Les exercices suivants, posés aux candidats des options scientifique, économique, technologique et littéraire B/L, constituent un échantillon de l'ensemble des exercices proposés lors des épreuves orales du concours 2007.

A. Exercices donnés en option scientifique

1° Densité de la somme de deux variables aléatoires réelles X et Y, définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes, de densités respectives f_X et f_Y.

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi uniforme sur $[0,1]$, définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On pose, pour tout $n \geqslant 1$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} U_k \,.$$

On note f_n une densité de S_n et F_n sa fonction de répartition.

2° **a)** Exprimer $f_{n+1}(x)$ à l'aide de la fonction F_n. Montrer ensuite que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$F_{n+1}(x) = \int_{x-1}^{x} F_n(y)\,\mathrm{d}y \,.$$

b) En déduire un calcul explicite de F_2. La fonction F_2 est-elle de classe $\mathcal{C}^1$? de classe $\mathcal{C}^2$?

c) En déduire un calcul explicite de $F_n(x)$ pour tout $x \in [0,1]$.

3° Soit $t \in]0,1[$. On note

$$T_t = \mathrm{Inf}\left\{ n \geqslant 1\,,\ S_n > t \right\} .$$

Déterminer la loi de T_t. Calculer l'espérance de T_t.

On pose, pour a réel positif et x réel,

$$\varphi_a(x) = \int_a^x \frac{\mathrm{e}^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{d}t \,.$$

1° Rappeler le théorème des accroissements finis et en déduire qu'il existe $k \in]0,1[$ tel que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\big|\varphi_0(x) - \varphi_0(y)\big| \leqslant k\,|x-y| \,.$$

2° On se donne $u_0 \in \mathbb{R}^+$ et on considère la suite de premier terme u_0 et définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = \varphi_0(u_n)$ pour $n \geqslant 0$.

a) Déduire de la question précédente que $\forall\, n \in \mathbb{N}\,,\ |u_{n+1}| \leqslant k\,|u_n|$, puis montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

b) Retrouver la convergence de cette suite en examinant ses propriétés.

3° La suite définie par $v_0 = u_0$ et par la relation de récurrence $v_{n+1} = \varphi_1(v_n)$ pour $n \geqslant 0$ converge-t-elle ?

4° Soit un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et une variable aléatoire U_0 définie sur Ω, suivant la loi uniforme sur le segment $[0,\alpha]$, avec $\alpha > 0$. On considère la relation $U_{n+1} = \varphi_0(U_n)$.

a) Montrer que l'on définit ainsi une suite de variables aléatoires à densité.

b) Étudier la convergence en probabilité de cette suite de variables aléatoires.

5° On suppose maintenant que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la variable aléatoire T_n suit une loi uniforme sur $[0,n]$.

a) Montrer qu'il existe une constante C telle que pour tout $x \geqslant 0$,

$$\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{d}t \leqslant C\,\mathrm{e}^{-x} \,.$$

b) En déduire que $\big(\varphi_0(T_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers une constante à déterminer.

Donner la définition d'une loi hypergéométrique et la valeur de son espérance.

1° Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $[\![0,n]\!]$. On suppose que :

$$\Big[\ \forall\, p \in [\![1,n]\!]\,,\quad \mathbb{E}(X^p) = \mathbb{E}(Y^p)\Big] \qquad (1)$$

Pour $k \in [\![1,n]\!]$, on pose $a_k = \mathbb{P}\big([X=k]\big)$, $b_k = \mathbb{P}\big([Y=k]\big)$ et $c_k = a_k - b_k$.

a) Montrer que les conditions (1) se traduisent par l'existence d'une matrice carrée A de taille n telle que

$$A\,C = 0\,, \quad \text{où l'on a posé} \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}\,.$$

On note $L_1, \dots, L_n$ les vecteurs-ligne de A.

b) Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ (dépendant des λ_i) tel que :

$$\lambda_1\,L_1 + \cdots + \lambda_n\,L_n = 0 \Leftrightarrow P(1) = \cdots = P(n) = 0\,.$$

c) En déduire que A est inversible puis que X et Y ont même loi.

2° On considère une urne contenant a boules blanches et b boules noires avec a et b entiers strictement positifs vérifiant $a + b \geqslant n \geqslant 3$ (n entier). On effectue n tirages avec remise et on note X le nombre de boules blanches obtenues. Puis on effectue n tirages sans remise et on note Y le nombre de boules blanches obtenues.

Donner la plus petite valeur de k telle que $\mathbb{E}\big(\big[X - \mathbb{E}(X)\big]^k\big) \neq \mathbb{E}\big(\big[Y - \mathbb{E}(Y)\big]^k\big)$. Indication : On pourra considérer $\mathbb{E}\big(Y\,(Y-1)\big)$.

Pour une variable aléatoire à densité, énoncer les propriétés caractéristiques d'une fonction de répartition, respectivement d'une densité.

Les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Soit U une variable aléatoire réelle de loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$. On pose

$$X = -\ln\left(\frac{2U}{1+U}\right)\,.$$

1° Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire X.

2° En déduire une densité de la variable X.

3° Calculer $\mathbb{E}(X)$ en justifiant son existence.

4° Soit V une variable aléatoire à valeurs dans $\{0, 1\}$, indépendante de U et telle que

$$\mathbb{P}\big([V = 1]\big) = \frac{1}{2}\,.$$

Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire

$$Y = V\,X + (1 - V)\,X^2\,.$$

5° Écrire un algorithme de simulation de la variable Y.

