Rapport et exercices oraux HEC Mathématiques ECT

Juin 2024

Le bilan de la session 2024 de mathématiques voie T est satisfaisant.

Cette année les notes se sont étalées entre 2 et 18. La moyenne s'établit à 8,94 et l'écart-type à 4,23.

Le niveau d'ensemble des candidats reste assez hétérogène : certaines prestations se sont avérées catastrophiques tandis que le jury a également pu remarquer des candidats très brillants faisant preuve de bonnes capacités de réflexion.

Le jury insiste à nouveau sur sur les points suivants auprès des futurs candidats et de leurs enseignants.

- Le jury continue de remarquer l'existence d'importantes lacunes en calcul chez certains candidats. De même, les théorèmes du cours doivent être connus avec plus de rigueur : hypothèses précises et conclusions.
- Les raisonnements graphiques et les tracés de courbes restent incontournables. Notamment, le jury est en droit d'attendre l'esquisse qualitative d'une courbe après avoir établi un tableau de variation.
- Dans le sillage de l'an dernier, suite à l'introduction des nouveaux programmes, la totalité des sujets contenait au moins une question d'informatique, faisant intervenir soit le langage Python, soit le SQL. On note des progrès en ce domaine, en particulier alors que l'an dernier le jury pouvait noter plusieurs candidats ayant fait l'impasse totale sur le SQL, cela n'a pas été autant le cas cette année. L'informatique sera autant présente lors des sessions futures du concours et il faut donc continuer dans cette voie.
- Les candidats ne doivent pas oublier qu'il s'agit d'un oral. Tout n'est pas joué à l'issue de la préparation. Le jury est extrêmement attentif à la qualité du dialogue qu'il noue avec le candidat. Il est fortement conseillé d'écrire au tableau ce qui est proposé par le jury. Des candidats peuvent se voir attribuer une bonne note alors qu'ils ne traitent pas un grand nombre de questions, tandis que d'autres, ayant l'impression d'avoir pourtant traité tout le sujet, se retrouvent avec une note décevante car leur exposition est trop brouillonne et manque de la rigueur exigible dans le maniement des concepts. Le jury apprécie particulièrement les candidats attentifs à la cohérence de leurs résultats, notamment quand cela leur permet de détecter des erreurs puis de les corriger.
- La question sans préparation est aussi très importante. Il n'est pas nécessaire de la mener à son terme pour faire bonne impression. Le jury est là encore attentif aux qualités de réflexion des candidats. Le candidat n'est pas obligé de parler instantanément en découvrant l'énoncé. Le jury a pu constater que certains candidats, après avoir raté l'exercice préparé, ont redressé la barre sur l'exercice sans préparation.
- Il est important de participer à la journée de l'oral ou, au moins, de la visionner. Elle répond aux questions de l'organisation et des attendus de chaque oral.
  Cela permet aux étudiants d'apprendre le déroulement d'un oral du point de vue des membres du jury.

Voici les sujets proposés cette année. Nous publions aussi leurs corrigés, mais insistons sur le fait que ces corrigés sont indicatifs, ont été écrits à l'intention des membres du jury et ne correspondent pas toujours exactement à ce que l'on peut attendre des élèves.

SUJET T 1

Exercice T 1

1. Cours.
   Définition d'une suite arithmétique.
   Somme des n premiers entiers naturels strictement positifs.
   En déduire la somme des n premiers impairs.

