:

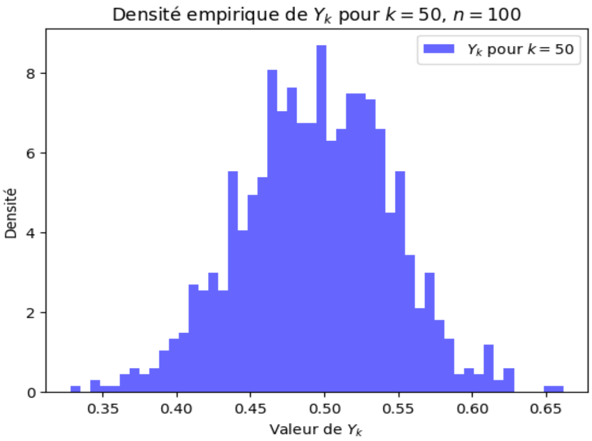
$$X_{i_1}(\omega) \leqslant X_{i_2}(\omega) \leqslant \ldots \leqslant X_{i_n}(\omega)$$

où $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ est une permutation des indices $\{1, 2 \ldots, n\}$ (qui dépend de ω) avec la convention que si $X_{i_k}(\omega) = X_{i_{k+1}}(\omega)$ pour $k \in [\![1; n-1]\!]$ alors $i_k < i_{k+1}$.
Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on pose alors $Y_k(\omega) = X_{i_k}(\omega)$. On définit ainsi une variable alátoire Y_k en faisant varier $\omega \in \Omega$.

1. Donner un code python qui simule la variable aléatoire Y_k.
   Indication : On pourra utiliser la commande `np.sort()` qui trie un tableau par ordre croissant.
2. Déterminer la fonction de répartition de Y_k. Justifier que Y_k est une variable à densité et donner une densité de Y_k.

Solution :

1.
```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Parametres
n = 100  # Taille de l'echantillon
num_samples = 1000  # Nombre de simulations

# Generer des echantillons de la loi uniforme
samples = np.random.uniform(0, 1, (num_samples, n))

# Trier les echantillons pour obtenir les statistiques d'ordre
order_stats = np.sort(samples, axis=1)

# Afficher les statistiques d'ordre pour une simulation
print("Statistiques d'ordre pour un echantillon :")
print(order_stats[0])

# Tracer la densite empirique des statistiques d'ordre
k = 50  # Indice de la statistique d'ordre  Y_k
plt.hist(order_stats[:, k - 1], bins=50, density=True, alpha=0.6,
color='b', label=f'$Y_k$ pour $k = {k}$')

# Ajouter des labels et une legende
plt.title(f"Densite empirique de $Y_k$ pour $k = {k}$, $n = {n}$")
plt.xlabel("Valeur de $Y_k$")
plt.ylabel("Densite")
plt.legend()
plt.show()
```



2. Pour $t \in [0,1]$, on a $F_{Y_k}(t) = \mathbb{P}(X_i \leqslant t \text{ pour au moins } k \text{ indices } i) = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} \mathbb{P}(X_1 \leqslant t)^j \mathbb{P}(X_1 > t)^{n-j}$. Donc

$$F_{Y_k}(t) = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} t^j (1-t)^{n-j}$$

$$f_{Y_k}(x) = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} \left(jx^{j-1}(1-x)^{n-j} - (n-j)x^j(1-x)^{n-j-1} \right), \quad x \in [0,1].$$

$$= \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} jx^{j-1}(1-x)^{n-j} - \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} (n-j)x^j(1-x)^{n-j-1}.$$

Pour la premiére somme, notons que :

$$\binom{n}{j} j = n\binom{n-1}{j-1}.$$

Ainsi la somme s'écrit :

$$\sum_{j=k}^{n} n\binom{n-1}{j-1} x^{j-1}(1-x)^{n-j} = n \sum_{i=k-1}^{n-1} \binom{n-1}{i} x^i (1-x)^{n-1-i}$$

en posant $i = j-1$. Pour la seconde somme, notons que :

$$\binom{n}{j}(n-j) = n\binom{n-1}{j}.$$

Ainsi, la somme devient :

$$\sum_{j=k}^{n} n\binom{n-1}{j} x^j (1-x)^{n-j-1} = n \sum_{i=k}^{n-1} \binom{n-1}{i} x^i (1-x)^{n-1-i}$$

en posant $i = j$. En combinant les deux sommes on obtient

$$f_{Y_k}(x) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} x^{k-1}(1-x)^{n-k}, \quad x \in [0,1].$$

SUJET Maths Approfondies 6

Exercice principal 6

Le but de cet exercice est de montrer par l'absurde que le nombre π est irrationnel.
On suppose qu'il existe deux entiers naturels non nuls p et q tels que $\pi = \dfrac{p}{q}$.
On définit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction polynomiale P_n et l'intégrale I_n par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P_n(x) = \frac{1}{n!} x^n (p - qx)^n \quad \text{et} \quad I_n = \int_0^\pi P_n(t) \sin(t) \, \mathrm{d}t.$$

1. **Question de cours :** Donner la définition d'une somme de Riemann et préciser un résultat sur sa convergence.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$.
   (a) Déterminer explicitement les coefficients du polynôme P_n.
   (b) Écrire une fonction Python, qui prend en argument un entier naturel non nul n et l'entier q défini dans l'énoncé, et renvoie une valeur approchée de I_n.
   (c) Montrer que $P_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$.
   (d) En déduire que $P_n^{(k)}\left(\dfrac{p}{q}\right) \in \mathbb{Z}$.
   (e) Conclure que $I_n \in \mathbb{N}^*$.
3. Étudier la convergence de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
4. Conclure.

Solution :

1. Programme de mathématiques approfondies 1ère année p12.
2. (a) À l'aide de la formule du binôme de Newton, d'un changement d'indice et en remarquant que $\dbinom{n}{k-n} = \dbinom{n}{2n-k}$:

$$P_n(x) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-q)^{n-k} p^k x^{2n-k} = \frac{1}{n!} \sum_{k=n}^{2n} \binom{n}{k-n} (-q)^{k-n} p^{2n-k} x^k = \sum_{k=0}^{2n} a_k x^k,$$

où $a_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k \in [\![0, n-1]\!] \\ \dfrac{1}{n!} \dbinom{n}{k-n} (-q)^{k-n} p^{2n-k} & \text{si } k \in [\![n, 2n]\!] \end{cases}$.

   (b) Une valeur approchée de I_n peut être obtenue par la somme de Riemann :
$\dfrac{q^n \pi}{N n!} \displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{k\pi}{N}\right)^n \left(\pi - \frac{k\pi}{N}\right)^n \sin\left(\frac{k\pi}{N}\right)$.

```python
import numpy as np

def Integrale(n,q):
  N=1000
  X=[k**n*(np.pi-k*np.pi/N)**n*np.sin(k*np.pi/N) for k in range(N-1)]
  return q**n*(np.pi/N)**(n+1)*sum(X)/np.prod(range(1,n+1))
```

(c) D'après la formule de Taylor pour les fonctions polynomiales, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $P_n^{(k)}(0) = 0 \in \mathbb{Z}$ et pour tout $k \in [\![n, 2n]\!]$:

$$P_n^{(k)}(0) = \frac{k!}{n!}\binom{n}{k-n}(-q)^{k-n}p^{2n-k} = \binom{k}{n}\binom{n}{k-n}(k-n)!(-q)^{k-n}p^{2n-k} \in \mathbb{Z}.$$

(d) On remarque que : $P_n\left(\frac{p}{q} - x\right) = P_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En dérivant k fois et après évaluation en 0, on obtient :

$$(-1)^k P_n^{(k)}\left(\frac{p}{q}\right) = P_n^{(k)}(0),$$

d'où $P_n^{(k)}\left(\frac{p}{q}\right) \in \mathbb{Z}$.

(e) Sur $\left[0, \frac{p}{q}\right]$, P_n et sin sont continues, positives et ne sont pas les fonctions nulles donc : $I_n > 0$.

La fonction P_n est polynomiale de degré $2n$. Les fonctions P_n et sin sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left[0, \frac{p}{q}\right]$, à l'aide de $(2n+1)$ intégrations par parties et en utilisant le fait que $P_n^{(2n+1)} = 0$, on trouve :

$$I_n = \left[\sum_{k=0}^{n}\left(\cos(t)(-1)^{k+1}P_n^{(2k)}(t) + \sin(t)(-1)^{k+1}P_n^{(2k+1)}(t)\right)\right]_0^{\frac{p}{q}} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left(P_n^{(2k)}\left(\frac{p}{q}\right) - P_n^{(2k)}(0)\right).$$

Ainsi, on conclut que $I_n \in \mathbb{N}^*$.

3. La fonction $t \mapsto t(p - qt)$ est positive sur $\left[0, \frac{p}{q}\right]$ et admet un maximum lorsque $t = \frac{p}{2q}$ qui vaut $\frac{p^2}{4q}$. Ainsi, pour tout $t \in \left[0, \frac{p}{q}\right]$:

$$|P_n(t)\sin(t)| \leqslant \frac{1}{n!}\left(\frac{p^2}{4q}\right)^n.$$

Par croissance de l'intégrale : $|I_n| \leqslant \frac{1}{n!}\left(\frac{p^2}{4q}\right)^n \frac{p}{q}$. Or, par croissances comparées, $\frac{1}{n!}\left(\frac{p^2}{4q}\right)^n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, donc par théorème d'encadrement, la suite (I_n) converge vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

4. Vu la question précédente, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $|I_n| \leqslant \frac{1}{2}$, ce qui est en contradiction avec la question 2e, où l'on a prouvé que $I_n \in \mathbb{N}^*$. On conclut donc à l'aide d'un raisonnement par l'absurde que π est irrationnel.

Exercice sans préparation 6

1. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements deux à deux disjoints d'un espace probabilisé. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) = 0$.
2. A l'aide d'une suite de variables aléatoires, donner un exemple d'une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements deux à deux disjoints qui ne soit pas un système complet d'événements.
3. Proposer une variable aléatoire réelle telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(A_n)$
4. Soit X une variable aléatoire indépendante d'elle même. Montrer qu'elle est constante.

Solution :

1. la sigma additivité assure que la série de terme général $\mathbb{P}(A_n)$ converge donc son terme générale tend vers 0.
2. $A_n =$ " avoir un premier pile au (n+1) tirage suivit d'un pile au (n+2) ième tirage.
3. $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k)$
4. On utilise les fonctions de répartitions : Soit F la fonction de répartition de X. Alors $F(X) := \mathbb{P}(X \leqslant x) = \mathbb{P}(\{X \leqslant x\} \cap \{X \leqslant x\}) = \mathbb{P}(X \leqslant x)^2 = F(x)^2$. Alors $F(x) = 0$ ou $F(x) = 1$ pour tout réel x. On en déduit qu'il existe un réel a tel que $P(X = a) = 1$ et X est une constante égale à a.

SUJET Maths Approfondies 7

Exercice principal 7

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

On note $\mathbb{E}(X)$ l'espérance, si elle existe, d'une variable aléatoire X définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Soient un entier $n \geqslant 2$, un réel $p \in]0,1[$ et des variables aléatoires A_n, B_n, et C_n, mutuellement indépendantes, suivant la même loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$.

On définit T_n le polynôme aléatoire :

$$T_n = A_n x^2 + B_n x + C_n,$$

c'est-à-dire que, pour tout $\omega \in \Omega, T_n(\omega)(x)$ est le polynôme $A_n(\omega)x^2 + B_n(\omega)x + C_n(\omega)$.

On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction G_n par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad G_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}\left(A_n = k\right) t^k.$$

1. **Question de cours :** Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
2. Calculer $G_n(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
3. Exprimer, si elles existent, les espérances $\mathbb{E}\left(A_n\right), \mathbb{E}\left(A_n\left(A_n-1\right)\right), \mathbb{E}\left(A_n\left(A_n-1\right)\left(A_n-2\right)\right)$ et $\mathbb{E}\left(A_n\left(A_n-1\right)\left(A_n-2\right)\left(A_n-3\right)\right)$ en fonction de G_n et de ses dérivées.
4. Justifier que la famille $(1, x, x(x-1), x(x-1)(x-2), x(x-1)(x-2)(x-3))$ est une base de $\mathbb{R}_4[x]$.
5. Montrer que $\mathbb{E}\left({A_n}^4\right) = n^4p^4 + \mathrm{o}\left(n^4\right)$ lorsque $n \to +\infty$.

   On définit la variable aléatoire $\Delta_n = {B_n}^2 - 4A_nC_n$.
6. Calculer, si elle existe, $\mathbb{E}\left(\Delta_n\right)$, ainsi que sa limite lorsque $n \to +\infty$.
7. Montrer que $\mathbb{V}\left({B_n}^2\right) = \mathrm{o}\left(n^4\right)$ lorsque $n \to +\infty$.
8. Montrer que $\mathbb{P}\left(\Delta_n \geqslant 0\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$; que peut-on conclure quant à l'existence de racines réelles de T_n ?

