HEC PARIS

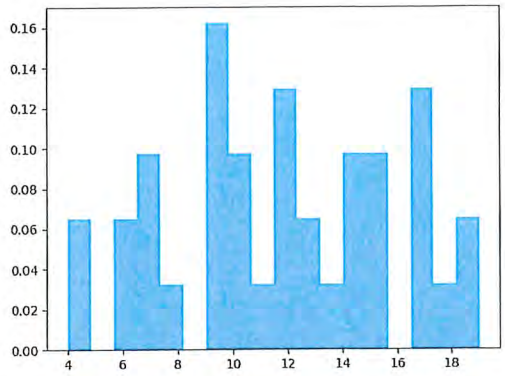
ÉPREUVE ORALE MATHEMATIQUES T

HEC Paris 2025

Programme Grande Ecole

Le bilan de la session 2025 de mathématiques voie T est satisfaisant.
Cette année les notes se sont étalées entre 4 et 19. La moyenne s'établit à 11,7 et l'écart-type à 4,17.

count	37.000000
mean	11.702703
std	4.174092
min	4.000000
25%	9.000000
50%	12.000000
75%	15.000000
max	19.000000



Le niveau d'ensemble des candidats reste assez hétérogène : certaines prestations se sont avérées catastrophiques tandis que le jury a également pu remarquer des candidats très brillants faisant preuve de bonnes capacités de réflexion.

Le jury insiste à nouveau sur les points suivants auprès des futurs candidats et de leurs enseignants.

- Le jury continue de remarquer l'existence d'importantes lacunes en calcul chez certains candidats. De même, les théorèmes du cours doivent être connus avec plus de rigueur : hypothèses précises et conclusions. Il import de lire attentivement la question posée et d'éviter les formules approximatives et fausses.
- Les raisonnements graphiques et les tracés de courbes restent incontournables. Notamment, le jury est en droit d'attendre l'esquisse qualitative d'une courbe après avoir établi un tableau de variation.
- Il importante de manier le langage mathématique avec rigueur et précision, notamment en ce qui concerne l'utilisation des quantificateurs. Plusieurs candidats se sont révélés avoir des difficultés à rédiger proprement une récurrence. Cela a pu s'avérer pénalisant, notamment dans un sujet traitant de suites récurrentes.
- Comme l'an dernier, chaque planche proposait, soit dans l'exercice principal, soit dans l'exercice sans préparation, au moins une question d'informatique, faisant appel au langage Python ou à du SQL. La simulation correcte de scénarios probabilistes en Python est un élément important et une telle simulation doit a minima contenir le bon nombre de tirages au sort.
- Toujours à propos du langage Python, la fonction `sum()` est autorisée, puisqu'elle apparaît dans le programme officiel, encore faut-il s'en servir correctement. Certains candidats auraient peut-être été mieux inspirés d'utiliser une simple boucle de sommation manuelle plutôt que de se servir de la fonction `sum()` avec des erreurs. Il est impératif de bien maitriser les fonctions qui apparaissent dans le programme.
- Les candidats ne doivent pas oublier qu'il s'agit d'un oral. Tout n'est pas joué à l'issue de la préparation. Le jury est extrêmement attentif à la qualité du dialogue qu'il noue avec le candidat. Il est fortement conseillé d'écrire au tableau ce qui est proposé par le jury. Le jury remarque également trop de candidats qui, la moindre demi-formule écrite au tableau, attendent un signe d'acquiescement ou une réaction du jury. C'est à eux d'avancer et le jury saura les arrêter s'il l'estime nécessaire. Des candidats peuvent se voir attribuer une bonne note alors qu'ils ne traitent pas un grand nombre de questions, tandis que d'autres, ayant l'impression d'avoir pourtant traité tout le sujet, se retrouvent avec une note décevante car leur exposition est trop brouillonne et manque de la rigueur exigible dans le maniement des concepts. Le jury apprécie particulièrement les candidats attentifs à la cohérence de leurs résultats, notamment quand cela leur permet de détecter des erreurs puis de les corriger.

- La question sans préparation est aussi très importante. Il n'est pas nécessaire de la mener à son terme pour faire bonne impression. Le jury est là encore attentif aux qualités de réflexion des candidats. Le candidat n'est pas obligé de parler instantanément en découvrant l'énoncé. Le jury a pu constater que certains candidats, après avoir raté l'exercice préparé, ont redressé la barre sur l'exercice sans préparation.
- Il est important de participer à la journée de l'oral ou, au moins, de la visionner. Elle répond aux questions de l'organisation et des attendus de chaque oral.
  Cela permet aux étudiants d'apprendre le déroulement d'un oral du point de vue des membres du jury.

Voici des sujets proposés cette année. Nous publions aussi leurs corrigés, mais insistons sur le fait que ces corrigés sont indicatifs, ont été écrits à l'intention des membres du jury et ne correspondent pas toujours exactement à ce que l'on peut attendre des élèves.

SUJET T 1

Exercice T 1

Une urne contient quatre boules indiscernables au toucher, numérotées de 0 à 3 . On effectue trois tirages successifs avec remise. On note X, Y, Z les variables aléatoires égales au résultat de chacun de ces tirages. On note p la probabilité de l'événement $(X+Y=Z)$.