   Soit n un entier supérieur ou égal à 2 .
   La cible d'un forain est partagée en n zones délimitées par n cercles concentriques de rayons respectifs $1, 2, \ldots, n$.
   Pour $k \in \{2, \ldots, n\}$, Z_k est la zone délimitée par les cercles de rayons $k-1$ et k.
   On note Z_1 le disque de rayon 1.
   On note Z_0 la zone hors de la cible.
   Jean, muni d'un arc et de flèches, doit s'entraîner pour les prochains J.O.
   Lorsqu'il tire, il touche la cible 3 fois sur 4 .
   Lorsqu'il touche la cible, la probabilité qu'il atteigne la zone Z_k est proportionnelle à l'aire de Z_k.
   On admettra que la probabilité qu'il touche l'un des cercles délimitant les zones est nulle.
2. (a) Quelle est l'aire a_k de Z_k pour $k \in \{1, .., n\}$?
   (b) On note p_k la probabilité que la flèche atteigne Z_k pour $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ Que vaut p_k pour $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$?
3. Soit X la variable aléatoire égale au numéro de la zone atteinte lors d'un tir.
   Ecrire, en Python, une fonction `simuleX(n)` qui prend en argument l'entier n et renvoie une simulation de X.
   On pourra, lorsque Jean atteint la cible, choisir au hasard un élément entre 1 et n^2 et retourner le numéro de la zone atteinte.
   Par exemple, si $n = 4$ et si on choisit 8 dans $\{1, \ldots, 16\}$, alors X prend la valeur 3.
4. Jean tire une flèche.
   S'il atteint Z_k avec $k \in \{1, \ldots, n\}$ il gagne $g_k = n^2 - k^2 + 1$ et ne gagne rien s'il rate la cible ($g_0 = 0$).
   On appelle G_n la variable aléatoire égale au gain pour un tir.
   On admet que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$.
   Quelle est l'espérance $\mathbb{E}(G_n)$ de G_n ?
5. Jean et Martin s'affrontent et tirent chacun une flèche.
   Martin, comme Jean, atteint la cible 3 fois sur 4 et la probabilité qu'il atteigne la zone Z_k est alors encore proportionnelle à l'aire de Z_k.
   On suppose que les tirs sont indépendants.
   Quelle est la probabilité que le gain de Martin soit supérieur ou égal à celui de Jean ?

Solution :

1. Cours : $(u_n)_{n\in N}$ est arithmétique $\Leftrightarrow \quad \exists r \in \mathbb{R} \quad \forall n \in N \quad u_{n+1} = u_n + r$.

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = 2 \times \frac{n(n+1)}{2} - n = n^2.$$

2. (a) $\forall k \in \{2,..,n\} \quad a_k = \pi k^2 - \pi(k-1)^2 = (2k-1)\pi$ et $a_1 = \pi$.

   (b) Soit C l'événement : « Jean atteint la cible ». $p_0 = 1 - P(C) = \dfrac{1}{4}$. Pour $k \in \{1,\ldots,n\}$, on pose $p'_k = P_C$ (« Z_k atteint »). Les p'_k où $k \in \{1,..n\}$ sont proportionnels aux n premiers impairs, donc :

$$\frac{p'_1}{1} = \ldots = \frac{p'_k}{2k-1} = \ldots = \frac{p'_n}{2n-1} = \frac{\sum_{k=1}^n p'_k}{\sum_{k=1}^n (2k-1)} = \frac{1}{n^2}$$

   Donc $\forall k \in \{1,\ldots,n\} \quad p'_k = \dfrac{2k-1}{n^2}$ et $\quad p_k = \dfrac{3}{4}p'_k = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{2k-1}{n^2}$

3. Python.

```
import numpy as np
import numpy. random as rd

def X(n) :
    if rd.randint(1,4)==1 :
        z=0
    else:
        x=rd. randint(1, n**2+1)
        k=1
        while x>k**2 :
            k=k+1
        z=k
    return z
```

   Explications : On teste si la cible est ratée : on a une chance sur 4 de choisir 1 dans $\{1,2,3,4\}$ et alors $z = 0$ sinon on choisit un entier x entre 1 et n^2 compris et on cherche le numéro de la zone où se trouve x.

4. Par définition $\mathbb{E}(G_n) = \sum_{k=0}^n p_k g_k$ Or $g_0 = 0$ donc

$$\begin{aligned}
\frac{4}{3}\mathbb{E}(G_n) &= \sum_{k=1}^n p'_k g_k = \sum_{k=1}^n \frac{2k-1}{n^2}\left(n^2 - k^2 + 1\right) \\
&= \frac{1}{n^2}\left[\left(n^2+1\right)\sum_{k=1}^n (2k-1) - \sum_{k=1}^n \left(2k^3 - k^2\right)\right] = n^2 + 1 - \frac{n+1}{6n}\left(3n^2+n-1\right)
\end{aligned}$$

   d'où finalement :

$$\mathbb{E}(G) = \frac{3}{4}\left[n^2 + 1 - \frac{n+1}{6n}\left(3n^2+n-1\right)\right]$$