Solution :

1. Programme de mathématiques approfondies de première année p24.
2. Comme, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $\mathbb{P}\left(A_n = k\right) = \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}$, on obtient

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad G_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (pt)^k(1-p)^{n-k} = (1-p+pt)^n.$$

3. La fonction G_n est polynomiale de degré n donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

   Si $k > n$, alors $G^{(k)}(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et si $k \leqslant n$, $G^{(k)}(t) = p^k n(n-1)\cdots(n-k+1)(1-p+pt)^{n-k}$.

   On remarque que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $G^{(k)}(1) = k!\binom{n}{k}p^k$, avec la convention $\binom{n}{k} = 0$ lorsque $k > n$.

   Les variables $A_n, A_n\left(A_n-1\right),\ A_n\left(A_n-1\right)\left(A_n-2\right)$ et $A_n\left(A_n-1\right)\left(A_n-2\right)\left(A_n-3\right)$ sont bornées, donc admettent une espérance. Par dérivations successives de G_n et à l'aide du théorème de transfert, on obtient :

$$G_n'(t) = \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}\left(A_n = k\right) t^{k-1} \qquad \text{et } G_n'(1) = \mathbb{E}\left(A_n\right)$$
$$G_n''(t) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\mathbb{P}\left(A_n = k\right) t^{k-2} \qquad \text{et } G_n''(1) = \mathbb{E}\left(A_n\left(A_n-1\right)\right)$$

$$G_n^{(3)}(t)=\sum_{k=3}^{n} k(k-1)(k-2)\mathbb{P}\left(A_n=k\right) t^{k-3} \qquad \text{et } G_n^{(3)}(1)=\mathbb{E}\left(A_n\left(A_n-1\right)\left(A_n-2\right)\right)$$
$$G_n^{(4)}(t)=\sum_{k=4}^{n} k(k-1)(k-2)(k-3)\mathbb{P}\left(A_n=k\right) t^{k-4} \quad \text{et } G_n^{(4)}(1)=\mathbb{E}\left(A_n\left(A_n-1\right)\left(A_n-2\right)\left(A_n-3\right)\right)$$

4. La famille $(1, x, x(x-1), x(x-1)(x-2), x(x-1)(x-2)(x-3))$ est composée de 5 vecteurs de $\mathbb{R}_4[x]$. Puis, si $(\lambda_j)_{j\in[\![1,5]\!]}\in\mathbb{R}^5$ est telle que
$$\lambda_1+\lambda_2 x+\lambda_3 x(x-1)+\lambda_4 x(x-1)(x-2)+\lambda_5 x(x-1)(x-2)(x-3)=0,$$
en évaluant successivement en 0,1,2,3, on trouve $\lambda_j=0$ pour tout $j\in[\![1,5]\!]$.
La famille est donc libre est c'est bien une base de $\mathbb{R}_4[x]$.
5. Vu la question précédente et comme $x^4\in\mathbb{R}_4[x]$: il existe des réels $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon$ tels que
$$x^4=\alpha x(x-1)(x-2)(x-3)+\beta x(x-1)(x-2)+\gamma x(x-1)+\delta x+\varepsilon$$
En regardant le terme de plus haut degré, on obtient $\alpha=1$. Par linéarité de l'espérance on peut écrire :
$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left({A_n}^4\right)&=\mathbb{E}\left(A_n\left(A_n-1\right)\left(A_n-2\right)\left(A_n-3\right)\right)+\beta\mathbb{E}\left(A_n\left(A_n-1\right)\left(A_n-2\right)\right)+\gamma\mathbb{E}\left(A_n\left(A_n-1\right)\right)+\delta\mathbb{E}\left(A_n\right)+\varepsilon.\\&=G_n^{(4)}(1)+\beta G_n^{(3)}(1)+\gamma G_n''(1)+\delta G_n'(1)+\varepsilon\end{aligned}$$
Puisque $G_n^{(k)}(1)=n(n-1)\cdots(n-k+1)p^k \underset{n\to+\infty}{\sim} n^k p^k$, on en déduit que, au voisinage de $+\infty$:
$$G_n^{(4)}(1)=n^4p^4+\mathrm{o}\left(n^4\right) \quad \text{et} \quad G_n^{(i)}(t)=\mathrm{o}\left(n^4\right) \text{ pour } i\in\{1,2,3\}.$$
Fnalement $\mathbb{E}\left({A_n}^4\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n^4p^4$.
6. La variable Δ_n étant bornée, elle admet une espérance. Par indépendance de A_n et C_n on peut écrire : $\mathbb{E}(\Delta_n)=\mathbb{E}({B_n}^2)-4\mathbb{E}(A_n)\mathbb{E}(C_n)$. Puis : $\mathbb{E}\left({B_n}^2\right)=\mathbb{E}\left(B_n\right)^2+\mathbb{V}\left(B_n\right)=n^2p^2+np(1-p)$.
Ainsi : $\mathbb{E}\left(\Delta_n\right)=np(1-p)-3n^2p^2$, donc $\mathbb{E}\left(\Delta_n\right)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}-\infty$.
7. On a $\mathbb{V}\left({B_n}^2\right)=\mathbb{E}\left({B_n}^4\right)-\mathbb{E}\left({B_n}^2\right)^2$. On sait déjà que, au voisinage de $+\infty$:
$$\mathbb{E}\left({B_n}^2\right)=np(1-p)+n^2p^2=n^2p^2+\mathrm{o}\left(n^2\right)$$
donc $\mathbb{E}\left({B_n}^2\right)^2=n^4p^4+o\left(n^4\right)$.
Comme A_n et B_n suivent la même loi, la question 5 donne, au voisinage de $+\infty$:
$$\mathbb{V}\left({B_n}^2\right)=n^4p^4+o\left(n^4\right)-n^4p^4+o\left(n^4\right)=\mathrm{o}\left(n^4\right).$$
8. Comme $\mathbb{E}\left(\Delta_n\right)<0$ à partir d'un certain rang, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on peut écrire :
$$\mathbb{P}\left(\Delta_n\geqslant 0\right)=\mathbb{P}\left(\Delta_n-\mathbb{E}\left(\Delta_n\right)\geqslant-\mathbb{E}\left(\Delta_n\right)\right)\leqslant\mathbb{P}\left(\left|\Delta_n-\mathbb{E}\left(\Delta_n\right)\right|\geqslant-\mathbb{E}\left(\Delta_n\right)\right)\leqslant\frac{\mathbb{V}\left(\Delta_n\right)}{\mathbb{E}\left(\Delta_n\right)^2}.$$
Or, par indépendance de ${B_n}^2$ et A_nC_n, et de ${A_n}^2$ et ${C_n}^2$:
$$\begin{aligned}\mathbb{V}\left(\Delta_n\right)&=\mathbb{V}\left({B_n}^2-4A_n\mathrm{C}_n\right)=\mathbb{V}\left({B_n}^2\right)+16\mathbb{V}\left(A_n\mathrm{C}_n\right)\\&=\mathrm{o}\left(n^4\right)+16\mathbb{E}\left({A_n}^2\mathrm{C}_n^2\right)-16\mathbb{E}\left(A_n\mathrm{C}_n\right)^2\\&=\mathrm{o}\left(n^4\right)+16\mathbb{E}\left({A_n}^2\right)\mathbb{E}\left(\mathrm{C}_n^2\right)-16\mathbb{E}\left(A_n\right)^2\mathbb{E}\left(\mathrm{C}_n\right)^2\\&=\mathrm{o}\left(n^4\right)+16\left(n^2p^2+\mathrm{o}\left(n^2\right)\right)\left(n^2p^2+\mathrm{o}\left(n^2\right)\right)-16(np)^2(np)^2\\&=o\left(n^4\right).\end{aligned}$$
Ainsi
$$0\leqslant\mathbb{P}\left(\Delta_n\geqslant 0\right)\leqslant\frac{o\left(n^4\right)}{9n^4p^4+o\left(n^4\right)},$$
et on conclut par encadrement.
Ainsi, lorsque $n\to+\infty$, $\mathbb{P}(\Delta_n<0)$ tend vers 1, autrement dit, la probabilité que T_n n'admette aucune racine réelle tend vers 1.

Exercice sans préparation 7

1. Étudier la nature de la série de terme général :

$$u_n = n^\alpha \int_0^{\frac{\pi}{n}} (\sin x)^\beta \, dx \quad \text{avec } \alpha \in \mathbb{R},\ \beta > 0.$$

2. Donner une fonction Python prenant en paramètre β et renvoyant une valeur aprochée de u_1

Solution :

1. On utilise l'encadrement de la fonction sinus pour x assez petit. En effet, nous avons par convexité $\frac{2x}{\pi} \leqslant \sin(x) \leqslant x$ pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ (illustrer d'un dessin). Donc, pour $\beta > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $n \geqslant 2$,

$$0 \leqslant (\frac{x}{2})^\beta \leqslant (\sin x)^\beta \leqslant x^\beta, \quad \text{pour tout } 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{n}.$$

D'où

$$0 \leqslant \frac{1}{2^\beta} \frac{\pi^{\beta+1}}{\beta+1} \frac{1}{n^{\beta+1-\alpha}} \leqslant u_n \leqslant \frac{\pi^{\beta+1}}{\beta+1} \frac{1}{n^{\beta+1-\alpha}},$$

Les résultats sur les séries de Riemman et le critère de comparaison impliquent que la série de terme général u_n est convergente si et seulement si $\beta > \alpha$.

2.

```
import numpy as np

def valeur(beta):
    n=500
    S=0
    for k in range(n):
        S+=np.sin((k*np.pi)/(2*n))**beta
    return np.pi*S/(n*2)
```

SUJET Maths Approfondies 8

Exercice principal 8

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et n un entier supérieur ou égal à 2.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $a_{k,n} = 1 - \left(1 - \dfrac{1}{2^k}\right)^{n-1}$ et pour $k \in \mathbb{N}^*, u_{k,n} = a_{k-1,n} - a_{k,n}$.

Dans $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on admet que l'on définit une variable aléatoire X_n à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ en posant :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}\left(X_n = k\right) = u_{k,n}.$$

1. **Question de cours :** Énoncer la formule de changement de variable dans une intégrale définie sur un intervalle quelconque en précisant les hypothèses.
2. Montrer que X_n admet une espérance et exprimer $\mathbb{E}(X_n)$ en fonction des termes de la suite $(a_{k,n})_{k\in\mathbb{N}}$.
3. Pour tout réel t et pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_0(t) = 0$ et $f_p(t) = 1 - \left(1 - e^{-t}\right)^p$.
   (a) Pour tout $p \in \mathbb{N}$, montrer que l'intégrale $I_p = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_p(t)\mathrm{d}t$ est convergente.
   (b) Montrer que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = I_{n-1}$.
   (c) En déduire que : $\ln(n) \leqslant I_{n-1} \leqslant 1 + \ln(n-1)$.
4. Soit g_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :
$$\forall t \geqslant 0, \quad g_n(t) = 1 - \left(1 - \frac{1}{2^t}\right)^{n-1}.$$
   Montrer que pour tout entier $m \geqslant 2$:
$$\sum_{k=1}^{m} a_{k,n} \leqslant \int_0^m g_n(t)\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=0}^{m-1} a_{k,n}.$$
5. Démontrer que : $\mathbb{E}\left(X_n\right) - 1 \leqslant \dfrac{I_{n-1}}{\ln(2)} \leqslant \mathbb{E}\left(X_n\right)$ et en déduire un équivalent simple de $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_{k,n}$ lorsque n tend vers l'infini.

Solution :

1. Programme de mathématiques approfondies de première année p 19.
2. Soit $N \in \mathbb{N}^*$.
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N} kP\left(X_n = k\right) &= \sum_{k=1}^{N} ku_{k,n} = \sum_{k=1}^{N} k\left(a_{k-1,n} - a_{k,n}\right) = \sum_{k=1}^{N} ka_{k-1,n} - \sum_{k=1}^{N} ka_{k,n}\\ &= \sum_{k=0}^{N-1} (k+1)a_{k,n} - \sum_{k=1}^{N} ka_{k,n} = a_{0,n} + \sum_{k=1}^{N-1} a_{k,n} - Na_{N,n} = \sum_{k=0}^{N-1} a_{k,n} - Na_{N,n}.\end{aligned}$$
   Puisque $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{2^k} = 0, a_{k,n} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{n-1}{2^k}$. La série géométrique de terme général $\dfrac{n-1}{2^k}$ étant convergente, on en déduit par comparaison de séries à termes positifs que la série de terme général $a_{k,n}$ converge.
   Et, $Na_{N,n} \underset{N\to+\infty}{\sim} (n-1)\dfrac{N}{2^N}$, donc $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} Na_{N,n} = 0$ par croissances comparées. On en déduit que la série de terme général $kP\left(X_n = k\right)$, converge et que la variable aléatoire X_n admet une espérance. De plus, $\mathbb{E}\left(X_n\right) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_{k,n}$.