6° On pose $Z = \mathbb{I}_{U>1/2}\,.X$. Déterminer la fonction de répartition de la variable Z et tracer la courbe représentative de cette fonction.

7° Z est-elle une variable aléatoire à densité ?

8° Calculer $\mathbb{E}(Z)$.

9° Écrire un algorithme de simulation de Z.

Soit E un espace vectoriel réel.

a) Si $x_1, \dots, x_p$ sont des vecteurs de E, donner la définition de : « la famille $(x_1, \dots, x_p)$ est libre. » Que peut-on dire de p si $(x_1, \dots, x_p)$ est une famille libre et que E est de dimension finie ?

b) Soit f un endomorphisme de E. On suppose qu'il existe un entier naturel non nul p tel que

$$f^p = 0 \quad \text{et} \quad f^{p-1} \neq 0$$

(pour $k \in \mathbb{N}^*$, f^k désigne $f \circ f \circ \cdots \circ f$ où f apparaît k fois, et $f^0 = \mathrm{Id}_E$).
Montrer que si $x \in E$ est tel que $f^{p-1}(x)$ n'est pas le vecteur nul, alors la famille

$$\Big(x, f(x), \dots, f^{p-1}(x)\Big)$$

est libre.

1° a) Montrer que si $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et qu'il existe un entier naturel p tel que $A^p = 0$, alors $A^3 = 0$.

b) Existe-t-il une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad ?$$

2° a) Déterminer les triplets $(A, B, C) \in (\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))^3$ tels que, si on pose, pour t réel,

$$\varphi(t) = \mathrm{Id}_3 + tA + t^2B + t^3C$$

alors

$$\forall\, t \in \mathbb{R}\,, \qquad \big(\varphi(t)\big)^2 = \varphi(2t)\,.$$

b) Pour un tel triplet, calculer $\varphi(t) \times \varphi(t')$ où $(t, t') \in \mathbb{R}^2$.

On note E l'ensemble des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ dont l'intégrale sur le segment $[0,1]$ est nulle. Si f appartient à E, on note $\|f\|_\infty = \underset{t\in[0,1]}{\mathrm{Max}} |f(t)|$.

1° a) Énoncer la formule des accroissements finis pour une fonction réelle d'une variable réelle.

b) Soit f une fonction réelle d'une variable réelle dérivable sur un intervalle I. Justifier que f est croissante sur I.

2° Soit φ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x,

$$\varphi(x) = \int_0^1 |x + t|\, \mathrm{d}t\,.$$

a) Expliciter $\varphi(x)$ et montrer que φ possède un minimum sur $\mathbb{R}$ que l'on déterminera.

b) Quel est le plus grand entier naturel k pour lequel φ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$?

3° Montrer que si f appartient à E, f admet une unique primitive appartenant à E, qu'on notera $P(f)$, et exprimer $P(f)(x)$, pour $x \in [0,1]$, en fonction de

$$\int_0^x f(t)\, \mathrm{d}t \quad \text{et de} \quad \int_0^1 t\, f(t)\, \mathrm{d}t\,.$$

4° Si $f \in E$ et $x \in [0,1]$, on note f_x l'application de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout t appartenant à $[0,1]$,

$$f_x(t) = \begin{cases} f(t+x) & \text{si} \quad t \in [0, 1-x[\\ f(t-1+x) & \text{si} \quad t \in [1-x, 1]\,. \end{cases}$$

Calculer $\displaystyle\int_0^1 f_x(t)\, \mathrm{d}t$ et comparer $\displaystyle\int_0^1 t f_x(t)\, \mathrm{d}t$ à $P(f)(x)$.

5° En déduire que si f appartient à E, pour tout x appartenant à $[0,1]$,

$$\big|P(f)(x)\big| \leqslant \frac{1}{4}\, \|f\|_\infty\,.$$

Rappeler les définitions d'un estimateur, d'un estimateur sans biais, et d'un estimateur convergent.

Soit X une variable aléatoire à valeurs réelles, discrète ou à densité, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, possédant des moments de tout ordre, c'est-à-dire que, pour tout q de $\mathbb{N}^*$, $m_q = \mathbb{E}(X^q)$ existe.
Pour n entier de $\mathbb{N}^*$, on considère un n-échantillon indépendant, identiquement distribué $\big(X_1, X_2, \ldots, X_n\big)$ de la loi de X.
Pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$Z_q = X^q \quad \text{et} \quad \overline{Z}_{n,q} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^q\,.$$

1° Montrer que la suite de variables aléatoires

$$U_n = \sqrt{n}\, \frac{\overline{Z}_{n,q} - m_q}{\sqrt{m_{2q} - m_q^2}}$$

converge en loi vers une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.

On suppose dorénavant que $q = 2$ et que X suit une loi normale centrée de variance σ^2 (avec $\sigma > 0$).

2° a) Calculer $\mathbb{E}(Z_2)$ et $\mathbb{E}\big(Z_2^2\big)$ en fonction de σ^2.

b) En déduire que la suite de variables aléatoires

$$V_n = \sqrt{\frac{n}{2}}\,\frac{\overline{Z}_{n,2} - \sigma^2}{\sigma^2}$$

converge en loi vers une variable aléatoire T qui suit la loi normale centrée réduite.

3° On suppose que σ^2 est inconnu.
Soit u_α le réel tel que :

$$\mathbb{P}\big([T \leqslant u_\alpha]\big) = 1 - \frac{\alpha}{2}\,,$$

où la probabilité α est donnée dans $]0,1[$.