5. Soit J_k l'événement : « Jean tire et atteint Z_k » pour $k \in \{0,1,\ldots,n\}$ M_k : "« la flèche de Martin atteint le disque de rayon k » pour $k \in \{1,\ldots,n\}$ et M_0 : « Martin atteint la cible ou la rate ».
   Soit A : « le gain de Martin est supérieur ou égal à celui de Jean ».
   Alors :

$$A = \bigcup_{k=0}^n \left(J_k \bigcap M_k\right) \quad \text{(union disjointe).}$$

   d'où :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= \sum_{k=0}^n P\left(J_k\right) \times P\left(M_k\right) \text{ (tirs indépendants)} \\
&= \frac{1}{4} \times 1 + \sum_{k=1}^n \frac{3}{4}\frac{2k-1}{n^2} \times \frac{3}{4}\frac{k^2}{n^2} \\
&= \frac{1}{4} + \frac{9}{16n^4}\left(2\sum_{k=1}^n k^3 - \sum_{k=1}^n k^2\right) \\
&= \frac{1}{4} + \frac{3(n+1)\left(3n^2+n-1\right)}{32n^3}
\end{aligned}$$

Exercice sans préparation T 1

Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -3 & 4 & -2 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. On note C_1, C_2 et C_3 les colonnes de P.

1. Calculer AP.
2. Donner des valeurs propres de A et des vecteurs propres associés.
3. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
4. Calculer $P^{-1}AP$. La matrice A est-elle diagonalisable ? est-elle inversible ?

Solution :

1. $AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$
2. On remarque que : $AC_1 = C_1, AC_2 = 2C_2$ et $AC_3 = -C_3$
   Comme les C_k sont non nuls, on en déduit que :
   — 1 est valeur propre et C_1 est un vecteur propre associé ;
   — 2 est valeur propre et C_2 est un vecteur propre associé ;
   — -1 est valeur propre et C_3 est un vecteur propre associé.
3. On résoud $P\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= & b-c \\ y &= & -a+b \\ z &= & a+b-c \end{cases}$
   Le système est de Cramer Donc P est inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
4. $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = D$.
   D est diagonale, A est donc diagonalisable.
   D est inversible car sans 0 sur la diagonale. $A = PDP^{-1}$ est invesible comme produit de trois matrices inversibles.
   N.B. A est diagonalisable car elle a trois valeurs propres distinctes (hors programme).

SUJET T 2

Exercice T 2

On considère X une variable aléatoire à valeurs dans $]0,1[$ et de loi uniforme sur $]0,1[$.
On pose : $Z = \dfrac{1-X}{X}$.

1. Définition d'une variable aléatoire à densité.
2. Déterminer $\mathbb{P}(Z \geqslant 2)$.
3. (a) Vérifier que Z prend ses valeurs dans $]0,+\infty[$.
   (b) Soient $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tels que $a \leqslant b$. Déterminer $(\alpha,\beta) \in]0,1[^2$ tels que $\alpha \leqslant \beta$ et que :
   $$a \leqslant Z \leqslant b \iff \alpha \leqslant X \leqslant \beta$$
   (c) En déduire $\mathbb{P}(Z \in [a,b])$ puis la fonction de répartition de la variable aléatoire Z.
4. Vérifier que Z est une variable aléatoire à densité et en déterminer une densité.
5. La variable aléatoire Z admet-elle une espérance ?
6. (a) Vérifier que, pour $0 < a \leqslant b$, $\mathbb{P}(a \leqslant Z \leqslant b) = \mathbb{P}(1/b \leqslant Z \leqslant 1/a)$.
   Qu'en déduit-on pour les lois de Z et de $1/Z$?
   (b) Retrouver ce résultat en exprimant la variable $1/Z$ en fonction de $Y = 1 - X$.
7. On brise une tige de longueur 1 en choisissant au hasard le point de rupture suivant une loi uniforme sur $]0,1[$. On note X la longueur du morceau de gauche.
   Quelle est la probabilité pour que l'un des deux morceaux soit au moins deux fois plus long que l'autre ?