1. Question de cours : Donner la définition de la covariance de deux variables aléatoires réelles.
2. Donner les lois de X, Y et Z ainsi que leur espérance et leur variance.
3. Déterminer la loi de probabilité du couple (X, Y). Préciser sa covariance.
4. En déduire la loi de la variable aléatoire $X+Y$. Préciser son espérance et sa variance.
5. En déduire la valeur de p.
6. Application

   Un système de tickets à gratter fonctionne de la façon suivante :

   — Un ticket coûte un euro.

   — Il y a sur le ticket 3 cases et, en grattant une case, on découvre un numéro compris ente 0 et 3. Le ticket est gagnant si la somme des deux premiers nombres vaut le troisième. Toutes les configurations de numéros sur les tickets sont équiprobables.

   — Un ticket gagnant rapporte a euros au consommateur où a est à déterminer.

   (a) Exprimer en fonction de a l'espérance de gain du joueur.

   (b) Pour quelle valeur de a le jeu est-il équitable ? C'est à dire que l'espérance du gain est égale à 0 .

   (c) Le gain a est mis à $a=6$. Un joueur décide de jouer jusqu'à ce qu'il gagne une partie. En moyenne, combien de parties devra-t-il jouer et quel est son gain final ?

   (d) Ecrire le corps de la fonction `XYZ`, de sorte que dans le script suivant, la fonction `Gain` retourne une simulation du gain obtenu à l'issue d'une série de parties s'arrêtant à la première partie gagnée.

```
def Gain():
    a = 6
    S = 0
    perdu = True
    while perdu :
        S += 1
        perdu = ( XYZ() + XYZ() != XYZ())
    return a - S
```

Solution :

1. Question de cours : ECT2, p.6
2. Les variables X, Y et Z ont même loi, la loi uniforme sur $[\![0,3]\!]$, sont indépendantes. On peut remarquer que $X'=X+1$ est uniforme sur $[\![1,4]\!]$, ce qui permet d'utiliser les formules d'espérance et de variance du cours

$$\mathbb{E}(X)=\mathbb{E}(X')-1=\frac{5}{2}-1=\frac{3}{2},\ \mathbb{V}(X)=\mathbb{V}(X')=\frac{(4)^2-1}{12}=\frac{5}{4}.$$

   (On peut refaire le calcul manuellement, il s'agit de sommes comportant 4 termes...)

3. Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y). Préciser sa covariance. Les tirages se font avec remise, ce qui implique une hypothèse d'indépendance sur X et Y. On a donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[(X=i)\cap(Y=j)] &= \mathbb{P}(X=i).\mathbb{P}(Y=j) \quad \text{par indépendance}\\ &= \frac{1}{4}.\frac{1}{4} = \frac{1}{16}\end{aligned}$$

et

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = 0.$$

4. La variable aléatoire $X+Y$ est à valeurs dans $[\![0,6]\!]$.

   (a) Par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3$.

   (b) Par développement de la variance d'une somme de v.a. indépendantes,

$$\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) = \frac{5}{4} + \frac{5}{4} = \frac{5}{2}.$$

   On calcule pour chaque $k \in [\![0,6]\!]$, la probabilité $\mathbb{P}(X+Y=k)$.

   — Pour $k=0$: $X+Y=0 \iff (X=0 \text{ et } Y=0)$ donc $\mathbb{P}(X+Y=0) = \mathbb{P}[(X=0)\cap(Y=0)] = \frac{1}{16}$ d'après 2.

   — Pour $k=1$: $X+Y=1 \iff (X=1 \text{ et } Y=0)$ ou $(X=0 \text{ et } Y=1)$ donc $\mathbb{P}(X+Y=1) = \frac{1}{16}+\frac{1}{16} = \frac{1}{8}$.

   — Pour $k=2$: $X+Y=2 \iff (X=2 \text{ et } Y=0)$ ou $(X=1 \text{ et } Y=1)$ ou $(X=0 \text{ et } Y=2)$ donc $\mathbb{P}(X+Y=2) = \frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16} = \frac{3}{16}$. En raisonnant de même pour les autres valeurs de k, on obtient la loi de $X+Y$:

k	0	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(X+Y=k)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

   — Remarque : la somme des probabilités est bien égale à 1.

5. Les v.a. $X+Y$ et Z sont indépendantes et, par la formule des probabilités totales (en utilisant le système d'événements $[Z=0], [Z=1], [Z=2], [Z=3]$), il vient

$$\begin{aligned}p &= \mathbb{P}(X+Y=Z)\\ &= \mathbb{P}(X+Y=0\cap Z=0) + \mathbb{P}(X+Y=1\cap Z=1) + \mathbb{P}(X+Y=2\cap Z=2) + \mathbb{P}(X+Y=3\cap Z=3)\end{aligned}$$

   et donc par indépendance :

$$\begin{aligned}p &= \mathbb{P}(X+Y=0).\mathbb{P}(Z=0) + \mathbb{P}(X+Y=1).\mathbb{P}(Z=1) + \mathbb{P}(X+Y=2).\mathbb{P}(Z=2) + \mathbb{P}(X+Y=3).\mathbb{P}(Z=3)\\ &= \frac{1}{16}.\frac{1}{4} + \frac{2}{16}.\frac{1}{4} + \frac{3}{16}.\frac{1}{4} + \frac{4}{16}.\frac{1}{4}\\ &= \frac{10}{64} = \frac{5}{32}.\end{aligned}$$

6. Application

   (a) Le gain du joueur est $G = \begin{cases} a-1 & \text{si la partie est gagnée} \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$. On a $\mathbb{E}(G) = p.(a-1)+(1-p)(-1) = a.p-1$.