Déterminer, pour n assez grand, un intervalle de confiance pour le paramètre σ^2 au risque α donné.

Donner les formules des développements limités d'ordre 1 et 2 d'une fonction g de n variables au voisinage d'un point en rappelant les hypothèses vérifiées par g dans chaque cas.

On considère $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique usuel $\langle\ ,\ \rangle$.
On note $\|\ \|$ la norme associée à ce produit scalaire et on identifiera $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ avec $\mathbb{R}^n$.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que l'application $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(X,Y) = {}^tXAY$ soit un produit scalaire sur $(\mathbb{R}^n)$.

1° Vérifier que A est symétrique. Montrer que ses valeurs propres sont strictement positives.

Dans la suite de l'exercice, on considère un vecteur B de $\mathbb{R}^n$ et on définit l'application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ par :

$$\forall X \in \mathbb{R}^n\,, \quad f(X) = \frac{1}{2}\,{}^tXAX - {}^tBX\,.$$

2° **a)** On note μ la plus petite des valeurs propres de la matrice A.
Montrer que $\forall\, X \in \mathbb{R}^n, \quad {}^tXAX \geqslant \mu\|X\|^2$.

b) f est-elle majorée ?

3° *On admet* que l'ensemble des $X \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$|f(X)| \leqslant \frac{\|B\|^2}{2\mu}$$

est un fermé.
Montrer que f admet un minimum absolu sur $\mathbb{R}^n$.

4° Montrer que la fonction f admet un unique point critique, donné par $X_0 = A^{-1}B$.

5° Vérifier que ce point critique correspond bien à un minimum.

6° Application : On considère

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\,.$$

Déterminer le point où f atteint son minimum.

Rappeler la définition d'un polynôme annulateur d'un endomorphisme, et le lien avec les valeurs propres de cet endomorphisme.

On considère un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$, dont la matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ vérifie :

$$(A - I)\,(A - 2I)^2 = 0\,.$$

1° Justifier que A est inversible et exprimer A^{-1} comme un polynôme en A.

On suppose désormais que 1 *est valeur propre de* A *et on note* E_1 *le sous-espace propre associé.*

2° Montrer que si $\dim(E_1) \geqslant 2$, alors A est diagonalisable (on pourra distinguer deux cas selon que 2 est ou non valeur propre de A).

3° On suppose que A n'est pas diagonalisable et on pose $G = \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id})^2$.

a) Quelle est la dimension de G ?

b) Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est de la forme

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

c) Calculer explicitement M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$, et en déduire A^n.

Rappeler la définition et les propriétés d'une matrice symétrique réelle.

Dans cet exercice, on identifie $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire qu'on identifie un vecteur de $\mathbb{R}^n$ avec le vecteur-colonne de ses coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

1° Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},\ Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ formant une base orthonormée.
Calculer ${}^tXAY$ et montrer que $\left|{}^tXAY\right| \leqslant 1$.
Quelles sont les valeurs propres de A ?

2° Soit A une matrice symétrique réelle de taille $n \geqslant 2$, de valeurs propres $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$, et D la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'éléments diagonaux $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.
On note

$$E = \left\{(X,Y) \in (\mathbb{R}^n)^2,\quad {}^tXX = {}^tYY = 1 \quad \text{et} \quad {}^tXY = 0\right\}.$$

On cherche à montrer que

$$\forall\,(X,Y) \in E,\quad \left|{}^tXAY\right| \leqslant \frac{1}{2}\left(\lambda_n - \lambda_1\right) \qquad (1)$$

a) Montrer que pour prouver (1), il suffit d'établir

$$\forall\,(X',Y') \in E,\quad \left|{}^tX'DY'\right| \leqslant \frac{1}{2}\left(\lambda_n - \lambda_1\right) \qquad (2)$$

b) En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que

$$\left|{}^tX'DY'\right| \leqslant \frac{1}{2}(\lambda_n - \lambda_1)$$

et conclure.
On pourra introduire le milieu μ du segment $[\lambda_1, \lambda_n]$.

c) Trouver un couple $(X,Y) \in E$ tel que l'inégalité (1) soit en fait une égalité.

Dans cette question, on admet (provisoirement) que, quelle que soit la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de réels positifs, décroissante, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge si et seulement si la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} 2^k\, a_{2^k}$ converge.

Soit α un réel positif ou nul.
Déterminer, en fonction de α, la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\,(\ln n)^\alpha}$.

1° Montrer que, quelle que soit la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de réels positifs, décroissante, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge si et seulement si la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} 2^k\, a_{2^k}$ converge.
On pourra poser

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k\, a_{2^k}$$

et chercher à encadrer T_n à l'aide de termes convenables de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Soit pour n entier naturel la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = x^5 + n\,x - 1.$$

1° Montrer que pour tout n il existe un unique réel u_n tel que $f_n(u_n) = 0$.

2° Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et un équivalent simple de u_n.

3° On pose $u_n = \frac{1}{n} - a_n$. Vérifier que $na_n = u_n^5$ et en déduire un équivalent de a_n .

Soit X une variable aléatoire à valeurs positives ou nulles et admettant une densité f qui est continue sur $\mathbb{R}^+$. On suppose de plus que X admet un moment d'ordre deux.

1° Étudier le comportement de $x^2\,\mathbb{P}\big([X \geqslant x]\big)$ quand x tend vers $+\infty$.