Solution :

1. Programme ECT 2 p. 9.
2. Par un calcul immédiat : $\mathbb{P}(Z \geqslant 2) = \mathbb{P}(X \leqslant 1/3) = 1/3$.
3. (a) Comme $X > 0$ et $1 - X > 0$, $Z > 0$.
   (b) Soit $f : x \mapsto \dfrac{1-x}{x} = \dfrac{1}{x} - 1$. On vérifie que f est une bijection décroissante de $]0,1[$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $f^{-1} : x \mapsto \dfrac{1}{1+y}$. On en déduit que :
   $$a \leqslant Z \leqslant b \iff a \leqslant f(X) \leqslant b \iff f^{-1}(b) \leqslant X \leqslant f^{-1}(a)$$
   On peut donc choisir $\alpha = f^{-1}(b) = \dfrac{1}{1+b}$ et $\beta = f^{-1}(a) = \dfrac{1}{1+a}$.
   (c) On en déduit que : $\mathbb{P}(Z \in [a,b]) = \mathbb{P}(X \in \left[\dfrac{1}{1+b}, \dfrac{1}{1+a}\right] = \dfrac{1}{1+a} - \dfrac{1}{1+b} = \dfrac{b-a}{(1+a)(1+b)}$ Soit $x > 0$.
   De même :
   $$\mathbb{P}(Z \leqslant x) \iff \mathbb{P}(f(X) \leqslant x) \iff \mathbb{P}(X \geqslant f^{-1}(x)) \iff \mathbb{P}\left(X \geqslant \frac{1}{1+x}\right) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$$
4. On peut écrire :
   $$\mathbb{P}\left(Z \leqslant \frac{1}{1+x}\right) = \frac{1}{1+x} = \int_0^x \frac{1}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^x f_Z(t)\,\mathrm{d}t$$
   avec
   $$f_Z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{(1+x)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

La fonction f_Z est positive sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}^*$ et :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_Z(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{1+t}\right]_0^{+\infty} = 1$$

La fonction f_Z est donc une densité de probabilité et Z est bien une variable à densité.

5. On peut calculer, pour $A > 0$ fixé :

$$\int_0^A \frac{x}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^A \left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2}\right)\,\mathrm{d}x = \left[\ln(1+x) + \frac{1}{1+x}\right]_0^A = \ln(1+A) + \frac{1}{1+A} - 1 \xrightarrow[A\to+\infty]{} +\infty$$

La variable aléatoire Z n'admet donc pas d'espérance.

6. (a) Le résultat demandé découle de 3.c) en remarquant que :

$$\frac{1/a - 1/b}{(1+1/b)(1+1/a)} = \frac{(b-a)/ab}{(1+a)(1+b)/ab} = \frac{b-a}{(1+a)(1+b)}$$

On en déduit de manière immédiate que Z et $1/Z$ ont la même loi car

$$\mathbb{P}(a \leqslant 1/Z \leqslant b) = \mathbb{P}(1/b \leqslant Z \leqslant 1/a) = \mathbb{P}(a \leqslant Z \leqslant b)$$

.

(b) En posant $Y = 1 - X$, on obtient $Z = \dfrac{Y}{1-Y}$ d'où $1/Z = \dfrac{1-Y}{Y}$. Or Y suit également une loi uniforme sur $]0,1[$ donc Z et $1/Z$ suivent la même loi.

7. Le morceau de gauche est de longueur X, celui de droite de longueur $1-X$. En notant toujours $Z = \dfrac{1-X}{X}$, l'événement « l'un des deux morceaux est au moins deux fois plus long que l'autre » s'écrit $\{Z \geqslant 2\} \cup \{1/Z \geqslant 2\}$. Les événements $\{Z \geqslant 2\}$ et $\{1/Z \geqslant 2\}$ sont incompatibles d'où :

$$\mathbb{P}(\{Z \geqslant 2\} \cup \{1/Z \geqslant 2\}) = \mathbb{P}(Z \geqslant 2) + \mathbb{P}(1/Z \geqslant 2) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

d'après les questions 2., 3.c) et 6.