   (b) Le jeu est équitable lorsque $a.p-1=0$, c'est à dire $a = \frac{1}{p}$ puisque $p \neq 0$.

   (c) On suppose donc que $a=6$ et que le joueur décide de rejouer jusqu'à ce qu'il gagne une partie. Soit T le numéro de la première partie gagnante. La variable aléatoire T suit une loi géométrique de paramètre p. On a

$$\mathbb{E}(T) = \frac{1}{p} = \frac{32}{5}.$$

   Le « gain » du joueur est $G = a - T$, et donc, en moyenne :

$$\mathbb{E}(G) = a - \mathbb{E}(T) = 6 - \frac{32}{5} = -\frac{2}{5}$$

   Ce n'est pas si mauvais d'un point de vue commercial car cela permet au joueur de passer un certain temps au comptoir (6 parties), sans avoir à trop débourser à la fin, (en moyenne 40 centimes)

(d) Il suffit d'écrire un tirage au sort uniforme sur l'intervalle d'entiers $[\![0, 3]\!]$.

```
import numpy as np
def XYZ():
    return int(np.floor(np.random.rand()*4))
```

Exercice sans préparation T 1

Montrer par récurrence sur n que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4^k}\binom{2k}{k} = \frac{2n+1}{4^n}.\binom{2n}{n} - 1.$$

Solution :

On veut montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4^k}\binom{2k}{k} = \frac{2n+1}{4^n}.\binom{2n}{n} - 1.$$

Pour $n = 1$, les composantes (partie gauche, partie droite) de la formule sont :

$$\frac{1}{4}.\binom{2}{1} = \frac{1}{2} \text{ et } \frac{2n+1}{4^n}.\binom{2n}{n} - 1 = \frac{3}{4}.\binom{2}{1} - 1 = \frac{1}{2}$$

et donc la formule est vraie pour $n = 1$.

Supposons la formule vraie pour un certain entier n. On a alors, au rang $n+1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{4^k}\binom{2k}{k} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4^k}\binom{2k}{k} + \frac{1}{4^{n+1}}\binom{2(n+1)}{n+1} \\
&= \frac{2n+1}{4^n}.\binom{2n}{n} - 1 + \frac{1}{4^{n+1}}\binom{2(n+1)}{n+1} \\
&= \frac{1}{4^{n+1}}\left(\frac{4(2n+1)(2n)!}{(n!)^2} + \frac{(2(n+1))(2n+1)(2n)!}{(n+1)!^2}\right) - 1 \\
&= \frac{1}{4^{n+1}}\frac{(2n+1)(2n)!}{(n+1)!^2}\left(4(n+1)^2 + 2(n+1)\right) - 1 \\
&= \frac{1}{4^{n+1}}\frac{(2n+2)!}{(n+1)!^2}\left(2(n+1)+1\right) - 1
\end{aligned}$$

Cette dernière formule est bien la formule attendue pour obtenir l'hérédité de la propriété.

SUJET T 2

Exercice T 2

On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, diagonalisable, qui possède 2 valeurs propres strictement positives, deux à deux distinctes, $0 < \lambda_1 < \lambda_2$.

Soit $P = (X_1|X_2)$ une matrice décrite par ses colonnes : X_1 est la première colonne de P, X_2 est la deuxième colonne de P. On suppose que P diagonalise A, c'est à dire que P est inversible et

$$P^{-1}.A.P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

On suppose par ailleurs qu'il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 = A$.

1. Question de cours. Définition de « Une matrice carrée A est diagonalisable ».
2. Etude d'un cas particulier. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

   (a) Vérifier que la matrice

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   diagonalise A et donner $P^{-1}.A.P$.

   (b) Construire une matrice M telle que $M^2 = A$. (On pourra donner une formule non simplifiée faisant intervenir P^{-1} et P.)
3. On revient au cas général.
   (a) Montrer que le polynôme $C(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)$ est annulateur de la matrice A.
   (b) En déduire un polynôme annulateur de la matrice M. Quelles sont les valeurs propres possibles pour M ?
4. (a) Montrer que X_1 est vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_1 et vérifier qu'un vecteur X vérifie $AX = \lambda_1 X$ si et seulement si il existe un nombre réel α tel que $X = \alpha X_1$.
   (b) Montrer que si X est vecteur propre de M^2, alors soit $MX = 0$, soit MX est vecteur propre de M^2 pour la même valeur propre.
   (c) En déduire que si X est vecteur propre de M^2, alors X et MX sont deux vecteurs colonnes proportionnels.
   (d) En déduire que la matrice P diagonalise la matrice M. C'est à dire que $P^{-1}MP$ est diagonale.
5. On notera dans la suite : $B = P^{-1}AP$ et $N = P^{-1}MP$.
   (a) Vérifier que l'équation $M^2 = A$ équivaut à $N^2 = B$.
   (b) Expliciter toutes les matrices M vérifiant $M^2 = A$.

Solution :

1. ECT2 p.7
2. (a) Appelons X_1, X_2 les deux colonnes de P :

$$X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a $A.X_1 = X_1$ et $A.X_2 = 3X_2$. On a

$$A.P = (X_1|3X_2) = P.\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$$

Comme P est inversible (son det vaut $-2 \neq 0$), il vient

$$P^{-1}.A.P = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}.$$

(b) En posant

$$M = P.\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \sqrt{3}\end{pmatrix}.P^{-1}$$

On a $M^2 = A$.