2° Établir un relation entre

$$\mathbb{E}(X^2) \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} x\,\mathbb{P}\big([X \geqslant x]\big)\,\mathrm{d}x\,.$$

3° Prouver que :

$$\left(\int_0^{+\infty} \mathbb{P}\big([X \geqslant x]\big)\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant 2\int_0^{+\infty} x\,\mathbb{P}\big([X \geqslant x]\big)\mathrm{d}x\,.$$

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1° Quelle(s) valeur(s) de j maximise(nt) $\mathbb{P}\big([X = j]\big)$?

2° Pour $j \in \mathbb{N}^*$ fixé, quelle(s) valeur(s) de λ maximise(nt) $\mathbb{P}\big([X = j]\big)$?

3° Montrer que si $\lambda \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{E}\big(|X - \lambda|\big) = \frac{2\lambda^\lambda \mathrm{e}^{-\lambda}}{(\lambda-1)!}\,.$$

On suppose que $P(X) = X\,(X+2)$ est un polynôme annulateur d'une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ non nulle. Montrer que -2 est est valeur propre de A et que A est diagonalisable.
Soit f et g deux endomorphismes d'un espace euclidien E, qui commutent. On suppose que les matrices S et T de f et g dans une base orthonormale sont respectivement symétrique et antisymétrique, c'est-à-dire vérifient :

$$^tS = S \quad \text{et} \quad {}^tT = -T\,.$$

Montrer que, pour tout $x \in E$, on a :

$$f(x) \perp g(x) \quad \text{et} \quad \|(f-g)(x)\| = \|(f+g)(x)\|\ .$$

Une matrice carrée N est dite nilpotente si et seulement s'il existe un entier $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^q = 0$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente différente de la matrice nulle.

1° Montrer qu'il existe un plus petit entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^p = 0$.

2° Justifier que la matrice $A = I - N$ est inversible et déterminer son inverse.

3° Montrer que $I - A^{-1}$ est nilpotente.

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A \neq 0$ et $A^2 = 0$.

1° Montrer que A est semblable à

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\,.$$

2° Vérifier que

$$\mathcal{F} = \Big\{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})\,,\ AM + MA = 0\Big\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et déterminer sa dimension.

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme canoniquement associé.

1° La matrice A est-elle diagonalisable ?

2° Déterminer toutes les droites D de $\mathbb{R}^3$ stables par f, c'est-à-dire telles que $f(D) \subset D$.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes et suivant toutes une loi normale centrée réduite.
Soit θ un nombre réel. On pose

$$Y_0 = X_0 \quad \text{et pour } n \geqslant 1\,,\ Y_n = \theta\, Y_{n-1} + X_n\,.$$

1° Donner la loi de Y_n.

2° Calculer $\mathbf{Cov}(Y_n, Y_{n-k})$ pour $n > k > 0$.

B. Exercices donnés en option économique

Question de Cours: Définition d'un estimateur ; définitions du biais et du risque quadratique d'un estimateur.

On considère n ($n \geqslant 2$) variables aléatoires réelles indépendantes $X_1, \ldots, X_n$ de même loi de densité

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2}{\theta^3} & \text{si } x \in [0, \theta] \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où θ est un paramètre strictement positif. On pose

$$S = X_1 + \cdots + X_n \quad \text{et} \quad T = \mathrm{Max}(X_1, \ldots, X_n)\,.$$

1° Calculer $\mathbb{E}(S)$ et $\mathbb{V}(S)$.

2° Calculer $\mathbb{P}\big([T \leqslant t]\big)$. En déduire une densité de T puis $\mathbb{E}(T)$ et $\mathbb{V}(T)$.

3° On suppose maintenant que θ est un paramètre inconnu qu'on se propose d'estimer.

a) Montrer qu'il existe des constantes réelles a et b telles que $S' = aS$ et $T' = bT$ soient des estimateurs sans biais de θ. Calculer $\mathbb{V}(S')$ et $\mathbb{V}(T')$.

b) Entre les deux estimateurs de θ, S' et T', lequel doit-on préférer ?

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. On note pour tout endomorphisme u de E et pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, $u^0 = Id_E$ et

$$u^r = \underbrace{u \circ \cdots \circ u}_{r \text{ termes}}$$

On commence par considérer un endomorphisme non nul de E tel que pour tout $x \in E$, il existe $r(x) \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^{r(x)}(x) = 0$.

1° Donner deux conditions suffisantes de diagonalisabilité d'une matrice réelle (en toute généralité).

2° Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{N}^*$ tel que u^r soit l'application nulle et que u^{r-1} ne soit pas l'application nulle.

3° Déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme u ; est-il diagonalisable ?

4° On pose :

$$v = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{u^k}{k!}\,.$$

Montrer que v est un isomorphisme de E sur E. Exprimer l'inverse de v en fonction de u.

5° Donner une relation simple entre $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Ker}(v - Id)$.

6° Déterminer les valeurs propres de v.

On considère un type de composants électroniques, dont la durée de vie X, exprimée en heures, est une variable aléatoire de densité f telle que :

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{c}{t^2} \text{ si t} \geq 10 \\ \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

1° Rappeler les qualités d'une densité de probabilité ; en déduire la valeur du réel c.

2° Déterminer les réels m pour lesquels $P(X \leqslant m) = P(X \geqslant m)$.

■ 1 - Exercice

1° Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles discrètes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Déterminer la loi de $Z = g(X, Y)$, où g est une fonction définie sur l'ensemble $(X, Y)(\Omega)$. Déterminer la loi de la somme quand X et Y sont indépendantes.