Exercice sans préparation T 2

On considère une base de données `triangles` constituée d'une seule table dont le schéma relationnel est le suivant :

`triangles( idt:integer, ab:integer, ac:integer, bc:integer)`

Chaque ligne représente les longueurs d'un triangle ABC ainsi qu'un identificateur unique `idt` qui joue donc le rôle de clé primaire.

On rappelle les instructions suivantes en SQL :

— la fonction `COUNT` renvoie le nombre de résultats d'une requête ;

— la fonction `MAX` renvoie la valeur maximale des résultats d'une requête.

1. Ecrire une requête SQL permettant d'obtenir la liste des triangles équilatéraux.
2. Ecrire une requête SQL permettant d'obtenir le nombre de triangles rectangles en A.
3. Ecrire une requête SQL permettant d'obtenir le triangle rectangle en A de périmètre maximal.

Solution :

1.
```
SELECT *
FROM triangles
WHERE ac=ab AND ac=bc
```

2.
```
SELECT COUNT(*)
FROM triangles
WHERE ac*ac+ab*ab=bc*bc
```

3. Avec la fonction MAX

```
SELECT idt, MAX(ab+ac+bc)
FROM triangles
WHERE ac*ac+ab*ab=bc*bc
```

ou sinon, en triant les résultats (moins bien) :

```
SELECT idt, ab+ac+bc AS p
FROM triangles
WHERE ac*ac+ab*ab=bc*bc ORDER BY p DESC
```

SUJET T 3

Exercice T 3

On admet dans cet exercice le résultat suivant : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

1. Définition des fonctions puissances généralisées (exposant réel).
2. (a) Montrer que, pour tout $x > 0$: $\ln(x) \leqslant x - 1$
   (b) En déduire que, pour tout $x > 0$: $\ln x \geqslant 1 - \dfrac{1}{x}$.
3. On pose $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$.
   (a) Quel est l'ensemble de définition de f ?
   (b) Calculer $f'(x)$ et déterminer son signe grâce à la question 2.b).
   (c) Déterminer, si elles existent, les quatre limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(f(x)), \quad \lim_{x\to 0^+} f(x), \quad \lim_{x\to +\infty} \ln(f(x)) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to +\infty} f(x)$$

4. Déduire des question précédentes que, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$2 \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leqslant e$$

5. On pose $u_n = \dfrac{n^n}{n!}$.
   (a) Pour $n \geqslant 1$, simplifier $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.
   En déduire, pour $n \geqslant 1$, un encadrement de u_{n+1} faisant intervenir u_n.
   (b) Montrer par récurrence sur n : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 2^{n-1} \leqslant u_n \leqslant e^{n-1}$.
   (c) En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$e\left(\frac{n}{e}\right)^n \leqslant n! \leqslant 2\left(\frac{n}{2}\right)^n$$

Solution :

1. Programme ECT 1 p. 15.
2. (a) C'est de la convexité. Ou bien on considère la fonction $\phi : x \mapsto \ln(x) - x + 1$. Alors ϕ est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$ et, pour tout $x > 0$, $\phi'(x) = \dfrac{1}{x} - 1$. Ainsi $\phi'(x) > 0$ pour $0 < x < 1$, $\phi'(x) < 0$ pour $x > 1$ et $\phi'(1) = 0$. On en déduit que la fonction ϕ admet un maximum en $x = 1$ d'où, pour $x > 0$, $\phi(x) \leqslant \phi(1) = 0$ et donc finalement : $\boxed{\ln x \leqslant x - 1}$ pour $x > 0$.
   (b) Soit $x > 0$. Alors $\dfrac{1}{x} > 0$ donc par la question précédente :

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant \frac{1}{x} - 1 \quad \text{soit} \quad -\ln x \leqslant \frac{1}{x} - 1 \quad \text{d'où finalement} \quad \boxed{\ln x \geqslant 1 - \frac{1}{x}}$$