3. (a) La résultat est évident quand $p = 0$.
Soit $p \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_p est continue sur $[0, +\infty[$. De plus, puisque $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-t} = 0$, $f_p(t) \underset{t \to +\infty}{\sim} pe^{-t}$.
Ainsi, $f_p(t) \underset{t \to +\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées. Par comparaison de fonctions positives, on conclut que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_p$ converge. En particulier, l'intégrale I_p est une intégrale convergente.

(b) Soit $p \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} I_{p+1} - I_p &= \int_0^{+\infty} \left(\left(1 - e^{-t}\right)^p - \left(1 - e^{-t}\right)^{p+1}\right) \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \left(1 - e^{-t}\right)^p \left(1 - \left(1 - e^{-t}\right)\right) \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t} \left(1 - e^{-t}\right)^p \mathrm{d}t = \lim_{T \to +\infty} \left[\frac{1}{p+1} \left(1 - e^{-t}\right)^{p+1}\right]_0^T \\ &= \frac{1}{p+1} \left(\lim_{t \to +\infty} \left(1 - e^{-t}\right)^{p+1} - (1-1)^{p+1}\right) \\ &= \frac{1}{p+1}. \end{aligned}$$

Par sommation pour p de 0 à $n-2$ et par télescopage, on obtient : $I_{n-1} - I_0 = \displaystyle\sum_{p=0}^{n-2} \frac{1}{p+1}$ et donc $I_{n-1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$.

(c) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k} \geqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ et pour tout $k \geqslant 2$, $\dfrac{1}{k} \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t}$. En additionnant membre à membre, on obtient

$$I_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln(n)$$

et

$$I_{n-1} = 1 + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n-1} \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t} = 1 + \int_1^{n-1} \frac{\mathrm{d}t}{t} = 1 + \ln(n-1).$$

Donc, $\ln(n) \leqslant I_{n-1} \leqslant 1 + \ln(n-1)$.

4. Soit $m \geqslant 2$. La fonction $t \mapsto 2^{-t}$ est décroissante sur $[0, +\infty[$ puis la fonction $t \mapsto \left(1 - 2^{-t}\right)^{n-1}$ est croissante sur $[0, +\infty[$ et finalement, la fonction g_n est décroissante sur $[0, +\infty[$. Donc,

$$\int_0^m g_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{m-1} \int_k^{k+1} g_n(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=0}^{m-1} \int_k^{k+1} g_n(k)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{m-1} g_n(k) = \sum_{k=0}^{m-1} a_{k,n}$$

et

$$\int_0^m g_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{m} \int_{k-1}^{k} g_n(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \sum_{k=1}^{m} \int_{k-1}^{k} g_n(k)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{m} a_{k,n}.$$

Donc, pour tout $m \geqslant 2$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} a_{k,n} \leqslant \int_0^m g_n(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=0}^{m-1} a_{k,n}$.

5. On remarque que $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_n$ est convergente pour les mêmes raisons que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_{n-1}$ (en remplaçant e par 2).
En passant à la limite quand m tend vers $+\infty$ dans la question précédente, on obtient :

$$\mathbb{E}\left(X_n\right) - 1 = \sum_{k=1}^{+\infty} a_{k,n} \leqslant \int_0^{+\infty} g_n(v)\,\mathrm{d}v \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} a_{k,n} = \mathbb{E}\left(X_n\right).$$

On effectue le changement de variable $u = v\ln(2)$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et strictement monotone, l'intégrale étant convergente, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} g_n(v)\,\mathrm{d}v &= \int_0^{+\infty} \left(1-\left(1-e^{-v\ln(2)}\right)^{n-1}\right)\,\mathrm{d}v = \int_0^{+\infty} \left(1-\left(1-e^{-u}\right)^{n-1}\right)\frac{\mathrm{d}u}{\ln(2)}\\ &= \frac{1}{\ln(2)}\int_0^{+\infty} f_{n-1}(u)\,\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

Ainsi : $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(v)\,\mathrm{d}v = \frac{I_{n-1}}{\ln(2)}$ et, pour tout $n \geqslant 2$: $\mathbb{E}\left(X_n\right) - 1 \leqslant \dfrac{I_{n-1}}{\ln(2)} \leqslant \mathbb{E}\left(X_n\right)$.
Puis, pour $n \geqslant 2$, d'après les questions 2 et 3b :

$$\frac{\ln(n)}{\ln(2)} \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} a_{k,n} \leqslant \frac{\ln(n-1)}{\ln(2)} + 1 + \frac{1}{\ln(2)}.$$

On conclut alors, quitte à diviser par $\ln(n)$ et utiliser le théorème d'encadrement, que :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_{k,n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{\ln(2)}.$$

Exercice sans préparation 8

Soit δ une application linéaire de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ qui vérifie :

$$\text{Pour tout } (f,g) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \times \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}), \quad \delta(fg) = f\delta(g) + g\delta(f)\,.$$

(a) Montrer que δ s'annule sur les fonctions constantes.

(b) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\text{Pour tout } (f,g) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \times \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}), \quad \delta\Big(f'(\alpha)g - g'(\alpha)f\Big)(\alpha) = 0\,.$$

Ind :Utiliser le Lemme d'Hadamard :
Soit $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $\varphi(\alpha) = \varphi'(\alpha) = 0$ alors il existe une fonction $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $\varphi(x) = (x-\alpha)^2\psi(x)$.

(c) En déduire qu'il existe une fonction $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que

$$\text{Pour tout } f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}), \quad \delta(f) = uf'\,.$$

Solution :
On notera $\mathbf{C}$ pour la fonction constante de valeur c, et P_1 pour la fonction $x \longmapsto x$.

(a) On a

$$\delta(\mathbf{1}) = \delta(\mathbf{1}\cdot\mathbf{1}) = \mathbf{1}\delta(\mathbf{1}) + \mathbf{1}\delta(\mathbf{1}) = 2\delta(\mathbf{1})$$

donc $\delta(\mathbf{1}) = 0$, et par linéarité $\delta(\mathbf{C}) = 0$ pour tout fonction constante $\mathbf{C}$.

(b) Pour le voir on pose :

$$h(x) := f'(\alpha)g(x) - g'(\alpha)f(x) \quad \text{et} \quad \varphi(x) = h(x) - h(\alpha)\,.$$

Alors, $\varphi(\alpha) = \varphi'(\alpha) = 0$, donc il existe une fonction $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $\varphi(x) = (x-\alpha)^2\psi(x)$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\delta(\varphi)(\alpha) &= \delta\Big((x-\alpha\mathbf{1})^2\psi\Big)(\alpha)\\
&= (x-\alpha\mathbf{1})^2(\alpha)\delta(\psi)(\alpha) + \psi(\alpha)\delta\big((x-\alpha\mathbf{1})^2\big)(\alpha)\\
&= 2((x-\alpha\mathbf{1})(\alpha)\delta\big(x-\alpha\mathbf{1}\big)(\alpha)\psi(\alpha) = 0\,.
\end{aligned}$$

On en déduit, par linéarité, $\delta(h)(\alpha) = \delta(h - h(\alpha))(\alpha) = \delta(\varphi)(\alpha) = 0$. C'est à dire $\delta\big(f'(\alpha)g - g'(\alpha)f\big)(\alpha) = 0$.

(c) On déduit de l'étape précédente que

$$\text{Pour tout } \alpha \in \mathbb{R}, \quad \delta\Big(f'(\alpha)\exp - \exp(\alpha)f\Big)(\alpha) = 0\,,$$

donc par linéarité de δ, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\delta(f)(\alpha) = \exp(-\alpha)\delta(\exp)(\alpha)f'(\alpha)$. Ce qui est bien le résultat annoncé, avec $u = \exp(-\cdot)\delta(\exp) \in \mathcal{C}^\infty$.

SUJET Maths Approfondies 9

Exercice principal 9

Soit n un entier naturel non nul.

On définit, dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, deux variables aléatoires X et Y prenant leurs valeurs dans $[\![1, n+1]\!]$. On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall (i,j) \in [\![1, n+1]\!]^2, \quad p_{i,j} = \mathbb{P}([X=i] \cap [Y=j]) = \alpha \binom{n}{i-1} \binom{n}{j-1}.$$

1. **Question de cours :** Rappeler la définition de l'indépendance de deux variables aléatoires discrètes.
2. Déterminer la valeur du réel α.
3. À l'aide de la variable aléatoire $Z = X - 1$, déterminer l'espérance et la variance de la variable aléatoire X.

   On note $B \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice dont le coefficient à la i-ème ligne et à la j-ème colonne vaut :
   $$b_{ij} = \mathbb{P}_{[X=j]}([Y=i]).$$
4. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
   Calculer la valeur de b_{ij} pour tout $(i,j) \in [\![1, n+1]\!]^2$.
5. Ecrire une fonction Python qui prend en argument un entier n et renvoie la matrice B.
6. Montrer que B est la matrice d'un projecteur et déterminer son rang.
7. Justifier que B est diagonalisable et déterminer une matrice $P \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ inversible et une matrice $D \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $B = PDP^{-1}$.

Solution :

1. Programme de mathématiques approfondies première année - p 22.
2. Pour que la famille $(p_{i,j})_{(i,j) \in [\![1,n+1]\!]^2}$ définisse la loi conjointe de deux variables aléatoires X et Y, il suffit de vérifier que $p_{i,j}$ est positif pour tout $(i,j) \in [\![1, n+1]\!]^2$, et que : $\displaystyle\sum_{(i,j) \in [\![1,n+1]\!]^2} p_{i,j} = 1$. Ici :
   $$\sum_{(i,j) \in [\![1,n+1]\!]^2} p_{i,j} = \alpha \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{i-1} \binom{n}{j-1} = \alpha \sum_{i'=0}^{n} \binom{n}{i'} \sum_{j'=0}^{n} \binom{n}{j'}.$$
   Pour calculer ces deux sommes on utilise la formule du binôme de Newton. On obtient :
   $$\sum_{(i,j) \in [\![1,n+1]\!]^2} p_{i,j} = \alpha (2^n)^2 = \alpha 4^n.$$
   On en déduit : $\displaystyle\sum_{(i,j) \in [\![1,n+1]\!]^2} p_{i,j} = 1 \iff \alpha = \frac{1}{4^n}$.

   Et pour cette valeur de α, on a bien $p_{i,j} \geqslant 0$ pour tout $(i,j) \in [\![1, n+1]\!]^2$. Ainsi $\alpha = \dfrac{1}{4^n}$.
3. On a : $Z(\Omega) = [\![0, n]\!]$, et pour tout $k \in Z(\Omega)$:
   $$\mathbb{P}(Z = k) = \mathbb{P}(X = k+1).$$
   La famille $((Y = j))_{j \in [\![1,n+1]\!]}$ est un système complet d'évènements. Par la formule des probabilités totales, on a donc :
   $$\mathbb{P}(X = k+1) = \sum_{j=1}^{n+1} \mathbb{P}\left((X = k+1) \cap (Y = j)\right) = \frac{1}{4^n} \binom{n}{k} \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1}$$
   $$= \frac{1}{4^n} \binom{n}{k} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} = \frac{1}{2^n} \binom{n}{k}.$$

On reconnaît une loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$. Ainsi : $\mathbb{E}(Z) = \frac{n}{2}$ et $\mathbb{V}(Z) = n \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{n}{4}$. Or $X = Z + 1$, donc par linéarité de l'espérance : $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Z) + 1 = \frac{n}{2} + 1$, et $\mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(Z+1) = \mathbb{V}(Z) = \frac{n}{4}$.

4. Soit $(i,j) \in [\![1, n+1]\!]^2$. Notons que la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{(X=j)}(Y = i)$ existe bien car $\mathbb{P}(X = j) > 0$ pour tout $j \in [\![1, n+1]\!]$, d'après la loi de X trouvée à la question 3.
Puis, par un raisonnement analogue à celui fait pour déterminer la loi de X, on obtient : $\forall j \in [\![1, n+1]\!]$, $\mathbb{P}(Y = j) = \frac{1}{2^n}\binom{n}{j-1}$. Puis, pour $(i,j) \in [\![1, n+1]\!]^2$:
$$\mathbb{P}(X = i)\mathbb{P}(Y = j) = \frac{1}{2^n}\binom{n}{i-1} \times \frac{1}{2^n}\binom{n}{j-1} = \frac{1}{4^n}\binom{n}{i-1}\binom{n}{j-1} = \mathbb{P}((X = i) \cap (Y = j)).$$
Ceci montre que les deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes.
On peut donc écrire :
$$b_{i,j} = \mathbb{P}_{(X=j)}(Y = i) = \mathbb{P}(Y = i) = \frac{1}{2^n}\binom{n}{i-1}.$$

5.
```python
import numpy as np

def SimulationB(n):
        B = np.zeros((n+1,n+1))
        for i in range(n+1):
                B[i,:] = np.prod(range(1,n+1))/2**n/np.prod(range(1,i+1))
                                                          /np.prod(range(1,n-i+1))
        return B
```

6. On a, d'après la question précédente :
$$B = ((\mathbb{P}(Y = i)))_{1 \leqslant i,j \leqslant n+1} = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(Y=1) & \mathbb{P}(Y=1) & \cdots & \mathbb{P}(Y=1) \\ \mathbb{P}(Y=2) & \mathbb{P}(Y=2) & \cdots & \mathbb{P}(Y=2) \\ \vdots & & & \vdots \\ \mathbb{P}(Y=n+1) & \mathbb{P}(Y=n+1) & \cdots & \mathbb{P}(Y=n+1) \end{pmatrix}.$$
Toutes les colonnes de B sont identiques et la première colonne n'est pas nulle puisque $\sum_{i=1}^{n+1} P(Y = i) = 1$.
Ainsi : B est de rang 1.