On considère deux variables aléatoires X et Y discrètes définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On considère une partie D (respectivement Δ) de $\mathbb{R}$, en bijection avec $\mathbb{N}$, dans laquelle X (respectivement Y) prend presque sûrement ses valeurs, et on indexe bijectivement les éléments de D (respectivement Δ) de sorte que $D = \{x_n\,,\ n \in \mathbb{N}\}$ (respectivement $\Delta = \{y_n\,,\ n \in \mathbb{N}\}$).
On suppose que X et Y sont indépendantes et que X et $X + Y$ ont même loi.

2° a) On considère une série à termes positifs $\sum_{n \geqslant 0} a_n$, qui est convergente. Justifier l'existence du nombre

$$M = \operatorname*{Max}_{n \in \mathbb{N}}(a_n)\,.$$

b) En déduire que l'ensemble $\{\mathbb{P}([X = x])\,,\ x \in \mathbb{R}\}$ admet un plus grand élément.

Soit alors a un réel tel que $\mathbb{P}([X = a]) = \operatorname{Max}\{\mathbb{P}([X = x])\,,\ x \in \mathbb{R}\}$.

3° a) Montrer que, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}([X = a - y]) = \mathbb{P}([X = a])$ ou $\mathbb{P}([Y = y]) = 0$.

b) En déduire que la variable aléatoire Y est discrète « finie ».

4° Soit μ un réel appartenant à l'ensemble $\left\{y \in \mathbb{R}\,,\ \mathbb{P}([Y = y]) \neq 0\right\}$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}([X = a - n\mu]) = \mathbb{P}([X = a])$.

5° Montrer que la variable Y est presque sûrement nulle.

■ 2 - Exercice sans préparation

Soit f et g deux endomorphismes d'un espace euclidien E, qui commutent. On suppose que les matrices S et T de f et g dans une base orthonormale sont respectivement symétrique et antisymétrique, c'est-à-dire vérifient :

$$^tS = S \quad \text{et} \quad ^tT = -T\,.$$

Montrer que, pour tout $x \in E$, on a :

$$f(x) \perp g(x) \quad \text{et} \quad \|(f - g)(x)\| = \|(f + g)(x)\|\,.$$

■ 1 - Exercice

1° Définition et convergence d'une série géométrique. Donner les formules de sommation d'une série géométrique et de ses dérivées successives.

Une urne contient n jetons numérotés de 0 à $n-1$. On tire un à un, avec remise et au hasard trois jetons dont les numéros sont notés X, Y et Z respectivement. On tire ensuite trois autres jetons, un à un, sans remise, et on note A, B et C respectivement les numéros obtenus. On pose

$$p_n = \mathbb{P}([X+Y=Z]) \quad \text{et} \quad q_n = \mathbb{P}([A+B=C]) .$$

2° a) Calculer p_n.

b) Calculer q_n en distinguant les cas n pair et n impair.

c) Montrer que $\dfrac{p_n}{q_n} \to 1$ lorsque $n \to +\infty$.

3° a) Calculer $r_n = \mathbb{P}([X+Y+Z=n-1])$.

b) Soit $s \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que

$$\mathbb{E}\left(s^{X+Y+Z}\right) = \frac{1}{n^3}\left[\frac{1-s^n}{1-s}\right]^3 .$$

c) Retrouver alors la valeur de r_n à l'aide de la formule ci-dessus.

■ 2 - Exercice sans préparation

Soit E un espace euclidien de dimension n. On note $\langle\ ,\ \rangle$ le produit scalaire et $\|\ \|$ la norme associée.
Soit f un endomorphisme de E qui vérifie la propriété suivante :

$$\forall\ (x,y) \in E^2 \qquad \langle x,y\rangle = 0 \ \Rightarrow\ \langle f(x), f(y)\rangle = 0 .$$

Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| = k\ \|x\|$.

■ 1 - Exercice

1° Conditions pour qu'une matrice réelle soit diagonalisable.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

2° Soit A la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & . & . & . & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & . & . & . \\ . & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & . & . & . & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

a) Déterminer les valeurs propres de A ainsi que les sous-espaces propres correspondants. La matrice A est-elle diagonalisable ?

b) La matrice A est-elle inversible ?

Dans la suite $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ désigne un espace vectoriel euclidien de dimension n, et $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ une suite de n vecteurs normés (c'est-à-dire de norme 1) de E, tels que

$$\forall\,(i,j) \in [\![1,n]\!]^2\,, \quad i \neq j \;\Rightarrow\; \|u_i - u_j\| = 1\,.$$

3° a) Pour i et j dans $[\![1,n]\!]$, calculer $\langle u_i, u_j\rangle$.

b) Montrer que $(u_1, u_2, ..., u_n)$ est une base de E.

c) La conclusion de b) subsiste-t-elle, si on ne suppose plus que tous les vecteurs u_i sont normés mais qu'ils sont seulement de même norme non nulle ?

4° Soit $(e_1, e_2, ..., e_n)$ une base orthonormée de E et f un endomorphisme de E tel que, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $f(e_i) = u_i$.

a) Montrer que f est un automorphisme de E.

b) A-t-on, pour tout x de E et tout y de E, $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$?

■ 2 - Exercice sans préparation

Déterminer une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires, chacune prenant deux valeurs, telle que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable nulle mais telle que la suite $(\mathbb{E}(X_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 1 et la suite $(\mathbb{V}(X_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ tende vers $+\infty$.