3. On pose $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$.

(a) Par définition des fonctions puissances générales,

$$f(x) = \exp\left(x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)$$

Et donc, si D_f désigne l'ensemble de définition de f :

$$\begin{aligned}
x \in D_f &\iff x \neq 0 \text{ et } 1 + \frac{1}{x} > 0 \\
&\iff x > 0 \text{ ou } (x < 0 \text{ et } -\frac{1}{x} < 1) \\
&\iff x > 0 \text{ ou } (x < 0 \text{ et } -x > 1) \text{ par passage à l'inverse pour des nombres positifs} \\
&\iff x > 0 \text{ ou } (x < 0 \text{ et } x < -1) \\
&\iff x > 0 \text{ ou } x < -1
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{D_f =]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[}$$

(b) La fonction f est dérivable sur D_f par les théorèmes généraux et, pour $x \in D_f$:

$$\begin{aligned}
\underline{f'(x)} &= \left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + x \times \frac{-1}{x^2} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}\right) \exp\left(x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right) \\
&= \left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} \times \frac{1}{\frac{x+1}{x}}\right) \exp\left(x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right) \\
&= \underline{\left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right) \exp\left(x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)}
\end{aligned}$$

Ainsi, le signe de $f'(x)$ est le même que celui de :

$$\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$$

Or :

$$\begin{aligned}
\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} &= \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} \\
&\geqslant 1 - \frac{x}{x+1} - \frac{1}{x+1} \quad \text{par la question 1.b)} \\
&\geqslant 1 - \frac{x+1}{x+1} \\
&\geqslant 0
\end{aligned}$$

Ainsi, pour $x \in D_f$: $\boxed{f'(x) \geqslant 0}$

(c) Remarquons tout d'abord que $\ln(f(x)) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$. Pour le calcul de la limite en 0^+ on écrit alors :

$$\ln(f(x)) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{\ln \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} + x \ln(x+1)$$

Alors, $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{\ln X}{X} = 0^+$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln(x+1) = 0^+$. Finalement :

$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} \ln f(x) = 0^+} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1}$$

Pour la limite en $+\infty$, on a :

$$\lim_{x \to +\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{X \to 0^+} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1$$

d'où :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \ln f(x) = 1} \quad \text{puis} \quad \boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = e}$$

4. La dérivée de f est positive sur $]0,+\infty[$ d'après la question 2.b) donc la fonction f est croissante sur cet intervalle. On en déduit que, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f(1) \leqslant f(n) \leqslant \lim_{x\to+\infty} f(x)$$

soit :

$$\boxed{2 \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant e}$$

ce qui est le résultat demandé.

5. On pose $u_n = \dfrac{n^n}{n!}$.

(a) On calcule :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Par la question précédente, on a donc, pour $n \geqslant 1$:

$$2 \leqslant \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant e \quad \text{soit} \quad \boxed{2u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant eu_n}$$

car u_n est positif.

(b) Pour $n = 1$, on a $u_1 = 1$ et donc $2^0 = 1 \leqslant u_1 \leqslant e^0 = 1$. La propriété est donc vraie.
Soit maintenant $n \geqslant 1$ tel que $2^{n-1} \leqslant u_n \leqslant e^{n-1}$. Alors, par la question précédente : $2u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant eu_n$ et par l'hypothèse de récurrence $2^n = 2 \times 2^{n-1} \leqslant 2u_n$ tandis que $eu_n \leqslant ee^{n-1} = e^n$. On en déduit donc que $2^n \leqslant u_{n+1} \leqslant e^n$, ce qui prouve le résultat au rang $n+1$.
On en déduit donc, en vertu du principe de récurrence que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 2^{n-1} \leqslant u_n \leqslant e^{n-1}}$$

(c) L'inégalité précédente se réécrit, pour $n \geqslant 1$:

$$\frac{2^n}{2} \leqslant \frac{n^n}{n!} \leqslant \frac{e^n}{e}$$

De la première inégalité, en passant à l'inverse on obtient, toutes les quantités étant positives : $\dfrac{n!}{n^n} \leqslant 2\dfrac{1}{2^n}$ soit encore $n! \leqslant 2\left(\dfrac{n}{2}\right)^n$ tandis que la seconde donne, par des calculs similaires : $\dfrac{n!}{n^n} \geqslant e\dfrac{1}{e^n}$ soit encore $n! \geqslant e\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$. En rassemblant ces deux inégalités, on a donc finalement prouvé, pour $n \geqslant 1$:

$$\boxed{e\left(\frac{n}{e}\right)^n \leqslant n! \leqslant 2\left(\frac{n}{2}\right)^n}$$

