

## Mathématiques approfondies

### Conception emlyon bs

#### Session 2025

#### Le sujet

Le sujet contient deux problèmes, de longueur comparable. Il y a des questions de programmation en Python dans les deux problèmes.

Le premier problème propose dans une première partie une étude classique de suite d'intégrales (avec des notions du cours de première année) puis une deuxième partie d'algèbre bilinéaire traitant d'une famille de polynômes orthogonaux pour un produit scalaire. La difficulté des questions est très variable selon les questions et certaines demandent de prendre quelques initiatives. Une bonne connaissance du cours est requise.

Le second problème est un problème de probabilités continues. On étudie une certaine loi dans une première partie (Loi de Cauchy puis une loi avec espérance et sans variance) et on démontre une version plus forte (aux hypothèses affaiblies) de la loi faible des grands nombres, venant confirmer une conjecture établie à l'aide d'une simulation Python. Encore pour ce problème-ci, on croise des questions très accessibles et classiques mais aussi (et notamment vers la fin) des questions bien plus techniques et difficiles.

Il est intéressant de noter que chaque question du sujet a été traitée correctement par certains candidats, même si aucun candidat ne traite l'intégralité du sujet.

Il n'est d'ailleurs nullement nécessaire de tout traiter pour avoir une excellente note.

Ce sujet a permis de classer les candidats et répond donc à son objectif.

Les meilleures copies étaient très solides, rigoureuses, et ont pu balayer une grande partie du sujet (environ les 3/4). La plupart des candidats commencent cela dit par le problème 1, ce qui de fait implique que très très peu de copies traitent la dernière partie du problème 2.

Le format devrait rester le même en 2026 (deux problèmes).

#### Barèmes, attentes du jury

Le sujet est sur 150 points. Le premier problème contient 65 points, le second 75 et il y a 10 points accordés par les correcteurs et correctrices à la présentation, lisibilité, cohérence et rigueur générale, notamment le fait d'encadrer ses résultats, de soigner sa présentation, lisibilité et de quantifier toutes les variables et objets manipulés.

On insiste sur les efforts à faire sur ce point.

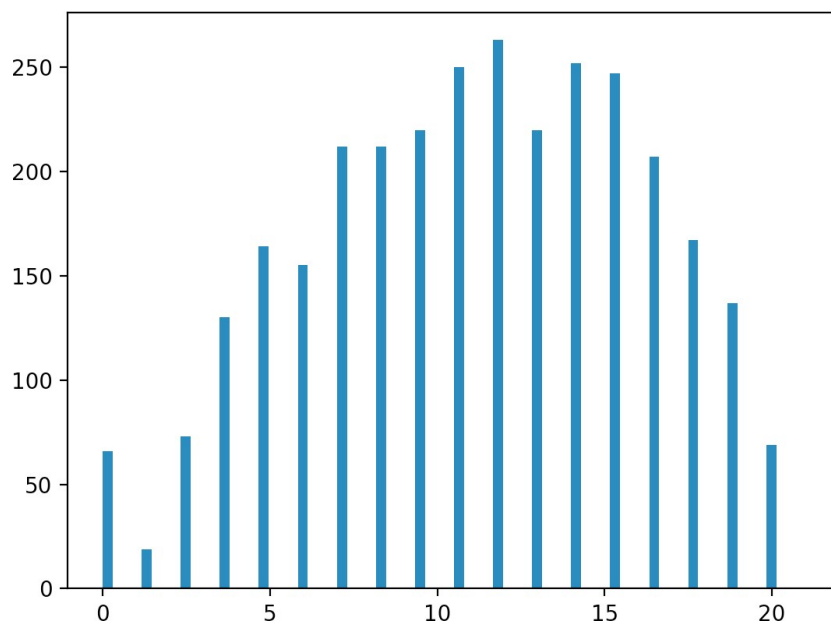
Les questions d'informatique représentaient un total de 10 points.

Après péréquation des notes, les statistiques de l'épreuve sont les suivantes (sur 3061 copies) :

- Moyenne (sur 20) : 11.48
- Écart-type (sur 20) : 4.86
- Nombre de 20/20 : 57 (soit 1.83% des notes).
- 10% de questions bien traitées permettait d'obtenir la note de 5.2/20.
- 26% de questions bien traitées permettait d'obtenir la note de 10.1/20.

- 40% de questions bien traitées permettait d'obtenir la note de 14.9/20.
- 63% de questions bien traitées permettait d'obtenir la note de 20/20.

La distribution de toutes les notes est la suivante :



## Remarques de correction et commentaires

*Si les commentaires ci-dessous semblent critiques, il est à noter en premier lieu que beaucoup de copies sont bien présentées et témoignent d'un bel engagement des candidats. Dans l'ensemble, les candidats sont bien préparés, et ont pu montrer leur connaissance lors de cette épreuve.*

Les candidats doivent garder à l'esprit que l'écriture d'une copie n'est pas qu'un exercice technique mais aussi, dans une certaine mesure, un exercice de communication.