1 - Exercice

Les variables aléatoires sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

On admet que si U et V sont deux variables aléatoires à densité, indépendantes, admettant une espérance, alors UV admet une espérance et $\mathbb{E}(UV) = \mathbb{E}(U)\,\mathbb{E}(V)$.

1° Soit X et Y deux variables aléatoires à densité ayant un moment d'ordre 2. Quel lien existe-t-il entre l'indépendance de X et Y et leur non-corrélation (c'est à dire la propriété $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$) ?

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, suivant chacune la loi normale de moyenne m et d'ecart-type σ. Soit, pour n entier non nul,

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{et} \quad S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}_n)^2 .$$

2° Quelle est la loi de $\overline{X}_n$?

3° Montrer que $(\overline{X}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite convergente d'estimateurs sans biais de m.

4° Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{E}(S_n) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(X_i - \overline{X}_n)$.

5° En déduire la valeur du réel a tel que la variable aléatoire $T_n = a\,S_n$ soit un estimateur sans biais de σ^2.

6° On suppose ici que $m = 0$ et on se propose de montrer que $\overline{X}_n$ et S_n sont non-corrélées.

a) Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{E}(\overline{X}_n\, S_n) = \dfrac{1}{n^2}\,\mathbb{E}\left[\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} X_j^2\right)\right] - \mathbb{E}(\overline{X}_n^3)$.

b) En déduire que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{E}(\overline{X}_n\, S_n) = \dfrac{n-1}{n^3}\,\mathbb{E}\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{n} X_j^3\right)$ et conclure.

2 - Exercice sans préparation

Soit n un entier naturel non nul et $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des matrices symétriques réelles de taille n. Soit A et B dans $\mathcal{S}_n$. On dit que $A \leqslant B$ si et seulement si pour tout vecteur colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a ${}^tXAX \leqslant {}^tXBX$.

Montrer que si A, B et C sont trois éléments de $\mathcal{S}_n$, on a :

(i) $\left[A \leqslant B \text{ et } B \leqslant C\right] \Rightarrow A \leqslant C$;

(ii) $\left[A \leqslant B \text{ et } B \leqslant A\right] \Rightarrow A = B$.

1 - Exercice

1° Rappeler la définition d'un endomorphisme diagonalisable et donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable.

Soit n un entier naturel non nul et $E = \mathbb{R}_n[X]$. Soit φ l'application définie sur E par

$$\forall P \in E, \quad [\varphi(P)](X) = P(X+1) - P(X).$$

2° a) Vérifier que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ et expliciter sa matrice A dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2, \ldots, X^n)$ de E. On précisera l'élément $a_{i,j}$ de A, situé à la i^e ligne et à la j^e colonne.

b) Déterminer le noyau et l'image de φ.

c) Déterminer un polynôme annulateur de φ.

d) Étudier la diagonalisabilité de φ.

3° a) Soit $P \in E$. Montrer que :

$$\varphi^n(P)(X) = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \left[(-1)^k \binom{n}{k} P(X+k) \right],$$

où φ^n désigne la composée n fois : $\varphi \circ \varphi \circ \cdots \circ \varphi$.

b) En déduire, pour $j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, la valeur de :

$$S_j = \sum_{k=0}^{n} \left[(-1)^k \binom{n}{k} k^j \right].$$

4° Retrouver le résultat de la question précédente pour $j \in \{0, 1, 2\}$ en considérant la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = (1-x)^n$.

2 - Exercice sans préparation

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ suivant toutes deux une loi géometrique de paramètre $p \in]0, 1[$.
Pour tout $\omega \in \Omega$, on considère la matrice

$$M(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & Y(\omega) \\ Y(\omega) & X(\omega) \end{pmatrix}.$$

Déterminer la probabilité

$$\mathbb{P}\left\{ \omega \in \Omega, \ M(\omega) \text{ inversible} \right\}.$$

■ 1 - Exercice

1° Définition des matrices semblables. Donner la formule de changement de base pour les matrices d'endomorphismes.

Une urne blanche contient n boules blanches et une urne rouge n boules rouges. On tire à chaque étape au hasard une boule de chaque urne et on remet chacune de ces boules dans l'urne de laquelle on ne l'a pas tirée. Pour $k \in \mathbb{N}$, on note X_k le nombre de boules blanches dans l'urne blanche à l'issue de l'étape k. En particulier, $X_0 = n$ et $X_1 = n - 1$ (avec probabilité 1).
On pose pour k entier positif

$$Z_k = \begin{pmatrix} \mathbb{P}([X_k = 0]) \\ \mathbb{P}([X_k = 1]) \\ \vdots \\ \mathbb{P}([X_k = n]) \end{pmatrix}.$$

2° Trouver une matrice A à coefficients entiers telle que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \quad Z_k = \frac{1}{n^2} A\, Z_{k-1}.$$

On pose par la suite $B = A/n^2$.

3° On suppose dans cette question que $n = 2$. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice B et en déduire pour k fixé la valeur de $\mathbb{E}(X_k)$.

4° Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Comment peut-on interpréter chacun des coefficients de la matrice B^k ? Montrer qu'il existe $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que tous les coefficients de B^k sont strictement positifs pour tout $k \geqslant k_0$.

5° Calculer $\mathbb{P}([X_n = 0])$. Que retrouve-t-on ?

■ 2 - Exercice sans préparation

Soit α un réel strictement positif. Montrer que pour tout réel x positif, il existe un unique réel positif noté $f(x)$ tel que

$$f(x)\, \mathrm{e}^{f(x)} = x^\alpha.$$

Étudier ensuite la dérivabilité de f, et exprimer f' en fonction de f le cas échéant.