7. En posant $C = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(Y=1) \\ \mathbb{P}(Y=2) \\ \vdots \\ \mathbb{P}(Y=n+1) \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$. Par calcul matriciel $B = CL$.
On a alors $B^2 = (CL)(CL) = C(LC)L$. Or :
$$LC = \sum_{i=1}^{n+1} \mathbb{P}(Y = i) = 1$$
puisque la famille $((Y = i))_{i \in [\![1,n+1]\!]}$ est un système complet d'évènements.
Finalement $B^2 = B$ et on conclut que B est la matrice d'un projecteur.

8. La question précédente permet d'écrire $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \text{Im}(B) \bigoplus \text{Ker}(B)$. Dans une base adaptée à cette décomposition, la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à B est diagonale. Pour construire P, on peut utiliser des bases de $\text{Im}(B)$ et $\text{Ker}(B)$ obtenues en utilisant :
$$\text{Im}(B) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} \mathbb{P}(Y=1) \\ \mathbb{P}(Y=2) \\ \mathbb{P}(Y=3) \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathbb{P}(Y=n+1) \end{pmatrix}\right), \quad \text{Ker}(B) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Exercice sans préparation 9

Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \sin u_n \quad \text{et la condition initiale} \quad u_0 = \alpha \in]0,1[\,.$$

1. Déterminer la nature de la série de terme général v_n, où $v_n = u_n - u_{n+1}$.
2. En déduire la nature de la série de terme général u_n^3.
3. Quelle est la nature de la série de terme général u_n^2 ? En déduire la nature de la série de terme général u_n.

Solution :

1. La série de terme général v_n est une série télescopique . Elle a même nature que (u_n).
   Par une simple récurrence, on montre que $u_n \in]0,1[$ puis $u_{n+1} - u_n = (\sin u_n) - u_n < 0$ donc la suite est strictement décroissante. La suite $(u_n)_n$ est décroissante, minorée par 0 donc convergente et sa limite $l \geqslant 0$ (par analyse de fonction, $f(x) = \sin(x) - x$ est négative et strictement décroissante sur $[0,1]$).
   Maintenant la continuité de la fonction sinus permet de conclure $(\sin l = l))$ et on conclut que $l = 0$.

   Donc la série de terme général v_n est convergente.
2. On commence par faire un développement limité de la fonction sinus en 0 jusqu'à l'ordre 3 :
   $$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x), \quad \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0.$$
   Donc, pour tout n entier,
   $$v_n = u_n - u_{n+1} = u_n - \sin u_n = \frac{1}{6}u_n^3(1+f(n)) \quad \text{avec} \quad \lim_{n\to+\infty} f(n) = 0.$$
   On conclut que $0 \leqslant u_n^3 \underset{+\infty}{\sim} 6v_n$ d'où les séries de terme général u_n^3 et v_n sont de même nature. Or $\sum v_n$ converge donc la série de terme général u_n^3 converge.
3. La série de terme général w_n, où $w_n = \ln(u_n) - \ln(u_{n+1})$, est une série télescopique, on commence par calculer la suite des sommes partielles, pour tout $p \in \mathbb{N}$:
   $$S_p = \sum_{n=0}^{p} w_n = \sum_{n=0}^{p} \ln(u_n) - \ln(u_{n+1}) = \ln(u_0) - \ln(u_{p+1}) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$
   Donc la série de terme général w_n est divergente.
   On commence par faire un développement limité de la fonction ln en 0 jusqu'à l'ordre 2 :
   $$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x), \quad \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0.$$
   Donc, pour tout n entier,
   $$\begin{aligned} w_n = \ln(\frac{u_n}{u_{n+1}}) &= \ln\left(\frac{u_n}{\sin u_n}\right) = \ln\left(\frac{1}{1-\frac{1}{6}u_n^2 + o(u_n^2)}\right) \\ &= \ln\left(1 + \frac{1}{6}u_n^2 + o(u_n^2)\right) = \frac{1}{6}u_n^2 + o(u_n^2). \end{aligned}$$
   On conclut que $0 \leqslant u_n^2 \underset{+\infty}{\sim} 6w_n$ d'où les séries de terme général u_n^2 et w_n sont de même nature. Or $\sum w_n$ diverge donc la série de terme général u_n^2 diverge.
   Par minoration, on sait que $0 \leqslant u_n^2 \leqslant u_n$ car $0 < u_n < 1$. Or la série de terme général u_n^2 diverge donc la série de terme général u_n diverge.

SUJET Maths Approfondies 10

Exercice principal 10

Soit n un entier naturel non nul.
Dans la suite, I_n désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et ${}^tA$ désigne la transposée d'une matrice A.
On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique, noté $\langle\cdot;\ \cdot\rangle$, défini par :

$$\forall (U,V) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2, \qquad \langle U;\ V\rangle =^t UV.$$

Soient $O \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice vérifiant l'égalité ${}^tOO = I_n$ et $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.

On définit $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$ et $Y = OX = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}$, ainsi que les variables aléatoires suivantes :

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \quad \text{et} \quad {S_n}^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(X_k - \overline{X}\right)^2.$$

1. **Question de cours :** Somme de deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois normales de paramètres distincts.
2. Montrer que, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, X_k et Y_k ont même loi.

Dans la suite, on admet que les variables aléatoires $Y_1, \ldots, Y_n$ sont mutuellement indépendantes et on choisit la matrice O dont tous les coefficients de la dernière ligne sont égaux à $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

3. Vérifier que : ${S_n}^2 = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} Y_k^2$.
4. Déduire de ce qui précède que $\overline{X}$ et ${S_n}^2$ sont indépendantes.
5. (a) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{t(x-t)}}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut π.
   (b) Déterminer la loi de ${X_1}^2 + {X_2}^2$.
   (c) En déduire la loi de ${S_{2n+1}}^2$.

Solution :

1. Programme de mathématiques approfondies deuxième année p 16.
2. On note C_k la k-ième colonne de O pour $k \in [\![1,n]\!]$. Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, le coefficient à la ligne i colonne j de la matrice ${}^tOO$ vaut ${}^tC_iC_j = \langle C_i;\ C_j\rangle$. Cette matrice étant égale à l'identité, la famille $(C_1, \ldots, C_n)$ ne contient pas le vecteur nul et est orthonormale, donc elle est libre. Puisqu'elle est formée de n vecteurs, on conclut que c'est une base orthonormale de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
3. Soit $i \in [\![1,n]\!]$. Par calcul matriciel, $Y_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} O_{i,j}X_j$ et, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, la variable aléatoire $O_{i,j}X_j$ suit une loi $\mathcal{N}(0, {O_{i,j}}^2)$ par transformation affine. Puis, les variables aléatoires X_j sont mutuellement indépendantes donc les variables $O_{i,j}X_j$ le sont aussi et par stabilité de la loi normale pour la somme, on conclut : $Y_i \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0, \displaystyle\sum_{j=1}^{n} {O_{i,j}}^2\right) = \mathcal{N}(0,1)$, puisque $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} {O_{i,j}}^2 = 1$ puisque O est inversible d'inverse $O^{-1} =^t O$, donc on a aussi $O^tO = I_n$. X et Y suivent donc la même loi.

4. Par calcul :
$$\sum_{k=1}^{n}\left(X_k-\overline{X}\right)^2=\sum_{k=1}^{n}\left(X_k^2-2\overline{X}X_k+\overline{X}^2\right)=\sum_{k=1}^{n}X_k^2-n\overline{X}^2.$$
Le choix fait sur O implique : $Y_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}X_k=\sqrt{n}\,\overline{X}$.

Enfin, on remarque que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}Y_k^2={}^tYY={}^tX{}^tOOX={}^tXX=\sum_{k=1}^{n}X_k^2$.

Finalement : ${S_n}^2=\dfrac{1}{n}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}X_k^2-n\overline{X}^2\right)=\dfrac{1}{n}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}Y_k^2-Y_n^2\right)=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}Y_k^2$.

5. Avec les questions précédentes et le fait que les variables Y_k soient indépendantes pour $k\in[\![1,n]\!]$, on obtient : $\overline{X}=\dfrac{1}{\sqrt{n}}Y_n$ est indépendante de $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}Y_k^2={S_n}^2$.

6. (a) $\dfrac{1}{\sqrt{t(x-t)}}\underset{t\to0^+}{\sim}\dfrac{1}{\sqrt{xt}}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{t(x-t)}}\underset{t\to x^-}{\sim}\dfrac{1}{\sqrt{x(x-t)}}$, donc, par comparaison à une intégrale de Riemann, les fonctions étant positives, on conclut que l'intégrale converge.

À l'aide du changement de variable $t=\dfrac{x}{2}(1+\cos(u))$, qui est de classe $\mathcal{C}^1$ de $]0,\pi[$ dans $]0,x[$ et strictement monotone, on obtient : $\displaystyle\int_0^x\frac{1}{\sqrt{t(x-t)}}\,\mathrm{d}t=\int_0^\pi 1\,\mathrm{d}u=\pi$.

(b) Déterminons la loi de X^2 où X suit une loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Si $x\geqslant0$: $F_{X^2}(x)=\Phi(\sqrt{x})-\Phi(-\sqrt{x})=2\Phi(\sqrt{x})-1$.

Si $x<0$, $F_{X^2}(x)=0$.

Ainsi, la fonction F_{X^2} est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0. On conclut que X^2 est une variable aléatoire à densité et une densité est $f_{X^2}(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\leqslant0\\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi x}}e^{-\frac{x}{2}} & \text{et } x>0\end{cases}$.

Comme la fonction $x\mapsto\displaystyle\int_0^x\frac{1}{\sqrt{t}\sqrt{x-t}}\,\mathrm{d}t$ est définie et constante, on conclut que $h:x\mapsto\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f_{{X_1}^2}(t)f_{{X_2}^2}(x-t)\,\mathrm{d}t$ existe et est continue sauf éventuellement en 0.

Ainsi, ${X_1}^2+{X_2}^2$ est une variable aléatoire à densité dont une densité est $x\mapsto\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ \dfrac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} & \text{si } x\geqslant0\end{cases}$. On reconnait : ${X_1}^2+{X_2}^2\sim\mathcal{E}\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

(c) Comme Y a même loi que X, de l'égalité $n{S_n}^2=\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}Y_k^2$ on déduit que $(2n+1){S_{2n+1}}^2$ a même loi que $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}X_k^2$. Pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, on pose $Z_k=X_{2k-1}+X_{2k}$ de sorte que $(2n+1){S_{2n+1}}^2$ a même loi que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}Z_k$. Par la question précédente, $Z_k\sim\mathcal{E}\left(\dfrac{1}{2}\right)$ donc $2Z_k\sim\mathcal{E}(1)$ et par indépendance des Z_k on obtient : $2(2n+1){S_{2n+1}}^2\sim\gamma(n)$. Par transformation affine, ${S_{2n+1}}^2$ est une variable à densité dont une densité est : $x\mapsto\begin{cases}0 & \text{si } x\leqslant0\\ \dfrac{2^n(2n+1)^n}{(n-1)!}x^{n-1}e^{-2(2n+1)x} & \text{si } x>0\end{cases}$.

Exercice sans préparation 10

On considère l'intégrale
$$I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(x))dx.$$

1. Justifier l'existence de I.
2. Ecrire un code Python qui renvoie une approximation de I à l'aide de sommes de Riemann.
3. Calculer I.

Solution :

1. $\ln\sin(x)$ est équivalent à $\ln(x)$ en 0 et $\ln(x)$ est intégrable en 0 car une primitive est $x\ln(x) - x$.