3. (a) Soit le polynôme $C(x) = (x - \lambda_1).(x - \lambda_2)$. On a (on multiplie à gauche et à droite par P^{-1} et P, on intercale aussi le produit de ces deux matrices) :

$$\begin{aligned} C(A) &= (A - \lambda_1.I_2).(A - \lambda_2.I_2)\\ P^{-1}.C(A).P &= P^{-1}.(A - \lambda_1.I_2).P.P^{-1}.(A - \lambda_2.I_2).P\\ &= (P^{-1}.A.P - \lambda_1.I_2).(P^{-1}.A.P - \lambda_2.I_2)\\ &= \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\\ &= 0 \end{aligned}$$

et donc $C(A) = P.0.P^{-1} = 0$. C'est à dire que C est annulateur de la matrice A.

(b) On en déduit que $D(x) = C(x^2) = (x^2 - \lambda_1).(x^2 - \lambda_2)$ est annulateur de M. Les valeurs propres possibles pour M sont les racines de ce polynôme, à savoir $\sqrt{\lambda_1}, -\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, -\sqrt{\lambda_2}$.

4. (a) On a

$$P^{-1}.A.P = \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$$

et donc

$$A.P = P.\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$$

ce qui se lit colonne par colonne, matriciellement :

$$(A.X_1|A.X_2) = (\lambda_1.X_1|\lambda_2.X_2)$$

et donc

$$A.X_1 = \lambda_1.X_1 \text{ et } A.X_2 = \lambda_2.X_2.$$

On en déduit que X_1 est vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_1 (et X_2 est vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_2). Un vecteur X vérifie $A.X = \lambda_1.X$ si et seulement si $(A - \lambda_1.I_2).X = 0$, ce qui équivaut à

$$P^{-1}.(A - \lambda_1.I_2).P.P^{-1}.X = 0$$

C'est à dire

$$\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}.P^{-1}.X = 0$$

c'est à dire si et seulement si la deuxième composante de $P^{-1}.X$ vaut 0, c'est à dire si et seulement si $P^{-1}.X$ est de la forme $\alpha\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$ pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}$. Ceci revient à dire que $X = \alpha.X_1$ pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}$.

(b) Si X est vecteur propre de M^2, alors $M^2.X = \lambda.X$ et donc, en multipliant par M à gauche il vient que :

$$M.M^2.X = \lambda.M.X$$

c'est à dire

$$M^2.M.X = \lambda.M.X$$

et donc soit $M.X = 0$, soit $M.X$ est vecteur propre de M^2 pour la même valeur propre.

(c) Si X est vecteur propre de M^2 associé à λ_1, X est non nul, proportionnel à X_1 et MX est proportionel à X_1. On en déduit que X et $M.X$ sont deux vecteurs colonnes proportionnels : il existe μ_1 tel que $M.X = \mu_1.X$.

Il en va de façon similaire si X est un vecteur propre de M^2 associé à λ_2.

(d) On en déduit que X_1 et X_2 sont vecteurs propres de M et donc que la matrice P diagonalise la matrice M. C'est à dire que $P^{-1}.M.P$ est diagonale et avec nos notations :

$$P^{-1}.M.P = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix}.$$

5. On notera dans la suite : $B = P^{-1}AP$ et $N = P^{-1}MP$.

(a) L'équation $M^2 = A$ équivaut à $(P.N.P^{-1})^2 = P.B.P^{-1}$, ce qui équivaut après simplification à : $P.N^2.P^{-1} = P.B.P^{-1}$, puis à $N^2 = B$.

(b) Si on résout $N^2 = B$ avec N et B diagonales,

$$N = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

on obtient, par identification l'équivalence avec $\mu_1^2 = \lambda_1$ et $\mu_2^2 = \lambda_2$. C'est à dire

$$N^2 = B \Leftrightarrow \begin{cases} \mu_1 = \sqrt{\lambda_1} \text{ et } \mu_2 = \sqrt{\lambda_2} & \text{ou} \\ \mu_1 = \sqrt{\lambda_1} \text{ et } \mu_2 = \sqrt{-\lambda_2} & \text{ou} \\ \mu_1 = \sqrt{-\lambda_1} \text{ et } \mu_2 = \sqrt{\lambda_2} & \text{ou} \\ \mu_1 = \sqrt{-\lambda_1} \text{ et } \mu_2 = \sqrt{-\lambda_2} \end{cases}$$

Il y a donc 4 solutions à cette équation :

$$N = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \pm\sqrt{\lambda_2} \end{pmatrix}$$

Le raisonnement mené dans l'exercice démontre que lorsque A est diagonalisable et possède deux valeurs propres strictement positives distinctes :

$$A = M^2 \Leftrightarrow M = P.\begin{pmatrix} \pm\sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \pm\sqrt{\lambda_2} \end{pmatrix}.P^{-1}$$

où P est une matrice diagonalisant A en :

$$A = P.\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.P^{-1}$$

Exercice sans préparation T 2

Soit n un entier naturel, U une variable aléatoire uniforme sur $[\![0,n]\!]$.
On définit la fonction G_U sur $\mathbb{R}$ par : $G_U(t) = \mathbb{E}(t^U)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

1. Ecrire le code d'une fonction Python `G_U(n,t)` prend en argument un entier naturel `n` et un réel `t` et renvoyant la valeur de $G_U(t)$.
2. On pose $t = 1+h$ avec $h \in \mathbb{R}$.
   Montrer alors que, pour tout $t \in \mathbb{R}$:
$$G_U(t) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}h^k.$$
   En déduire que
$$\mathbb{E}(U) = \frac{n}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(U(U-1)) = \frac{1}{3}n(n-1)$$