Exercice sans préparation T 3

Alice et Bob s'intéressent au lancer de trois pièces équilibrées et plus particulièrement à la probabilité que les trois pièces tombent du même côté.

1. Ecrire le code Python du fonction `simule3()` qui simule le lancer des trois pièces équilibrées et renvoie `True` si les trois pièces tombent du même côté et `False` sinon.
2. Alice tient le raisonnement suivant : « si je lance trois pièces ordinaires, il y a une chance sur quatre pour qu'elles tombent toutes les trois du même côté : sur les huit tirages possibles, seuls PPP et FFF sont favorables. ».
   Quant à Bob, voici ce qu'il dit : « si je lance trois pièces, il y en a toujours deux qui tombent du même côté. Il y a une chance sur deux pour que la troisième tombe de ce côté ».
   Lequel de ces deux raisonnements est correct ? Expliquez pourquoi, ainsi que l'erreur commise dans le raisonnement fautif.

Solution :

1.
```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def simule3():
    s=0
    for i in range(3):
        s=s+rd.randint(2)
    return (s==0 or s==3)

# il est alors facile de réaliser une estimation de la probabilité recherchée

def estimation(n):
    s=0
    for i in range(n):
        if simule3():
            s+=1
    return s/n
```

2. C'est Alice qui a raison. Elle raisonne par dénombrement en utilisant l'équiprobabilité : parmi les huit tirages possibles seuls deux sont effectivement favorables.
   Dans le raisonnement de Bob, il y a un conditionnement implicite fautif. Il fait comme s'il conditionnait par un événement de probabilité 1, mais ce faisant il néglige le fait que, s'il y a effectivement toujours au moins deux pièces qui tombent du même côté, il ne sait pas desquelles il s'agit. Or, cela intervient dans le raisonnement. Formalisons cela afin de corriger le raisonnement de Bob.
   Soit pour $(i,j) \in \{1,2,3\}^2$ avec $i<j$, $A_{i,j}$ l'événement « les pièces i et j tombent du même coté ». Alors $(A_{1,2}, A_{1,3}, A_{2,3})$ est un système complet d'événements. Notons S :« les trois pièces tombent du même côté ».
   On a de manière immédiate $\mathbb{P}(A_{i,j}) = \dfrac{1}{2}$.
   Alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S) &= \mathbb{P}(A_{1,2} \cap A_{1,3}) \\
&= \mathbb{P}(A_{1,2}|A_{1,3})\mathbb{P}(A_{1,3}) \\
&= \mathbb{P}(A_{1,2})\mathbb{P}(A_{1,3}) \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Une autre manière de voir cela est la suivante : Bob dit que S est la même chose que $S \cap ((A_{1,2} \cup A_{1,3} \cup A_{2,3}))$, mais il se trompe en disant que cette probabilité est juste égale à une probabilité du type $\mathbb{P}(A_{i,j})$. En effet, en toute rigueur :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S) &= \mathbb{P}(S \cap (A_{1,2} \cup A_{1,3} \cup A_{2,3})) \\
&= \mathbb{P}((S \cap A_{1,2}) \cup (S \cap A_{1,3}) \cup (S \cap A_{2,3})) \\
&= \mathbb{P}(S \cap A_{1,2}) + \mathbb{P}(S \cap A_{1,3}) + \mathbb{P}(S \cap A_{2,3}) - \mathbb{P}(A_{1,2} \cap A_{1,3}) \\
&\quad -\mathbb{P}(A_{1,2} \cap A_{2,3}) - \mathbb{P}(A_{1,3} \cap A_{2,3} + \mathbb{P}(A_{1,2} \cap A_{1,3} \cap A_{2,3}) \\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$