2.
```
import numpy as np
def f(x):
    return np.log(np.sin(x))
# Parametres
a = 0                  # Borne inf
b = np.pi / 2          # Borne sup
n = 10000              # Nombre de sous-intervalles
delta = (b - a) / n    # Largeur de chaque sous-intervalle
# Somme de Riemann
riemann_sum = sum(f(a + i *delta) * delta for i in range(1, n + 1))
print(f"Approximation de l'integrale par la somme de Riemann : {riemann_sum}")
```

   Approximation de l'integrale par la somme de Riemann : -1.087960787406043

3. On remarque d'abord que $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\cos(x))dx$ puis :

$$2I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(x))dx + \int_0^{\pi/2} \ln(\cos(x))dx = \int_0^{\pi/2} \left[\ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln(\sin(2x))\right] dx$$

$$2I = \int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{1}{2}\right) dx + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin(u))du = \int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{1}{2}\right) dx + \frac{1}{2}\left[\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(u))du + \int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin(u))du\right]$$

$$2I = \frac{\pi}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left[\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(u))du + \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(u))du\right] = \frac{\pi}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right) + I$$

   Donc $I = -\dfrac{\pi}{2}\ln 2$

SUJET Maths Approfondies 11

Exercice principal 11

1. **Question de cours :** Inégalité de Cauchy-Schwarz.
2. Soient n un entier naturel non nul, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ n nombres réels et $b_1, b_2, \ldots, b_n$ n nombres réels strictement positifs. Montrer que :
$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{b_n} \geqslant \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}.$$
3. Soient $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ un ensemble fini et $\mathbb{P}$ une loi de probabilité sur Ω. Soient X et Y deux variables aléatoires sur Ω, on suppose Y strictement positive. Montrer que
$$\mathbb{E}\left(\frac{X^2}{Y}\right) \geqslant \frac{\mathbb{E}(|X|)^2}{\mathbb{E}(Y)} \geqslant \frac{\mathbb{E}(X)^2}{\mathbb{E}(Y)}.$$
4. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^1$ convexe.
   (a) On fixe $t_0 \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une fonction affine a telle que $a(t) \leqslant \varphi(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $\varphi(t_0) = a(t_0)$.
   (b) Soit Z une variable aléatoire à densité d'espérance $\mathbb{E}(Z)$ finie et telle que $\phi(Z)$ admet une espérance finie. Montrer que
$$\varphi(\mathbb{E}(Z)) \leqslant \mathbb{E}(\varphi(Z)).$$
5. Soient I un intervalle ouvert contenant 0 et $g : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On pose pour $x \in I$:
$$G(x) = \int_0^1 2(1-t)g''(tx)dt.$$
   (a) Montrer que pour tout $x \in I$:
$$g(x) - g(0) - xg'(0) = \frac{1}{2}x^2 G(x).$$
   (b) On suppose que g'' est convexe. Montrer que $G(x) \geqslant g''(x/3)$
   (c) Montrer que pour tout $x \in]-1, +\infty[$, on a
$$(1+x)\ln(1+x) - x \geqslant \frac{x^2}{2(1+x/3)}.$$

Solution :

1. **Question de cours :** Inégalité de Cauchy-Schwarz. ECG2, p18.
2. On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux vecteurs $v = (\frac{a_i}{\sqrt{b_i}})$ et $w = (\sqrt{b_i})$.
3. On applique l'inégalité de la question 2 avec $a_i = X(\omega_i)\mathbb{P}(\omega_i)$ et $b_i = Y(\omega_i)\mathbb{P}(\omega_i)$.
4. (a) On prend $y = a(t)$ la tangente de φ en t_0.
   (b) Si $t_0 = \mathbb{E}(Z)$, on a :
$$\varphi(\mathbb{E}(Z)) = \varphi(t_0) = a(t_0) = a(\int t d\mathbb{P}_Z) = \int a(t)d\mathbb{P}_Z \leqslant \int \varphi(t)d\mathbb{P}_Z = \mathbb{E}(\varphi(Z))$$
5. (a) un changement de variable linéaire donne $G(x) = \int_0^x 2(1-\frac{u}{x})g"(u)\frac{\mathrm{d}u}{x}$ donc en faisant une ipp
$$\frac{x^2}{2}G(x) = \int_0^x (x-u)g"(u)\,\mathrm{d}u = [(x-u)g'(u)]_0^x + \int_0^x g'(u)\,\mathrm{d}u = g(x) - g(0) - xg'(0)$$

(b) On remarque que $2(1-t)$ est une densité d'une variable aléatoire T sur $[0,1]$ avec $\mathbb{E}(T) = 1/3$. On applique 4(b) à la fonction $f(t) = g''(xt)$ qui est convexe :

$$G(x) = \mathbb{E}(g''(xT)) \geqslant g''(x\mathbb{E}(T)) = g''(x/3)$$

(c) Résulte de 5(b) avec $g(x) = (1+x)\ln(1+x) - x$.

Exercice sans préparation 11

Justifier l'existence et déterminer

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\left[\int_{-1}^{1}\left(\exp(t)-(a+bt)\right)^2\,\mathrm{d}t\right].$$

Solution :

1. L'intégrale d'un produit de fonctions continues sur $[-1;+1]$ existe sur ce même segment et par conséquent la quantité $(.|.)$ est bien définie.
   (a) la symétrie provient de la commutativité de la multiplication dans $\mathbb{R}$.
   (b) la linéarité par rapport à la première variable découle essentiellement de la linéarité du passage à la limité (et de la distributivité de la multiplication sur l'addition).
   (c) Si $f\in E$, alors $f^2\geqslant 0$ et donc $(f|f)\geqslant 0$. Si cette quantité est nulle, f^2 est une fonction continue positive sur $[-1;+1]$ d'intégrale nulle sur ce même segement et est donc nulle sur $[-1;+1]$. f l'est donc aussi. Ceci nous donne le caractère défini positif.

   $(.|.)$ est un produit scalaire.
2. Il est évident que $(u|v)=0$ par un calcul direct. Il reste donc à normer les deux vecteurs u et v pour obtenir une base orthonormée. Ainsi $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}u;\sqrt{\frac{3}{2}}v\right)$ est une b.o.n. de F.
3. D'après les règles de calcul en base orthogonale, et en notant p la projection orthogonale sur F,

   $$p(w)=\frac{(w|u)}{||u||^2}u+\frac{(w|v)}{||v||^2}v.$$

   Une intégration par parties donne, en posant, $I_n=\displaystyle\int_{-1}^{1}t^n\exp(t)dt$,

   $$I_n=\exp(1)-\frac{(-1)^n}{\exp(1)}-nI_{n-1}.$$

   On en déduit que :

   $$I_0=\exp(1)-\frac{1}{\exp(1)},\quad I_1=\frac{2}{\exp(1)},\quad I_2=\exp(1)-\frac{5}{\exp(1)}$$

   et ainsi

   $$p(w)=\frac{\exp(1)+\exp(-1)}{2}u+\frac{3}{\exp(1)}w.$$

   On remarque que :

   $$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\left[\int_{-1}^{1}\left(\exp(t)-(a+bt)\right)^2\right]dt=\inf_{f\in F}||w-f||^2=d(w,F)^2.$$

   D'après le cours cette distance est atteinte pour $f=p(w)$ et vaut donc $||w-p(w)||^2$. En écrivant que $w=(w-p(w))+p(w)$ et en remarquant que $w-p(w)$ et $p(w)$ sont orthogonaux, on a alors par Pythagore :

   $$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\left[\int_{-1}^{1}\left(\exp(t)-(a+bt)\right)^2\right]dt=||w||^2-||p(w)||^2=\frac{\exp(2)-\exp(-2)}{2}-\frac{(w|u)^2}{||u||^2}-\frac{(w|v)^2}{||v||^2}.$$

   un calcul permet de simplifier cette expression et d'obtenir :

   $$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\left[\int_{-1}^{1}\left(\exp(t)-(a+bt)\right)^2\right]dt=1-\frac{7}{\exp(1)^2}.$$

SUJET Maths Approfondies 12

Exercice principal 12

Dans cet exercice, on fixe un entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$\mathcal{Q} = \{\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n) \in (\mathbb{R}_+)^n, \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1\}, \quad \text{et} \quad H : \mathcal{Q} \to \mathbb{R},\ H(\mathbf{p}) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \ln p_i$$

Avec la convention $0 \ln 0 = 0$.
On se donne un ensemble fini $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ et pour chaque $\mathbf{p} \in \mathcal{Q}$, on note $(\Omega, \mathbb{P}_{\mathbf{p}})$ l'espace de probabilité défini par $\mathbb{P}_{\mathbf{p}}(\omega_i) = p_i$ pour $i \in [\![1; n]\!]$.
On note $\mathcal{X} = \{X : \Omega \to \mathbb{R}\}$. Pour chaque $X, Y \in \mathcal{X}$, on pose :

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^{n} X(\omega_i) Y(\omega_i)$$

Si $X \in \mathcal{X}$ et $\mathbf{p} \in \mathcal{Q}$, on note $\mathbb{E}_{\mathbf{p}}(X)$ l'ésperance de X relativement à l'espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P}_{\mathbf{p}})$.
On notera $\mathbf{u} = \left(\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right)$.

1. **Question de cours :** Extrema sur un ensemble fermé borné.
2. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire qui fait de $\mathcal{X}$ un espace euclidien. Expliciter une base orthonormée de $\mathcal{X}$.
3. Notons pour $t \in \mathbb{R}_+$, $\phi(t) = -t \ln t$ si $t > 0$ et $\phi(0) = 0$. On fixe $a, b \in \mathbb{R}_+$, $a < b$, montrer qu'il existe $\epsilon \in]0, b]$ tel que
$$\phi(a + t) + \phi(b - t) > \phi(a) + \phi(b)$$
pour tout $t \in]0, \epsilon]$.
4. Déterminer $H(\mathcal{Q})$ l'image de $\mathcal{Q}$ par H.
5. On pose pour $X \in \mathcal{X}$
$$\varphi_X : \mathcal{Q} \to \mathbb{R}, \quad \varphi_X(\mathbf{p}) = H(\mathbf{p}) + \mathbb{E}_{\mathbf{p}}(X)$$
On note $\mathcal{Q}_X$ le sous ensemble de $\mathcal{Q}$ constitué des $\mathbf{p}$ tel que $\mathbf{p}$ est un maximum global de φ_X.
   (a) Justifier que $\mathcal{Q}_X$ est non vide.
   (b) Montrer que pour tout $\mathbf{p} \in \mathcal{Q}_X$, on a $\mathbf{p} \in (\mathbb{R}_+^*)^n$.
6. On fixe $X \in \mathcal{X}$ et $\mathbf{p} \in \mathcal{Q}_X$. Soit $\mathcal{Y} = \{Y \in \mathcal{X}$ tel que $\mathbb{E}_{\mathbf{u}}(Y) = 0\}$. Pour $Y \in \mathcal{Y}$, on considère
$$\mathfrak{t} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, \quad \mathfrak{t}(s) = \mathbf{p} + sy$$
où $y = (Y(\omega_1), \ldots, Y(\omega_n)) \in \mathbb{R}^n$.
   (a) Montrer que $\mathcal{Y}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{X}$ dont on déterminera la dimension.
   (b) Montrer qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que $\mathfrak{t}(s) \in \mathcal{Q}$ pour tout $s \in]-\epsilon, \epsilon[$.
   (c) Calculer $\mathfrak{t}'(0)$.

Solution :

1. **Question de cours :** Extrema sur un ensemble fermé borné. ECG2, p19.
2. Les fonctions indicatrices $(\mathbf{1}_{\{\omega_i\}})$ forment une base orthonormée.

3. La fonction $f(t) = \phi(a+t) + \phi(b-t)$ est dérivable sur $]0, b[$ et $f'(t) = -\ln(a+t) + \ln(b-t)$. Pour $\epsilon < \dfrac{b-a}{2}$, on a $(b-t) - (a+t) = b - a - 2t > 0$ si $t \in]0, \epsilon]$. Donc $\ln(b-t) > \ln(a+t)$ et $f'(t) > 0$. On en déduit que $f(t) = \phi(a+t) + \phi(b-t) > f(0) = \phi(a) + \phi(b)$ pour $t \in]0, \epsilon]$.
4. On a clairement $H(\mathbf{p}) \geqslant 0$ et $H(\mathbf{u}) = \ln(n)$. Par concavité de la fonction ln, on a

$$H(\mathbf{p}) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \ln p_i = \sum_{i=1}^{n} p_i \ln\left(\frac{1}{p_i}\right) \leqslant \ln\left(\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{1}{p_i}\right) = \ln(n)$$

Donc l'image de H est inclus dans $[0, \ln(n)]$.

5. (a) $\mathcal{Q}$ est borné fermé et H est continue, donc il existe des extremas globaux.
   (b) Supposons $p_1 = 0$ et $p_2 > 0$. Soient $\mathfrak{q}(t) = (t, p_2 - t, p_3, \ldots, p_n)$ et $g(t) = \varphi_X(\mathfrak{q}(t))$ pour $t \in]0, p_2[$. On a :

$$g(t) = \phi(t) + \phi(p_2 - t) + X(\omega_1)t + X(\omega_2)(p_2 - t) + \sum_{i=3}^{n} \ldots$$

$$g'(t) = -\ln(t) + \ln(p_2 - t) + X(\omega_1) - X(\omega_2)$$

   On voit que $g'(t) \to +\infty$ quand $t \to 0$, donc $g'(t) > 0$ sur $]0, \epsilon[$ pour ϵ assez petit. On en déduit que

$$\varphi_X(\mathbf{p}) = g(0) < g(\epsilon) = \varphi_X(\mathfrak{q}(\epsilon))$$

   ce qui contredit la maximalité en $\mathbf{p}$.