Solution :

1.
```
def G_U(n,t):
        u=1
        G=1
        for k in range(n):
                u=u*t
                G=G+u
        return G/(n+1)
```

2. Soit n un entier naturel, U une variable aléatoire uniforme sur $[\![0,n]\!]$. Pour $t \in \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}$, $t = 1+h$, (on suppose $t \neq 1$
$$G_U(t) = \mathbb{E}(t^U) = \frac{1}{n+1}.\sum_{k=0}^{n} t^k = \frac{1}{n+1}.\frac{t^{n+1}-1}{t-1}$$
   En remplaçant t par $1+h$ avec $h \neq 0$, on obtient
$$G_U(t) = \frac{1}{n+1}\frac{(1+h)^{n+1}-1}{h} = \frac{1}{n+1}.\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}h^k.$$
   où la dernière identité est obtenue par le binôme de Newton.
   En dérivant
$$\begin{aligned} G'_U(t) &= \frac{1}{n+1}.\sum_{k=0}^{n} k.t^{k-1} \\ G'(1+h) &= \frac{1}{n+1}.\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k+1}k.h^{k-1} \end{aligned}$$
   et en évaluant de part et d'autre en $t = 1$, c'est à dire $h = 0$, il vient
$$\mathbb{E}(U) = \frac{1}{n+1}.\binom{n+1}{2} = \frac{n}{2}.$$
   En redérivant
$$\begin{aligned} G''_U(t) &= \frac{1}{n+1}.\sum_{k=2}^{n} k.(k-1)t^{k-2} \\ G''(1+h) &= \frac{1}{n+1}.\sum_{k=2}^{n}\binom{n+1}{k+1}k.(k-1).h^{k-2} \end{aligned}$$

et en évaluant de part et d'autre en $t = 1$, c'est à dire $h = 0$, il vient

$$\mathbb{E}(U.(U-1)) = \frac{1}{n+1}.\binom{n+1}{3}.2 = \frac{n.(n-1)}{3}.$$

Question supplémentaire : Montrer que $\mathbb{E}(U(U-1)(U-2)) = \frac{1}{4}n(n-1)(n-2)$ (ou simplement demander le calcul de $\mathbb{E}(U(U-1)(U-2))$.

Solution : En redérivant

$$\begin{aligned} G_U'''(t) &= \frac{1}{n+1}.\sum_{k=3}^{n} k.(k-1).(k-2)t^{k-3} \\ G'''(1+h) &= \frac{1}{n+1}.\sum_{k=3}^{n}\binom{n+1}{k+1}k.(k-1).(k-2).h^{k-3} \end{aligned}$$

et en évaluant de part et d'autre en $t = 1$, c'est à dire $h = 0$, il vient

$$\mathbb{E}(U.(U-1).(U-2)) = \frac{1}{n+1}.\binom{n+1}{4}.3! = \frac{n.(n-1).(n-2)}{4}.$$

$$\mathbb{E}(U) = \frac{n}{2},\ \mathbb{E}(U.(U-1)) = \frac{1}{3}.n(n-1),\ \mathbb{E}(U.(U-1).(U-2)) = \frac{1}{4}.n.(n-1)(n-2)$$

SUJET T 3

Exercice T 3

1. Question de cours : Rappeler densité, espérance et variance de la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
2. Soit λ un réel strictement positif et
$$f(t) = \begin{cases} \lambda^2 t e^{-\lambda t} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}.$$
Montrer que f est une densité de probabilité.
3. Pour $i \in \{1, 2\}$, soit T_i une variable aléatoire admettant f comme densité. Calculer $F_{T_i}(t)$, la fonction de répartition de T_i.
4. On admet la formule donnant l'espérance à partir de la fonction de répartition :
$$\mathbb{E}(T_i) = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(T_i > t) \ \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} (1 - F_{T_i}(t)) \ \mathrm{d}t$$
Calculer $\mathbb{E}(T_1)$ en fonction de λ. En déduire que :
$$\int_0^{+\infty} \lambda t^2 e^{-\lambda t} \ \mathrm{d}t = \frac{2}{\lambda^2}$$

$\star\star\star$

On s'intéresse à deux appareils constitués de deux composants ayant chacun une durée de vie T_i décrite ci-dessus. Les variables aléatoires T_1 et T_2 sont supposées indépendantes.

5. Dans le premier appareil, les composants sont branchés en série : l'appareil ne fonctionne que si les 2 composants fonctionnent. On appelle D_1 la durée de vie de cet appareil.
   (a) Exprimer D_1 en fonction de T_1 et T_2.
   (b) Soit $t \in \mathbb{R}$. Calculer la probabilité $\mathbb{P}(D_1 > t)$. En déduire la fonction de répartition de la variable D_1.
   (c) On admet la formule donnant l'espérance à partir de la fonction de répartition :
$$\mathbb{E}(D_1) = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(D_1 > t) \ \mathrm{d}t$$
   Donner l'expression de l'espérance de D_1 en fonction de λ.
6. Dans le second appareil, les composants sont branchés en parallèle : l'appareil fonctionne tant qu'au moins un des deux composants fonctionne. On appelle D_2 la durée de vie de cet appareil.
   (a) Exprimer D_2 en fonction de T_1 et T_2.
   (b) Calculer la fonction de répartition de D_2.