L'algèbre bilinéaire reste un chapitre qui semble mal passer. Même si la notion de produit scalaire est bien sue et que beaucoup reconnaissent le théorème de minimisation des normes par projection, peu d'étudiants ont réussi à aller plus loin sur ce chapitre. Des erreurs assez grossières sont vite apparues ( $f$  et  $p_n(f)$  ne sont pas orthogonaux !).

Parmi les remarques faites par un grand nombre de correcteurs, on trouve, dans le désordre, les points suivants :

- Des ratures ou des calculs barrés dès la première page sont très très préjudiciables.
- Il faut faire attention au fait que certaines questions contiennent plusieurs questions. Certains candidats n'ont par exemple pas donné  $J_n$  dans la question 5 du problème 1 ou la densité de  $Z$  dans question 5 du problème 2, alors qu'ils avaient manifestement tout sur leur copie pour le faire.
- Si on n'en rencontre peut-être pas souvent, une somme indexée par une variable évoluant dans un ensemble vide est par convention égale à 0, ceci semble avoir posé des problèmes à certains candidats.
- Lorsque l'on applique un résultat du cours, on doit s'assurer que les hypothèses sont satisfaites (exemple : pour appliquer Markov,  $v.a$  positive admettant une espérance) tout comme les formules doivent être apprises mieux que de manière approximative (il manquait les coefficients binomiaux dans la formule de Leibniz un grand nombre de fois).
- Attention, avant d'appliquer la fonction  $\tan$  à s'assurer que l'argument est dans le bon domaine de définition.

- Certains mentionnent la convergence de l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$  au lieu de l'intégrale de Riemann  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ , ce qui a été lourdement pénalisé.

- La question 7 du problème 1 a permis de mettre en lumière d'énormes difficultés pour une majorité de candidats à manipuler correctement (et sans écrire de réelles horreurs) les équivalents.
- Le théorème d'inversion **n'est pas** un résultat du programme, il convient de démontrer la chose à chaque fois et de bien citer la stricte croissance de  $F$ .
- Le fait de ne pas avoir d'espérance implique ne pas avoir de variance non plus ; mais naturellement la réciproque est fautive (comme on le voit dans ce sujet). La logique de certains candidats est douteuse sur cette question. La logique également dans le raisonnement par contraposée de la question 14 du problème 2 l'est tout autant, même si finalement un nombre non négligeable de candidats traite correctement cette question sans avoir nécessairement traité les questions adjacentes.
- Les symboles mathématiques ne sont pas des abréviations. On n'écrira donc pas de phrase du type " Par positivité de , ..."
- Les abréviations sont à éviter surtout quand celles-ci ne sont pas standard (exemple *FCIFP*).
- Les parenthèses ne sont pas optionnelles ; leur absence rend faux le calcul.
- L'absence de soin est non seulement pénalisée explicitement mais rend impossible de comprendre ce qui est écrit.
- Les éléments de  $\mathbb{R}_n[x]$  sont des (fonctions) polynom(ial)es de degré inférieur ou égal à  $n$  et pas seulement égal à  $n$ .
- Ne pas reconnaître une loi de Bernoulli est quand même assez regrettable ; tout comme ne pas savoir dessiner le graphe d'une fonction continue par morceaux ou rendre irrecevable celui-ci par l'absence d'une quelconque graduation sur les axes.
- Conclure par "à une erreur de calcul près on a le bon résultat" ou bien "j'admets le résultat mais l'idée est là" n'est pas un trait d'humour à recommander.

## Conseils aux futurs candidats

Il est regrettable que plusieurs candidats traitent les questions dans le désordre. Cela leur est préjudiciable puisqu'ils font ainsi fi de la logique du problème et se privent de l'aide que leur apporterait une attention particulière à celle-ci ; et cela met le correcteur dans de mauvaises dispositions à leur égard.

Il est valorisable et a été valorisé de reconnaître une erreur dans sa copie, plutôt que de prétendre qu'elle n'a pas eu lieu.

Aboutir au résultat demandé après une succession de calculs sans queue ni tête par magie ou toute tentative d'arnaque n'est jamais à l'épreuve des correcteurs expérimentés et met celui-ci dans de très mauvaises dispositions à l'égard du candidat.

Bien lire le sujet et tenter de rester dans l'optique du concepteur du sujet. Voir les enchaînements entre les questions afin d'économiser ses forces. Énoncer complètement les théorèmes utilisés avec hypothèse(s) et conclusion(s) complètes. Améliorer la présentation et surtout l'écriture. Certaines copies sont quasi-illisibles par endroit.