6. (a) Comme noyau d'une forme linéaire, $\mathcal{Y}$ est de dimension $n - 1$.
   (b) On a clairement $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(p_i + sY(\omega_i)) = \sum_i p_i + ns\mathbb{E}_{\mathbf{u}}(Y) = 1 + 0 = 1$. Il suffit juste de s'assurer que $p_i + sY(\omega_i) \geqslant 0$ pour tout i, ce qui est le cas si $s \in]-\epsilon, \epsilon[$ avec ϵ est assez petit.
   (c) $\mathfrak{t}'(0) = y$

Exercice sans préparation 12

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, A et B deux événements. Montrer que :

$$|\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)| \leqslant \frac{1}{4}.$$

Solution :

Si A est un événement, on sait que sa fonction indicatrice $\mathbf{1}_A$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(A)$, et de variance $f(\mathbb{P}(A))$ où f désigne la fonction $x \mapsto x(1-x)$. Alors

$$\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_A \mathbf{1}_B) - \mathbb{E}(\mathbf{1}_A)\mathbb{E}(\mathbf{1}_B) = cov(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B).$$

En notant ρ le coefficient de corrélation linéaire, on obtient : $|\rho(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B)| \leqslant 1$, ce qui se réécrit :
$|cov(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B)| \leqslant \sqrt{\mathbb{V}(\mathbf{1}_A)}\sqrt{\mathbb{V}(\mathbf{1}_B)} = \sqrt{f(\mathbb{P}(A))f(\mathbb{P}(B))}$. Comme $0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{4}$ sur le segment $[0,1]$, on a bien

$$|\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)| \leqslant \frac{1}{4}.$$

Question supplémentaire : Cette inégalité est-elle optimale ?
La valeur $\frac{1}{4}$ est optimale : il suffit de prendre $A = B$ de probabilité $\frac{1}{2}$ pour réaliser l'égalité.

SUJET Maths Approfondies 13

Exercice principal 13

Une secrétaire effectue n appels téléphoniques vers n personnes distinctes ($n \geqslant 2$). Nous admettons que les n appels constituent n expériences indépendantes, et que pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est $p \in]0,1[$. Nous noterons $q = 1-p$. On note X la variable aléatoire égale au nombre de personnes obtenues au téléphone.
Ayant obtenu k personnes, la secrétaire rappelle une deuxième fois, dans les mêmes conditions, chacune des $n-k$ personnes qu'elle n'a pas réussi à joindre la première fois.
Soit Z le nombre total de personnes obtenues lors des deux séries d'appels.

1. **Question de cours** Formule des probabilités totales.
2. Quelle est la loi de la variable aléatoire X ? Donner son espérance et sa variance.

3. Quel est le support de la variable aléatoire Z ?
4. Calculer les probabilités $\mathbb{P}(Z=0)$ et $\mathbb{P}(Z=1)$.
5. Déterminer la loi de Z .
6. **Python** Effectuer une simulation de la loi de Z et déterminer de façon approchée son espérance.

Solution :

1. Voie EC, mathématiques approfondies de première année p22
2. Soit X la v.a. égale au nombre... $X \sim \mathcal{B}(n;p)$ $\mathbb{E}(X) = np$ et $\mathrm{Var}(X) = np(1-p)$.
3. Z est à valeurs dans $[\![0;n]\!]$.
4. • $\mathbb{P}(Z=0) = (q^2)^n = q^{2n}$. En effet chaque personne est appelée 2 fois, avec un résultat négatif à chaque appel.
   • Pour la deuxième probabilité, on peut obtenir $Z=1$ de deux manières différentes :
   — soit on obtient 0 personne sur n lors de la première série et 1 personne sur n lors de la deuxième,
   — soit on obtient 1 personne sur n lors de la première série et 0 personne sur $n-1$) lors de la deuxième.
   Ainsi, on a :
$$\mathbb{P}(Z=1) = (1-p)^n \times \binom{n}{1}(1-p)^{n-1}p + \binom{n}{1}(1-p)^{n-1}p \times (1-p)^{n-1} = np(1-p)^{2n-2}(2-p)$$
5. Sachant que $X=k$, la secrétaire doit rappeler $n-k$ personnes, chacune avec la probabilité p. Ainsi la loi de Y sachant $[X=k]$ suit $\mathcal{B}(n-k,p)$.
   Donc on a :
$$\mathbb{P}(Y=l|X=k) = \binom{n-k}{l} \times p^l \times (1-p)^{n-k-l}.$$
6.
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z=s) &= \sum_{l=0}^{s} \mathbb{P}(Y=l|X=s-l) \times \mathbb{P}(X=s-l) \\ &= \sum_{l=0}^{s} \binom{n-s+l}{l} \times p^l \times (1-p)^{n-s} \times \binom{n}{s-l} \times p^{s-l} \times (1-p)^{n-s+l}.\end{aligned}$$
   Après quelques simplifications, on obtient
$$\begin{aligned} &= \frac{n!}{(n-s)!} \times p^s \times (1-p)^{2(n-s)} \sum_{l=0}^{s} \frac{1}{l!(s-l)!}(1-p)^l \\ &= \frac{n!}{(n-s)!s!} \times p^s \times (1-p)^{2(n-s)} \sum_{l=0}^{s} \frac{s!}{l!(s-l)!}(1-p)^l \times 1^{s-l} \\ &= \binom{n}{s} p^s \times (1-p)^{2(n-s)} \times (2-p)^s.\end{aligned}$$

Si on pose $p = 1 - q$, on obtient :

$$\mathbb{P}(Z = s) = \binom{n}{s}(1-q)^s \times (q)^{2(n-s)} \times (1+q)^s = \binom{n}{s}(1-q^2)^s \times (q^2)^{(n-s)}.$$

Ce changement de notation nous permet de conclure que $Z \sim \mathcal{B}(n, 1-q^2)$, ce qui paraît logique, vu que chaque personne se voit offrir une deuxième chance. La probabilité d'obtenir une personne vaut donc $1 - q^2$.

7.
```python
def simul_Z(p,n):
    A=rd.binomial(1,p,n)
    Z=0
    for k in range(n):
        if A[k]==1:
            Z+=1
        else :
            Z+=rd.binomial(1,p)
    return Z
def espZ(p,n):
    N=1000
    S=0
    for k in range(N):
        S+=simul_Z(p,n)
    return S/N
```

Exercice sans préparation 13

On considère l'intégrale
$$I=\int_0^{\pi/2}\frac{(x-\pi/4)\sin x}{\sin x-\cos x}dx.$$

1. Justifier l'existence de I.
2. Ecrire un code Python qui renvoie une approximation de I en utilisant des sommes de Riemann.
3. Montrer que
$$I=\int_0^{\pi/2}\frac{(x-\pi/4)\cos x}{\sin x-\cos x}dx.$$

Solution :

1. On a à priori un problème en $\pi/4$, on constate par un $DL1$ $\sin x-\cos x\sim\sqrt{2}(x-\pi/4)$, donc on a un prolongement par continuité en $\pi/4$ et l'intégrale est bien définie.
2.
```python
import numpy as np
def f(x):
    numerator = (x - np.pi / 4) * np.sin(x)
    denominator = np.sin(x) - np.cos(x)
    return numerator / denominator
# Parametres
a = -np.pi/4                # Borne inf
b = 3*np.pi / 4           # Borne sup
n = 10000               # Nombre de sous-intervalles
delta = (b - a) / n      # Largeur de chaque sous-intervalle
# Somme de Riemann
riemann_sum = sum(f(a + i *delta) * delta for i in range(1, n + 1))
print(f"Approximation de l'integrale par la somme de Riemann : {riemann_sum}")
```

   Approximation de l'integrale par la somme de Riemann : 0.7301642024140733

3.
$$J=\int_0^{\pi/2}\frac{(x-\pi/4)\cos x}{\sin x-\cos x}dx$$

   On a $I-J=\displaystyle\int_0^{\pi/2}(x-\pi/4)dx=\left[\frac{x^2}{2}-\frac{\pi}{4}x\right]_0^{\pi/2}=0.$

SUJET Maths Approfondies 14

Exercice principal 14

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $E = \mathbb{R}_n[X]$ et, pour P et Q dans E, on pose :

$$\langle P;\ Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,\mathrm{d}t$$

1. **Question de cours :** que peut-on dire des sous-espaces propres d'un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien ?
2. Justifier que l'intégrale ci-dessus est bien définie puis prouver que $(P, Q) \mapsto \langle P;\ Q\rangle$ est un produit scalaire sur E.
3. Soit φ définie sur E par $\varphi(P)(x) = (x^2-1)P''(x) + (2x+1)P'(x)$.
   Justifier que φ est un endomorphisme de E.
   On admet pour l'instant qu'en outre, φ est un endomorphisme *symétrique* de E. Ce point sera prouvé à la dernière question de l'exercice.
4. (a) Déterminer les valeurs propres de φ.
   (b) On note $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de φ ordonnées par ordre croissant. Soit P_k un vecteur propre associé à λ_k pour $k \in [\![0, n]\!]$. '
   Montrer que la famille $(P_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est orthogonale et déterminer le degré de P_k pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.
5. Soit $k \geqslant 1$.
   (a) Montrer que P_k possède au moins une racine d'ordre de multiplicité impair dans $]-1, 1[$.
   (b) On note $a_1, \ldots, a_r$ les racines d'ordre impair de P_k sur $]-1, 1[$ et soit $S = \prod_{i=1}^{r}(X - a_i)$. En considérant la quantité $\langle S;\ P_k\rangle$, montrer que P_k a k racines distinctes dans $]-1, 1[$.
6. On prouve dans cette question que l'endomorphisme φ est symétrique.
   Soient P et Q dans E. Montrer, en intégrant par parties, que :
   $$\int_{-1}^{1}(1-t)^{3/2}(1+t)^{1/2}P''(t)Q(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1}(2t+1)P'(t)Q(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,\mathrm{d}t - \int_{-1}^{1}(1-t)^{3/2}(1+t)^{1/2}P'(t)Q'(t)\,\mathrm{d}t$$
   et en déduire le résultat demandé.

Solution :

1. Question de cours : Voie EC, mathématiques approfondies de seconde année p17
2. Le seul problème pour la définition de l'intégrale est en -1, or :
   $$P(t)Q(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \underset{-1}{\sim} P(-1)Q(-1)\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+t}}$$
   qui est intégrable par comparaison à une intégrale de Riemann convergente $(1/2 < 1)$.
   L'application $(P, Q) \mapsto \langle P;\ Q\rangle$ est clairement symétrique et bilinéaire par bilinéarité du produit et linéarité de l'intégrale.
   Pour $P \in E$:
   $$\langle P;\ P\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)^2\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,\mathrm{d}t \geqslant 0$$

par positivité de l'intégrale et :

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} P(t)^2\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,\mathrm{d}t = 0 \quad &\Longrightarrow \quad \forall t \in]-1,1[\quad P(t)^2\sqrt{\frac{1-t}{1+t}} = 0 \text{ par continuité et positivité}\\
&\Longrightarrow \quad \forall t \in]-1,1[\quad P(t) = 0\\
&\Longrightarrow \quad P = 0 \text{ car } P \text{ a une infinité de racines}
\end{aligned}$$

L'application $\boxed{(P,Q) \mapsto \langle P;\ Q\rangle \text{ est donc bien un produit scalaire.}}$

3. La linéarité de φ est immédiate par linéarité de la dérivation et de la multiplication. De plus, φ est clairement à valeurs dans $\mathbb{R}[X]$ et si $P \in E$, $\deg(X^2-1)P'' \leqslant \deg P$ et $\deg(2X+1)P' \leqslant \deg P$ donc $\deg \varphi(P) \leqslant \deg P$ et donc $\varphi(P) \in E$.

   Ainsi, $\boxed{\varphi \text{ est un endomorphisme de } E.}$

4. (a) On remarque que $\varphi(1) = 0$, $\varphi(X) = 2X+1$ et pour $2 \leqslant k \leqslant n$:

   $$\varphi(X^k) = k(k+1)X^k + kX^{k-1} - k(k-1)X^{k-2}$$

   La matrice de φ dans la base canonique est donc triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont les $n+1$ nombres $\boxed{k(k+1) \text{ avec } 0 \leqslant k \leqslant n.}$ Ce sont donc les valeurs propres de φ.

   (b) Avec les notations de l'énoncé on a donc $\lambda_k = k(k+1)$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$. Comme φ a $n+1$ valeurs propres distinctes, $(P_0,\dots,P_n)$ est une base de E. De plus comme φ est symétrique, les sous-espaces propres de E sont orthogonaux deux à deux et $\boxed{\text{la famille } (P_0,\dots,P_n) \text{ est donc orthogonale.}}$

   Montrons que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $\deg P_k = k$.