1 - Exercice

1° Soit X et Y deux variables aléatoires réelles, définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes et de densités respectives f_X et f_Y. Donner une expression de la densité de $Z = X + Y$.

Soit U et V deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$, définies sur un espace de probabilité noté $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

2° Quelle est la loi de $-\ln(U)$?
Montrer que la densité de la variable aléatoire $Z = -\ln(U) - \ln(V)$ est donnée par

$$f_Z(x) = \begin{cases} x\,\mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit a un réel supérieur ou égal à 1. On définit la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -aU \\ aV & 3 \end{pmatrix}.$$

3° a) Montrer que la probabilité p que la matrice M ait toutes ses valeurs propres réelles vaut

$$p = \frac{1 + 2\ln(a)}{a^2}.$$

b) Montrer que la probabilité que M soit diagonalisable dans $\mathbb{R}$ vaut également p.

4° Dans cette question, on prend $a = 1$. Pour tout $\omega \in \Omega$, on note $X(\omega)$ la plus grande valeur propre de $M(\omega)$. Déterminer une densité de X.

2 - Exercice sans préparation

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n. Montrer que E n'est pas la réunion finie de sous-espaces vectoriels stricts (c'est à dire distincts de E).

1 - Exercice

1° Rappeler la définition et les propriétés de la fonction Γ.

Soit b un réel et φ la fonction de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(x) = (x+b)\,\mathrm{e}^{-x}\,.$$

L'objet de l'exercice est de chercher toutes les fonctions f continues sur $\mathbb{R}^+$ et vérifiant pour tout x positif la relation :

$$(\mathcal{R}) \qquad f(x) = \varphi(x) + \int_0^{+\infty} \varphi(x+t)\,f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

2° Soit F_1 et F_2 les fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$F_1(x) = \mathrm{e}^{-x} \quad \text{et} \quad F_2(x) = x\,e^{-x}\,.$$

a) Montrer que la famille (F_1, F_2) est libre dans l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}^+$.

Soit E l'espace vectoriel engendré par F_1 et F_2.

b) On considère l'application Φ qui à toute fonction f de E associe la fonction $\Phi(f)$ définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\Phi(f)(x) = \int_0^{+\infty} \varphi(x+t)\,f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Montrer que l'intégrale qui définit Φ est convergente pour toute fonction f de E.

3° Montrer que Φ est un endomorphisme de E et écrire sa matrice dans la base (F_1, F_2).

a) Montrer que Φ est un automorphisme de E et préciser l'automorphisme réciproque.

4° Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant la relation $(\mathcal{R})$.

a) Montrer que f est élément de E.

b) Déterminer l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $(\mathcal{R})$.

2 - Exercice sans préparation

Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi, définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
On suppose que la loi commune des X_k est la loi exponentielle de paramètre λ.
Soit N une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. On pose

$$S = \sum_{k=1}^{N} X_k\,.$$

1° Déterminer la loi conditionnelle de S sachant que $[N = n]$.

2° En déduire la fonction de répartition puis la loi de S. Vérifier que

$$\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(N)\,\mathbb{E}(X_1)\,.$$

■ 1 - Exercice

1° On jette deux dés non pipés simultanément. On note

$$\Omega = \Big\{(x,y)\,,\ 1 \leqslant x \leqslant 6 \text{ et } 1 \leqslant y \leqslant 6\Big\}$$

l'ensemble des résultats possibles. On munit Ω de la probabilité uniforme (équiprobabilité des couples (x,y)). On note S la variable aléatoire égale à la somme des chiffres marqués par les deux dés. Déterminer la loi de S ; calculer son espérance et sa variance.

2° Un joueur lance les deux dés selon le protocole suivant :

- si $S = 7$ ou 11, le joueur gagne ;
- si $S = 2$, 3 ou 12, le joueur perd ;
- si $S = 4$, 5, 6, 8, 9 ou 10, le joueur reprend les deux dés et effectue un second lancer de ces deux dés ;
  - * si ce second jet donne un total de 7, le joueur a perdu,
  - * s'il obtient le même total qu'au premier jet, il a gagné le jeu ;
  - * sinon, il reprend les dés et effectue le lancer suivant. Au cours du ou des lancers suivants, il aura gagné le jeu dès qu'il aura retrouvé le total k trouvé au premier jet et il aura perdu s'il marque un total de 7.

On appelle S_i la somme des deux dés obtenue au i-ième jet si celui-ci a eu lieu.

a) Soit n un entier naturel non nul et $k \in \{4,5,6\}$. On suppose que dans le premier jet le joueur a réalisé l'évènement $(S_1 = k)$. Montrer que la probabilité de l'événement : « Le joueur gagne au n-ième jet » vaut :

$$\frac{k-1}{36}\left(\frac{31-k}{36}\right)^{n-2}.$$

b) En déduire que si le joueur a réalisé $(S_1{=}k)$ pour $k \in \{4,5,6\}$, la probabilité qu'il gagne le jeu est

$$\mathbb{P}(D_k) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{k-1}{36}\left(\frac{31-k}{36}\right)^{n-2}.$$

3° Soit n un entier naturel non nul et $k \in \{8,9,10\}$. On suppose que dans le premier jet le joueur a réalisé l'événement $(S_1{=}k)$. Calculer la probabilité que le joueur gagne le jeu.

4° Calculer la probabilité que le joueur gagne le jeu. Comparer ce résultat avec la valeur 0, 5.