Solution :

1. Question de cours : ECT 2, p.9
2. Soit
$$f(t) = \begin{cases} \lambda^2 t e^{-\lambda t} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}.$$
   (a) La fonction f est continue sur tout $\mathbb{R}$ sauf, peut-être, en 0. Elle est positive.

(b) Calculons son intégrale : on a $\int_{-\infty}^{0} f(t)\ dt = 0$ et, pour $X > 0$,

$$\begin{aligned}\int_0^X f(t)\ dt &= \int_0^X \lambda^2.te^{-\lambda.t}\ dt = \lambda.\int_0^X t.\lambda.e^{-\lambda.t}\ \mathrm{d}t \\ &= \lambda.\left[u(t).v(t)\right]_0^X - \lambda.\int_0^X u'(t).v(t)\ \mathrm{d}t \\ &= -\lambda.\left[t.e^{-\lambda.t}\right]_0^X + \lambda.\int_0^X e^{-\lambda.t}\ \mathrm{d}t.\end{aligned}$$

On a posé, pour cette intégration par parties, $u(t) = t$, $v(t) = -e^{-\lambda.t}$, $u'(t) = 1$, $v'(t) = \lambda.e^{-\lambda.t}$, les fonctions u et v étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[0, X]$. Et finalement, en reconnaissant une primitive pour la deuxième intégrale :

$$\int_0^X f(t)\ \mathrm{d}t = -\lambda.X.e^{-\lambda.X} + 1 - e^{-\lambda.X}.$$

Lorsque $X \to +\infty$, on a alors

$$\int_0^X f(t)\ \mathrm{d}t \to 1,$$

ce qui montre que $\int_0^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t = 1$. Par CHASLES, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t = 1$.

(c) La fonction f est donc une densité de probabilité.

3. Pour $i \in \{1, 2\}$, soit T_i une variable aléatoire admettant f comme densité. Le calcul fait pour démontrer que f est une densité de probabilité montre que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ F_{T_i}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \displaystyle\int_0^t f(s)\ \mathrm{d}s = 1 - e^{-\lambda.t} - \lambda.t.e^{-\lambda.t} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}.$$

4. D'après la formule donnée, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(T_1) &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda.t} + \lambda.t.e^{-\lambda.t}\ \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\lambda}\left(\int_0^{+\infty} \lambda.e^{-\lambda.t}\ \mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} \lambda^2.te^{-\lambda.t}\ \mathrm{d}t\right) \\ &= \frac{1}{\lambda}(1+1) = \frac{2}{\lambda}.\end{aligned}$$

Il faut comprendre que les calculs des deux dernières intégrales (elles valent 1) sont faits du moment que l'on sait que les intégrandes de ces intégrales sont des densités de probabilités.

5. Dans le premier appareil, les composants sont branchés en série : l'appareil ne fonctionne que si les 2 composants fonctionnent. On appelle D_1 la durée de vie de cet appareil.

(a) On a $D_1 = \min(T_1, T_2)$. La v.a. D_1 est à valeurs dans $]0, +\infty[$.

(b) Soit $t > 0$ (si $t \leqslant 0$, $\mathbb{P}(D_1 > t) = 1$). On a (la deuxième ligne s'obtient par indépendance de T_1 et T_2, la troisième du fait que ces deux v.a. ont même fonction de répartition) :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(D_1 > t) &= \mathbb{P}(T_1 > t \text{ et } T_2 > t) \\ &= \mathbb{P}(T_1 > t).\mathbb{P}(T_2 > t) \\ &= \left(e^{-\lambda.t} + \lambda.t.e^{-\lambda.t}\right)^2 \\ &= e^{-2\lambda.t} + 2\lambda.t.e^{-2\lambda.t} + \lambda^2.t^2.e^{-2\lambda.t}\end{aligned}$$

et donc la fonction de répartition de la variable D_1 vérifie :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}(D_i \leqslant t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - e^{-2\lambda.t} - 2\lambda.t.e^{-2\lambda.t} - \lambda^2.t^2.e^{-2\lambda.t} & \text{sinon} \end{cases}.$$

(c) On a donc (en utilisant la formule donnée pour l'espérance de D_1),

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(D_1) &= \int_0^{+\infty} e^{-2\lambda.t}\ \mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} 2\lambda.t.e^{-2\lambda.t}\ \mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} \lambda^2.t^2.e^{-2\lambda.t}\ \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\lambda} + \frac{1}{2\lambda} + \frac{1}{4}.\frac{2}{2\lambda} = \frac{5}{4\lambda}.\end{aligned}$$

Là encore, ces calculs d'intégrales ont déjà été faits précédemment avec 2λ à la place de λ. Pour conclure, par la formule usuelle donnant l'espérance, on a

$$\frac{2}{\lambda} = \mathbb{E}(T_1) = \int_0^{+\infty} t.\lambda^2.t.e^{-\lambda.t}\ \mathrm{d}t$$

et donc

$$\int_0^{+\infty} \lambda.t^2.e^{-\lambda.t}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda}\frac{2}{\lambda} = \frac{2}{\lambda^2}.$$