   On le prouve par récurrence sur n. On sait déjà que le résultat est vrai pour $n = 0$ car $\varphi(a) = 0$ pour a un polynôme constant.

   On suppose le résultat vrai au rang $n-1$ pour $n \geqslant 1$. Comme la matrice $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ est triangulaire, $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ est stable par φ et la restriction de φ à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ induit un endomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ qui admet pour valeurs propres $\lambda_0,\dots,\lambda_{n-1}$ comme on le voit en écrivant les matrices de φ et de sa restriction dans la base canonique – c'est le calcul effectué à la question précédente. En fait, en considérant la restriction de φ à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ on se retrouve dans la même situation une dimension en dessous. Autrement dit, en notant $\varphi = \varphi_n$ pour $E = \mathbb{R}_n[X]$, $\varphi_{n|\mathbb{R}_{n-1}[X]} = \varphi_{n-1}$.

   Ainsi $(P_0,\dots,P_{n-1})$ est une famille de vecteurs propres associée aux valeurs propres $(\lambda_0,\dots,\lambda_{n-1})$ et par l'hypothèse de récurrence $\deg P_k = k$ pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$.

   Comme $(P_0,\dots,P_n)$ est une base de E, on a nécessairement $\boxed{\deg P_n = n}$ ce qui achève la récurrence.

5. (a) Si P_k n'a que des racines d'ordre pair sur $]-1,1[$, il ne change jamais de signe lorsqu'il s'annule sur cet intervalle et donc par le théorème des valeurs intermédiaires, il est de signe constant. Quitte à remplacer P_k par $-P_k$, on peut supposer $P_k \geqslant 0$ sur $]-1,1[$. Alors, par continuité et positivité de l'intégrale :

   $$\langle 1;\ P_k\rangle = \int_{-1}^{1} P_k(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,\mathrm{d}t > 0$$

   Mais 1 est dans le sous-espace propre associé à $\lambda_0 = 0$ d'où $\langle 1;\ P_k\rangle = 0$. Contradiction.

   (b) Par le même raisonnement, on suppose que le nombre r de racines d'ordre impair de P_k vérifie $r < k$. Alors $S \in \mathbb{R}_{k-1}[X] = \mathrm{Vect}(P_0,\dots,P_{k-1})$ et donc $\langle S;\ P_k\rangle = 0$.

   Mais dans le même temps SP_k n'a que des racines d'ordre pair dans $]-1,1[$ donc ne change pas de signe sur $]-1,1[$ par le même raisonnement que précédemment et, quitte à remplacer P_k par $-P_k$, on peut supposer que $SP_k \geqslant 0$ sur $]-1,1[$ d'où comme avant $\langle S;\ P_k\rangle > 0$.

   C'est une contradiction donc $r = k$ et donc $\boxed{P_k \text{ admet } k \text{ racines distinctes}}$ dans $]-1,1[$. Ces racines sont alors toutes simples.

6. On pose $f(t) = (1-t)^{3/2}(1+t)^{1/2}Q(t)$. Cette fonction est $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$ et pour tout $t \in]0,1[$:

$$\begin{aligned}
f'(t) &= -\frac{3}{2}(1-t)^{1/2}(1+t)^{1/2}Q(t) + \frac{1}{2}(1-t)^{3/2}(1+t)^{-1/2}Q(t) + (1-t)^{3/2}(1+t)^{1/2}Q'(t)\\
&= -\frac{3}{2}(1+t)Q(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}} + \frac{1}{2}(1-t)Q(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}} + (1-t)^{3/2}(1+t)^{1/2}Q'(t)\\
&= -(2t+1)Q(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}} + (1-t)^{3/2}(1+t)^{1/2}Q'(t)
\end{aligned}$$

En intégrant par parties – valide car P' est également de classe $\mathcal{C}^1$ – on obtient alors :

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} (1-t)^{3/2}(1+t)^{1/2} P''(t)Q(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{-1}^{1} f(t)P''(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \Big[\ f(t)P'(t)\ \Big]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} f'(t)P'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= -\int_{-1}^{1} f'(t)P'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-1}^{1} (2t+1)P'(t)Q(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,\mathrm{d}t - \int_{-1}^{1} (1-t)^{3/2}(1+t)^{1/2} P'(t)Q'(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

On trouve bien le résultat annoncé. En faisant passer la première intégrale du second membre dans le premier membre, l'égalité obtenue nous dit alors exactement que :

$$\langle \varphi(P);\ Q\rangle = \int_{-1}^{1} (1-t)^{3/2}(1+t)^{1/2} P'(t)Q'(t)\,\mathrm{d}t$$

L'expression dans le membre de droite est symétrique en P et Q donc on a automatiquement $\boxed{\langle \varphi(P);\ Q\rangle = \langle P;\ \varphi(Q)\rangle \text{ et } \varphi \text{ est bien symétrique.}}$

Exercice sans préparation 14

Soient X, Y et Z trois variables aléatoires indépendantes de même loi. On pose

$$W = X + Y + Z \text{ et } T = (X - Y)^2 + (X - Z)^2 + (Y - Z)^2.$$

1. On suppose que X, Y et Z suivent une loi normale centrée réduite. Déterminer la covariance des deux variables aléatoires W et T.
2. Même question quand X, Y et Z suivent une loi de Poisson.

Solution :
On peut écrire

$$T = 2(X^2 + Y^2 + Z^2) - 2(XY + YZ + XZ) = 2W^2 - 6(XY + YZ + XZ).$$

On a par indépendance des v. a. et par le fait qu'elles ont la même loi :

$$\mathbb{E}(T) = 2\mathbb{E}(W^2) - 18\mathbb{E}(X)^2.$$

On a aussi

$$\mathbb{E}(TW) = 2\mathbb{E}(W^3) - 6\mathbb{E}(XYW) - 6\mathbb{E}(YZW) - 6\mathbb{E}(XZW) = 2\mathbb{E}(W^3) - 18\mathbb{E}(XYW).$$

Or

$$\mathbb{E}(XYW) = \mathbb{E}(X^2Y) + \mathbb{E}(XY^2) + \mathbb{E}(XYZ) = 2\mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X)^3.$$

Donc

$$\mathbb{E}(TW) = 2\mathbb{E}(W^3) - 36\mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(X) - 18\mathbb{E}(X)^3.$$

1. Si X, Y et Z suivent une loi normale centrée réduite, on sait que - par stabilité de la loi normale et le lemme des coalitions- W suit la loi normale de paramètres $(0, \sqrt{3})$. On en déduit facilement que $\mathbb{E}(W^3) = 0$. Donc $\mathbb{E}(TW) = 0$, $\mathbb{E}(W) = 0$ et
$$\mathrm{Cov}(W, T) = 0.$$
On peut aussi remarquer des symétries et obtenir directement que la covariance est nulle(changer X en -X , Y en -Y et Z en -Z).
2. Si X, Y et Z suivent une loi normale de Poisson de paramètre λ, on sait que -par stabilité de la loi Poisson - W suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 = 3\lambda$. On a alors
$$\mathbb{E}(W) = 3\lambda,\ \mathbb{E}(W^2) = 3\lambda(1 + 3\lambda),\ \mathbb{E}(W^3) = 3\lambda(1 + 9\lambda + 9\lambda^2).$$
On en déduit que
$$\mathbb{E}(TW) = 3\lambda(1 + 9\lambda + 9\lambda^2) - 36\lambda^2(1 + \lambda) - 18\lambda^3 = -27\lambda^3 - 9\lambda^2 + 3\lambda.$$
$$\mathbb{E}(T) = 6\lambda(1 + 3\lambda) - 18\lambda^2 = 6\lambda.$$
Ainsi,
$$\mathbb{E}(TW) - \mathbb{E}(T)\mathbb{E}(W) = -27\lambda^3 - 9\lambda^2 + 3\lambda - 18\lambda^2 = -27\lambda^3 - 27\lambda^2 + 3\lambda.$$

SUJET Maths Approfondies 15

Exercice principal 15

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et (X_n) une suite de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A})$ admettant des moments d'ordre 2 et X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A})$ admettant aussi un moment d'ordre 2.

— On dit que (X_n) converge L_1 vers X ssi $\lim\limits_{n\to+\infty} E(|X_n - X|) = 0$

— On dit que (X_n) converge L_2 vers X ssi $\lim\limits_{n\to+\infty} E\left(|X_n - X|^2\right) = 0$

— On dit que (X_n) converge vers X ps (ou pp) ssi

$$P\left(\left\{\omega \in \Omega \;\middle|\; \lim_{n\to+\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\}\right) = 1$$

Le but de l'exercice est établir des liens entre les différentes convergences.

1. Question de cours : Donner la définition de la convergence en probabilité et la loi faible des grands nombres.

2. Montrer que si (X_n) converge L_1 vers X alors (X_n) converge en probabilité vers X.
3. Montrer que si (X_n) converge L_2 vers X alors (X_n) converge L_1 vers X.
4. Un exemple : X une v.a.r. suivant une loi uniforme sur $[0, 1]$ et

$$X_n = \sqrt{n+1}\, \mathbb{1}_{X \in \left[0, \frac{1}{n+1}\right]}$$

   (a) Montrer que (X_n) converge L_1 vers 0.

   (b) Qu'en est-il de la convergence L_2 ? Conclure.

5. Supposons que (X_n) converge vers X ps, notons $C = \left\{\omega \in \Omega \;\middle|\; \lim\limits_{n\to+\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\}$

   (a) Soit $\epsilon > 0$. Montrer que

$$C \subset \bigcup_{k=0}^{+\infty} \bigcap_{n \geqslant k} \left[|X_n - X| \leqslant \epsilon\right]$$

   (b) En déduire que (X_n) converge vers X en probabilité.

6. Un autre exemple : X une variable aléatoire réelle suivant une loi uniforme sur $[0, 1]$.
$X_1 = \mathbb{1}_{X \in]0,1]}$,
$X_2 = \mathbb{1}_{X \in]0, \frac{1}{2}]}$, $X_3 = \mathbb{1}_{X \in]\frac{1}{2}, 1]}$,
$X_4 = \mathbb{1}_{X \in]0, \frac{1}{3}]}$, $X_5 = \mathbb{1}_{X \in]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]}$, $X_6 = \mathbb{1}_{X \in]\frac{2}{3}, 1]}$
$X_7 = \mathbb{1}_{X \in]0, \frac{1}{4}]}$, $X_8 = \mathbb{1}_{X \in]\frac{1}{4}, \frac{2}{4}]}$, $X_9 = \mathbb{1}_{X \in]\frac{2}{4}, \frac{3}{4}]}$, $X_{10} = \mathbb{1}_{X \in]\frac{3}{4}, 1]}$
...

   (a) Donner l'univers image des X_n et montrer que

$$\forall k \geqslant \frac{n(n+1)}{2} + 1 \qquad P(X_k = 0) \geqslant \frac{n}{n+1}$$

   (b) En déduire que X_n converge en probabilité vers 0

   (c) Montrer que (X_n) ne converge pas ps vers 0.

Solution :

1. Voie EC, mathématiques approfondies de seconde année p21

2. Les variables admettent un moment d'ordre 2 donc d'ordre 1 ($|X_n| \leqslant 1+X_n^2$). Supposons que (X_n) converge L_1 vers X :
Soit $\epsilon > 0$, d'après l'inégalité de Markov
$$0 \leqslant P(|X_n - X| > \epsilon) \leqslant E(|X_n - X|)$$
Par encadrement on obtient $\lim_{n\to+\infty} P(|X_n - X| > \epsilon) = 0$, d'où $\boxed{(X_n) \text{ converge en proba vers } X.}$

3. *Montrer que si (X_n) converge L_2 vers X alors (X_n) converge L_1 vers X.*
Supposons que (X_n) converge L_2 vers X. Comme la variance est positive, nous avons
$$0 \leqslant E(|X_n - X|)^2 \leqslant E(|X_n - X|^2)$$
Par encadrement on obtient $\lim_{n\to+\infty} E(|X_n - X|) = 0$, d'où $\boxed{(X_n) \text{ converge } L_1 \text{ vers } X.}$

4. (a) X_n est positive donc
$$E(|X_n|) = E(X_n) = \sqrt{n+1}\ P\left(X \in \left[0, \frac{1}{n+1}\right]\right) = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \to 0$$
$\lim_{n\to+\infty} E(|X_n|) = 0$, d'où $\boxed{(X_n) \text{ converge } L_1 \text{ vers } 0.}$

(b)
$$E(X_n^2) = (n+1)P\left(X \in \left[0, \frac{1}{n+1}\right]\right) = 1$$
$\boxed{(X_n) \text{ ne converge pas } L_2 \text{ vers } 0. \text{ Nous n'avons pas équivalence entre les deux convergences.}}$

5. (a) *Soit $\epsilon > 0$. Montrer que*
$$C \subset \bigcup_{k=0}^{+\infty} \bigcap_{n\geqslant k} \Big[|X_n - X|\Big] \leqslant \epsilon$$
C'est la définition de la limite !
Soit $\omega \in C$ $\lim_{n\to+\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$ donc $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant k$ $|X_n - X| \leqslant \epsilon$
donc $\omega \in \bigcup_{k=0}^{+\infty} \bigcap_{n\geqslant k} [|X_n - X| \leqslant \epsilon]$ d'où l'inclusion demandée.

(b) *En déduire que (X_n) converge vers X en proba.*
Comme $P(C) = 1$, alors $P\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} \bigcap_{n\geqslant k} [|X_n - X| \leqslant \epsilon]\right) = 1$
Comme l'union est croissante, nous avons
$$\lim_{k\to+\infty} P\left(\bigcap_{n\leqslant k} [|X_n - X| \leqslant \epsilon]\right) = 1$$
Or
$$P\left(\bigcap_{n\geqslant k} [|X_n - X| \leqslant \epsilon]\right) \leqslant P([|X_n - X| \leqslant \epsilon]) \leqslant 1$$
Par encadrement on obtient $\lim_{n\to+\infty} P(|X_n - X| \leqslant \epsilon) = 1$, d'où $\boxed{(X_n) \text{ converge en proba vers } X.}$

6. (a)
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad X_n(\Omega) = \{0, 1\}$$
Nous avons à chaque fois i intervalles de longueur $\frac{1}{i}$.
$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ donc pour $k \geqslant \frac{n(n+1)}{2} + 1$ l'intervalle associé à X_k est de longueur inférieure à $\frac{1}{n+1}$,
d'où $P(X_k = 1) \leqslant \frac{1}{n+1}$ et donc $\boxed{P(X_k = 0) \geqslant \frac{n}{n+1}}$

(b)

$$\lim_{n\to+\infty} P(X_n = 0) = 1 \text{ d'où } (X_n) \text{ converge en probabilité vers } 0$$

(c) *Montrer que* (X_n) *ne converge pas ps vers* 0.

$\forall \omega \in \Omega$ $(X_n(\omega))$ admet une sous-suite constante égale à 0 et une autre constante égale à 1. $(X_n(\omega))$ ne converge pas vers 0.
$P(\{\omega \in \Omega | \lim_{n\to+\infty} X_n(\omega) = 0\} = 0$ et donc $\boxed{(X_n) \text{ ne converge pas ps vers } 0}$

Exercice sans préparation 15

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

On pose $t = a + d$, $s = ad - bc$ et $P(x) = x^2 - tx + s \in \mathbb{R}[x]$.

1. On suppose que A est diagonalisable, montrer que $P(A) = 0$.
2. En déduire que $P(A) = 0$ pour tout $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Solution :

1. On commence par vérifier que $P(\lambda) = 0$ si λ est une valeur propre de A : les vecteurs colonnes de $\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix}$ sont liés donc $(a-\lambda)(d-\lambda) - bc = 0$ d'où $P(\lambda) = 0$. On en déduit $P(D) = 0$ si $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ où λ_1, λ_2 sont les valeurs propres de A. Puis $P(A) = P(QDQ^{-1}) = QP(D)Q^{-1} = 0$ avec Q la matrice de passage de la base canonique à la base des vecteurs propres.
2. Notons $t(A) = a + d$ et $s(A) = ad - bc$. L'application

$$\begin{array}{lcl} \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^4 \\ (a,b,c,d) & \mapsto & [A^2 - t(A)A + s(A)I_2]_{1,1}, [A^2 - t(A)A + s(A)I_2]_{1,2}, [A^2 - t(A)A + s(A)I_2]_{2,1}, [A^2 - t(A)A + s(A)I_2]_{2,2} \end{array}$$

est polynomiale et s'annule sur un ouvert elle est donc nulle partout.
On peut fixer b, c, d comme paramètres et faire varier $x = a$ par exemple. Dans ce cas, A est diagonalisable sur l'ouvert $\{x \in \mathbb{R},\ x^2 - 2dx + d^2 + 4bc > 0\}$...

SUJET Maths Approfondies 16

Exercice principal 16

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa norme euclidienne canonique.

Pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}(1 + x_1 t + x_2 t^2 + \cdots + x_n t^n)^2 \, \mathrm{d}t$.

1. **Question de cours :** Donner une condition suffisante pour qu'une fonction de plusieurs variables admette des extrema globaux sur un ensemble donné.
2. Montrer que la fonction f est bien définie.
3. On note $M \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice définie par $M = ((i+j)!)_{0 \leqslant i,j \leqslant n}$

   Soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on note $u = \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$

   Montrer que $f(x) = {}^t u M u$
4. (a) On admet que pour tout $u \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$, si $u \neq 0$ alors ${}^t u M u > 0$
   Montrer que les valeurs propres de M sont toutes strictement positives.

   (b) En déduire qu'il existe un réel A strictement positif tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:
   $$f(x) \geqslant A \,||x||^2$$
5. En déduire que f admet un minimum global.
   On notera $a = (a_1, \ldots, a_n)$ un point où ce minimum est atteint.
6. (a) Montrer que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $k! + (k+1)! a_1 + \cdots + (k+n)! a_n = 0$.

   (b) On pose $P(x) = 1 + a_1(x+1) + a_2(x+1)(x+2) + \cdots + a_n(x+1)(x+2)\cdots(x+n)$.
   Montrer que $P(x) = \dfrac{(-1)^n}{(n+1)!}(x-1)(x-2)\cdots(x-n)$.

   (c) Montrer que $f(a) = P(0) = \dfrac{1}{n}$.

Solution :

1. Voie EC, mathématiques approfondies de seconde année p19 ou 20
2. Soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.
   Soit la fonction $g : t \mapsto e^{-t}(1 + x_1 t + x_2 t^2 + \cdots + x_n t^n)^2$ est continue et positive sur $[0, +\infty[$. De plus, $g(t) \underset{t \to +\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{\mathrm{t}^2}\right)$ par croissances comparées, donc $\boxed{\text{l'intégrale } f(x) \text{ converge}}$ par domination.
3. Par linéarité (toutes les intégrales convergent par le même raisonnement qu'à la question précédente), on

trouve que :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \int_0^{+\infty} e^{-t}(1 + x_1 t + x_2 t^2 + \cdots + x_n t^n)^2 \,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-t} \,\mathrm{d}t + 2\sum_{k=1}^{n} x_k \int_0^{+\infty} t^k k e^{-t} \,\mathrm{d}t + + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \int_0^{+\infty} t^{i+j} e^{-t} \,\mathrm{d}t \\
&= 1 + 2\sum_{k=1}^{n} k! x_k + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (i+j)! x_i x_j \\
&= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} (i+j)! x_i x_j \text{ en notant } x_0 = 1 \\
&\boxed{= u^T M u}
\end{aligned}$$

Remarque : $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{i+j} e^{-t} \,\mathrm{d}t = (i+j)!$ en utilisant la densité d'une loi $\gamma(i+j)$, ou éventuellement par récurrence.

4. (a) Soit λ une valeur propre de M et u un vecteur propre associé
   Comme u est non nul, $u^T M u = \lambda \left|\left|u\right|\right|^2 > 0$.
   Donc $\boxed{\text{Toutes les valeurs propres de } M \text{ sont strictement positives.}}$

   (b) La matrice M étant symétrique réelle, elle est diagonalisable d'après le théorème spectral et il existe donc une matrice diagonale $D = diag(\lambda_0, \ldots, \lambda_n)$ (on peut supposer $0 < \lambda_0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$) et une matrice orthogonale P telle que $M = PD^tP$. On peut alors écrire avec les notations précédentes, en posant $v = {}^tPu = (v_0, \ldots, v_n)$:

$$f(x) = {}^tuPD^tPu = {}^tvDv = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k v_k^2 \geqslant \lambda_0 \sum_{k=0}^{n} v_k^2 = \lambda_0 \|v\|^2 = \lambda_0 \|u\|^2 \boxed{\geqslant \lambda_0 \|x\|^2.}$$

5. D'après la question précédente, il existe un réel $r > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| > r \Rightarrow f(x) > f(0)$.
   La fonction f étant polynômiale, elle est continue sur la boule fermée bornée $\mathcal{B} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leqslant r\}$. Elle admet donc un minimum m sur $\mathcal{B}$. Par construction de r, on a : $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{B},\ f(x) > f(0) \geqslant m$.
   $\boxed{\text{La fonction } f \text{ admet donc un minimum global sur } \mathbb{R}^n.}$

6. (a) Puisque la fonction f est polynômiale, donc $\mathcal{C}^1$, sur l'ouvert $\mathbb{R}^n$, le point a est un point critique, i.e. :

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = 0.$$

   Or, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\displaystyle\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = 2k! + 2\sum_{i=1}^{n} a_k (k+i)!$.

$$\boxed{\text{Pour tout } k \in [\![1, n]\!],\ k! + \sum_{i=1}^{n} a_k (k+i)! = 0.}$$

   (b) Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\displaystyle k!P(k) = k! + \sum_{i=1}^{n} a_k (k+i)! = 0$. Le polynôme P est de degré inférieur ou égal à n et admet n racines distinctes. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P(X) = \lambda(X-1)\cdots(X-n)$.
   Puisque $P(-1) = 1$, on trouve $\lambda = \dfrac{(-1)^n}{(n+1)!}$.

$$\boxed{P(X) = \frac{(-1)^n}{(n+1)!}(X-1)\cdots(X-n).}$$

   (c) On a, par linéarité (toutes les intégrales convergent) :

$$\begin{aligned}
f(a) &= \int_0^{+\infty} e^{-t}(1 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n)^2 \,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-t}(1 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n) \,\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{n} a_k \int_0^{+\infty} t^k e^{-t}(1 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n) \,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Or :

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ \int_0^{+\infty} t^k e^{-t}(1+a_1 t+a_2 t^2+\cdots+a_n t^n)\,\mathrm{d}t = k!+a_1(k+1)!+a_2(k+2)!+\cdots+a_n(k+n)! = 0.$$

Ainsi :

$$f(a) = \int_0^{+\infty} e^{-t}(1+a_1 t+a_2 t^2+\cdots+a_n t^n)\,\mathrm{d}t = 1+\sum_{k=1}^{n} a_k k! = P(0) \boxed{= \frac{1}{n}}.$$

Exercice sans préparation 16

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ et $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ des variables aléatoires toutes possédant une espérance et une variance et telles que $(\mathbb{E}(X_1), \cdots, \mathbb{E}(X_n)) \neq (0, \cdots, 0)$. On considère la matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$M = (\mathbb{E}(X_i X_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}.$$

1. On suppose dans cette question que les variables aléatoires $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ sont indépendantes. Déterminer les valeurs propres de la matrice M et les sous-espaces propres associés.
2. On revient au cas général. Montrer que toutes les valeurs propres de M sont réelles positives et que

$$\lambda_n \geqslant \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i)^2,$$

où λ_n désigne la plus grande valeur propre de M.

Solution :

1. Puisque $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ sont indépendantes, on a

$$(M)_{i,j} = \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_j).$$

On pose $V = {}^t(\mathbb{E}(X_1), \cdots, \mathbb{E}(X_n))$. On a

$$M = V\,{}^tV.$$

Donc pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a

$$MX = ({}^tVX)V.$$

Notons que V est aussi vecteur propre est que la valeur propre associée est

$$\lambda_n = {}^tVV = \|V\|^2.$$

Par ailleurs, on observe que $MX = 0$ si et seulement si ${}^tVX = 0$. Donc $\lambda_1 = 0$ est valeur propre et le sous-espace propre associé est vect $\{V\}^{\perp}$. Ainsi, la multiplicité de λ_1 est $n-1$.
Le sous-espace propre associé à λ_n est vect$\{V\}$, qui est de dimension 1.

2. Puisque la matrice M est symétrique, elle est diagonalisable et ses valeurs propres sont réelles. Soit λ une valeur propre et $Y = {}^t(y_1, \cdots, y_n)$ un vecteur quelconque. On a

$${}^tYMY = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} y_i y_j \mathbb{E}(X_i X_j) = \mathbb{E}((\sum_{i=1}^{n} y_i X_i)^2) \geqslant (\mathbb{E}(\sum_{i=1}^{n} y_i X_i))^2 = ({}^tYV)^2 \geqslant 0.$$

En choisissant Y un vecteur propre non nul associé à λ, on en déduit que $\lambda \geqslant 0$. On en déduit que $\lambda \geqslant 0$.
Ainsi, toutes les valeurs propres de M sont positives.
Soient $0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ ces valeurs propres et $(V_1, \cdots, V_n)$ une B.O.N. de vecteurs propres associés dans le même ordre. Soit $Y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i V_i$ un vecteur colonne quelconque. On a

$${}^tYMY = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i^2 \leqslant \lambda_n \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 = \lambda_n \|Y\|^2.$$

En combinant avec l'inégalité ci-dessus, on en déduit que

$$\forall Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ ({}^tYV)^2 \leqslant \lambda_n \|Y\|^2.$$

En choisissant $Y = V$, on en déduit que $\|V\|^2 \leqslant \lambda_n$.