6. Dans le second appareil, les composants sont branchés en parallèle : l'appareil fonctionne tant qu'au moins un des deux composants fonctionne.
   (a) On a $D_2 = \max(T_1, T_2)$. D_2 est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.
   (b) On a, pour $t \in \mathbb{R}_+$, (la deuxième identité étant par indépendance de T_1 et T_2.)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(D_2 \leqslant t) &= \mathbb{P}(T_1 \leqslant t \text{ et } T_2 \leqslant t) \\ &= \left(1 - e^{-\lambda.t} - \lambda.t.e^{-\lambda.t}\right)^2.\end{aligned}$$

Exercice sans préparation T 3

On dispose d'une base de données regroupant les informations sur les films sortis en salles depuis 125 ans. Son schéma relationnel est le suivant (on donne la commande de création) :

```
CREATE TABLE films (
    film_id INTEGER PRIMARY KEY,
    film_titre CHAR(120),
    annee_sortie INTEGER,
    realisateur CHAR(80),
    budget INTEGER,
    box_office INTEGER,
    notes_imdb INTEGER
);
```

Ecrire une requête SQL affichant :

1. La liste des titres des films sortis en 1925 ;
2. Le budget moyen d'entrées des films sortis depuis 2015 ; On pourra utiliser la fonction de calcul de moyenne `AVG`
3. La note IMDB minimale des films réalisés par `SCORSESE` ; On pourra utiliser la fonction de calcul de minimum `MIN`

Solution :

1.
```
SELECT film_titre FROM films
     WHERE annee_sortie = 1925
```

2.
```
SELECT AVG(budget) FROM films
     WHERE annee_sortie >= 2015
```

3.
```
SELECT MIN(notes_imdb) FROM films
     WHERE realisateur = 'SCORSESE'
```

SUJET T 4

Exercice T 4

On considère la fonction f définie par

$$f(t) = \begin{cases} t^2 - t\ln(t) & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}.$$

1. Question de cours : Enoncer le « théorème de la limite monotone ».
2. (a) Donner l'ensemble de définition de f.
   (b) Montrer que f est continue sur son ensemble de définition.
   (c) Calculer f' et f'' sur $]0;+\infty[$.
   (d) En déduire les variations de f sur $]0;+\infty[$.
   (e) Montrer que l'équation $f(t) = 1$ admet une unique solution sur $]0,+\infty[$ que l'on déterminera.
3. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1$.
   (b) Étudier les variations de (u_n).
   (c) La suite (u_n) converge-t-elle ? Si oui, déterminer sa limite.
   (d) Écrire un programme en Python permettant d'obtenir le rang n à partir duquel $|u_n - 1| \leqslant 10^{-4}$.
   (e) On admet que $n(1-u_n) \to 2$ lorsque $n \to +\infty$. Pouvez vous donner un ordre de grandeur de la valeur de n calculée à la question précédente ?

Solution :

1. Question de cours : ECT 1 p.14.
2. (a) La fonction f est bien définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$. (L'expression $\ln(t)$ est évaluable lorsque $t \in]0,+\infty[$ et ensuite la combiner avec des puissances positives de t)
   (b) Sur $]0,+\infty[$. Les fonctions $t \mapsto \ln(t)$, $t \mapsto t$ et $t \mapsto t^2$ sont continues sur $]0,+\infty[$ et donc par produits puis combinaisons linéaires, f y est continue.
   En 0^+. On a $f(0) = 0$. Par croissances comparées, lorsque $t \to 0^+$, $t\ln(t) \to 0$, de même que $t \mapsto t^2$ (continuité polynomiale) et donc par combinaison linéaire $f(t) \to 0 = f(0)$. La fonction f est donc continue en 0 à droite.
   (c) On a

$$\forall t > 0,\ f'(t) = 2t - \ln(t) - t.\frac{1}{t} = 2t - 1 - \ln(t)$$

   et

$$\forall t > 0,\ f''(t) = 2 - \frac{1}{t} = \frac{2t-1}{t}.$$

   (d) On en déduit que $f''(t)$ est du signe de $2t-1$ et donc (dessiner le tableau de variations) :
      i. f' est strictement décroissante sur $]0,\dfrac{1}{2}[$,
      ii. f' est strictement croissante sur $]\dfrac{1}{2},+\infty[$,

iii. f' est minimale en $\frac{1}{2}$ et y vaut $f'(\frac{1}{2}) = \ln(2)$

On en conclut que :

$$\forall t > 0,\ f'(t) \geqslant \ln(2) > 0$$

et donc f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$. Par continuité en 0^+, elle est aussi strictement croissante sur $[0, +\infty[$ (non demandé).

(c) On a $f(t) \to 0$ lorsque $t \to 0^+$ tandis que lorsque $t \to +\infty$, par croissance comparée $\frac{1}{t}\ln(t) \to 0$ d'où

$$f(t) = t^2\left(1 - \frac{1}{t}.\ln(t)\right) \to +\infty.$$

On en déduit (théorème de la bijection) que f établit une bijection de $]0, +\infty[$ dans lui-même et l'équation $f(t) = 1$ alors admet une unique solution sur $]0, +\infty[$. Cette solution est 1 car $f(1) = 1^2 - \ln(1) = 1$.

3. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

(a) On a vu que f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$. Par ailleurs $f(1) = 1$ et $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\ln(2) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2} + \ln(2)) \geqslant \frac{1}{2}$ (car $\ln(2) \simeq 0.69 > \frac{1}{2}$).

On en déduit que si $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ alors $f(x) \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ et de là, par récurrence, comme $u_0 = \frac{1}{2} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right].$$

(b) Etudions le signe de $g(t) = f(t) - t$ sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. On a

$$g(t) = t.(t - 1 - \ln(t)) = t.h(t)$$

où on a posé $h(t) = t - 1 - \ln(t)$. Comme

$$\forall t > 0,\ h'(t) = 1 - \frac{1}{t} = \frac{t-1}{t}$$

On en déduit que h est strictement décroissante sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ (car $h' < 0$ sur l'intérieur de cet intervalle) et donc

$$\forall t \in [\tfrac{1}{2}, 1[,\ h(t) > h(1) = 0$$

On en déduit que

$$\forall t \in [\tfrac{1}{2}, 1[,\ g(t) > 0$$

et donc que

$$\forall t \in [\tfrac{1}{2}, 1[,\ f(t) > t$$

(avec égalité lorsque $t = 1$) On en déduit que si $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ et

$$u_{n+1} = f(u_n) \geqslant u_n$$

et donc la suite (u_n) est croissante.

(c) Etant croissante et majorée par 1, la suite (u_n) est convergente, vers une certaine limite $\ell \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

On a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$$

avec, lorsque $n \to +\infty$, $u_{n+1} \to \ell$, $f(u_n) \to f(\ell)$ (car f est continue en ℓ et donc par unicité de la limite,

$$\ell \in \left[\frac{1}{2}, 1\right],\ f(\ell) = \ell$$

et donc $\ell = 1$.

(d) Le programme Python ci-dessous permet d'obtenir le rang n à partir duquel $|u_n - 1| \leqslant 10^{-4}$.

```
import numpy as np

def f(t) :
    return t**2-t*np.log(t)

u = 0.5
n = 0 ; epsilon = 10**(-4)
while np.abs(u-1) > epsilon :
    u = f(u)
    n += 1
```

(e) Si $n.(1 - u_n) \to 2$ lorsque $n \to +\infty$. Comme $\dfrac{2}{n} \simeq 10^{-4}$ si et seulement si $n \simeq 2.10^4$, on peut s'attendre à ce que la valeur de n calculée à la question précédente soit de 20000.

Exercice sans préparation T 4

Soient X et Y deux variables aléatoires de BERNOULLI, de paramètres de succès respectifs p et q.

Montrer que si X et Y sont non corrélées (c'est à dire si leur covariance vaut 0) alors X et Y sont indépendantes.

Montrer par un exemple que ce résultat est faux si X est de BERNOULLI et Y peut prendre trois valeurs différentes.

Solution :

Pour obtenir l'indépendance de X et Y, il nous faut montrer que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=1 \text{ et } Y=1) &= \mathbb{P}(X=1).\mathbb{P}(Y=1)\\
\mathbb{P}(X=1 \text{ et } Y=0) &= \mathbb{P}(X=1).\mathbb{P}(Y=0)\\
\mathbb{P}(X=0 \text{ et } Y=1) &= \mathbb{P}(X=0).\mathbb{P}(Y=1)\\
\mathbb{P}(X=0 \text{ et } Y=0) &= \mathbb{P}(X=0).\mathbb{P}(Y=0)
\end{aligned}$$

Supposons X et Y non corrélées :

$$\mathbb{E}(X.Y) = \mathbb{E}(X).\mathbb{E}(Y) = p.q.$$

La variable $Z = X.Y$ est une v.a. de BERNOULLI de paramètre de succès :

$$r = \mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(X).\mathbb{E}(Y) = p.q.$$

Or $\{Z=1\} = \{X=1\} \cap \{Y=1\}$ et

$$\mathbb{P}(Z=1) = \mathbb{E}(Z) = r = p.q$$

c'est à dire

$$\mathbb{P}(X=1 \text{ et } Y=1) = \mathbb{P}(X=1).\mathbb{P}(Y=1).$$

Maintenant, par passage au complémentaire :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=1 \text{ et } Y=0) &= \mathbb{P}(X=1) - \mathbb{P}(X=1 \text{ et } Y=1) = p - p.q = p.(1-q) = \mathbb{P}(X=1).\mathbb{P}(Y=0)\\
\mathbb{P}(X=0 \text{ et } Y=1) &= \mathbb{P}(Y=1) - \mathbb{P}(X=1 \text{ et } Y=1) = q - p.q = (1-p).q = \mathbb{P}(X=0).\mathbb{P}(Y=1)\\
\mathbb{P}(X=0 \text{ et } Y=0) &= 1 - \mathbb{P}(X=1 \text{ et } Y=1) - \mathbb{P}(X=1 \text{ et } Y=0) - \mathbb{P}(X=0 \text{ et } Y=1) = 1 - p.q - (1-p).q - p.(1-q) =
\end{aligned}$$

Soit $r \in]0,1[$ et prenons Y avec

$$\mathbb{P}(Y=0) = 1-r,\ \mathbb{P}(Y=-1) = \frac{r}{2},\ \mathbb{P}(Y=+1) = \frac{r}{2}$$

et $X = Y^2$.

La v.a. X est de BERNOULLI de paramètre de succès r,

$$\mathbb{E}(Y) = 0,\ \mathbb{E}(X.Y) = \mathbb{E}(Y^3) = \mathbb{E}(Y) = 0$$

et donc X et Y sont non corrélées.

On a

$$\mathbb{P}(X=1 \text{ et } Y=1) = \mathbb{P}(Y=1) = \frac{r}{2},\ \mathbb{P}(X=1).\mathbb{P}(Y=1) = r.\frac{r}{2} \neq \mathbb{P}(X=1 \text{ et } Y=1).$$