■ 2 - Exercice sans préparation

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et f, g, h trois endomorphismes de E vérifiant :

$$f + g + h = \mathrm{Id}_E$$

et

$$fog = gof = hog = goh = foh = hof\,.$$

1° Montrer que f, g et h sont des projecteurs.

2° Prouver que $\varphi = f + g - 2h$ est diagonalisable.

3° Donner un exemple d'un tel triplet d'endomorphismes.

■ 1 - Exercice

Dans cet exercice toutes les variables aléatoires considérées sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi normale d'espérance $m \neq 0$ et de variance égale à 1.
On pose $Y = X^2$.
On rappelle que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

1° Rappeler la définition et les propriétés des lois γ et Γ.

2° Déterminer une densité f_Y de Y.

3° Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\Gamma\Big(k + \frac{1}{2}\Big) = \frac{(2k)!}{2^{2k}\, k!}\sqrt{\pi}\,.$$

4° Soit Z une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $m^2/2$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note T_k une variable aléatoire réelle telle que $T_k/2$ suive la loi $\gamma(k + 1/2)$. On note g_k une densité de T_k.

Montrer que :

$$f_Y(y) = \sum_{k=0}^{+\infty}\Big[\mathbb{P}([Z = k])\, g_k(y)\Big] \quad \text{si} \quad y > 0 \quad \text{et} \quad f_Y(y) = 0 \quad \text{sinon.}$$

5° Montrer que :

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=0}^{+\infty}\Big[\mathbb{P}([Z = k])\, \mathbb{E}(T_k)\Big]$$

et calculer cette valeur.

■ 2 - Exercice sans préparation

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ de matrice dans la base canonique

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1° Déterminer les droites de $\mathbb{R}^3$ stables par f.

2° Soit P un plan stable par f. Montrer que $\dim(f(P)) = 1$.
En déduire les plans de $\mathbb{R}^3$ stables par f.

1 - Exercice

1° Définition et propriétés d'un produit scalaire.

On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^n$, muni du produit scalaire canonique (noté $\langle\ ,\ \rangle$) et de la norme euclidienne associée.
Soit f et g deux endomorphismes de E tels que

$$\forall x \in E\,, \quad \|f(x)\| = \|g(x)\|\ .$$

2° Montrer que

$$\forall (x,y) \in E^2\,, \quad \langle f(x), f(y)\rangle = \langle g(x), g(y)\rangle\ .$$

3° On suppose, pour cette question seulement, que l'application f est bijective.
Montrer qu'il existe un unique endomorphisme u de E tel que $g = u \circ f$.
Montrer de plus que, pour tout x de E, $\|u(x)\| = \|x\|$.

4° On ne suppose plus nécessairement f bijective.

a) Montrer que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g$.

b) Soit $(f_1, f_2, \ldots, f_r)$ une base orthonormée de $\operatorname{Im} f$.
Montrer qu'il existe une famille $(e_1, e_2, \ldots, e_r)$ d'éléments de E telle que, pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $f_i = f(e_i)$.
Montrer que la famille $(g_1, g_2, \ldots, g_r)$ définie, pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, par $g_i = g(e_i)$ est une base orthonormée de $\operatorname{Im} g$.

c) Justifier que les familles $(f_1, f_2, \ldots, f_r)$ et $(g_1, g_2, \ldots, g_r)$ peuvent être complétées en des bases orthonormées $\mathcal{F} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ et $\mathcal{G} = (g_1, g_2, \ldots, g_n)$ respectivement, de E.

Soit u l'endomorphisme de E tel que

$$\forall i \in [\![1, n]\!]\,, \quad u(f_i) = g_i\ .$$

d) Montrer que :
- pour tout x de E, $\|u(x)\| = \|x\|$;
- $g = u \circ f$.

e) L'endomorphisme u ainsi défini est-il unique ?

2 - Exercice sans préparation

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose que X et Y sont indépendantes, identiquement distribuées, et qu'elles admettent un moment d'ordre 2.
Les variables $X + Y$ et $X - Y$ sont-elles indépendantes ?
Sinon, à quelle condition sur la loi (commune) de X et Y le sont-elles ?

■ 1 - Exercice

1° Donner deux conditions suffisantes de diagonalisabilité d'une matrice carrée réelle.

On considère trois variables aléatoires réelles X_1, X_2 et X_3, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, centrées et admettant un moment d'ordre 2.
On définit la matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ par

$$M = (m_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant 3 \\ 1 \leqslant j \leqslant 3}}, \quad \text{avec} \quad \forall (i, j) \in [\![1, 3]\!]^2, \quad m_{i,j} = \mathbb{E}(X_i X_j).$$

2° Montrer que la matrice M est diagonalisable.

3° Dans cette question seulement, on suppose que les variables aléatoires X_1, X_2, X_3 sont discrètes et indépendantes. Que peut-on dire de la matrice M ?

4° Montrer que les valeurs propres de M sont positives ou nulles.

Dans la suite, on suppose que

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

5° Déterminer les valeurs propres de M.

6° Soit Z une variable aléatoire d'espérance nulle ; on considère la fonction $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \quad \varphi(x_1, x_2, x_3) = \mathbb{E}\left[(Z - x_1 X_1 - x_2 X_2 - x_3 X_3)^2\right].$$

Déterminer la matrice Hessienne de φ en (x_1, x_2, x_3).

7° Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que φ admette un minimum en $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ est

$$M \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{E}(ZX_1) \\ \mathbb{E}(ZX_2) \\ \mathbb{E}(ZX_3) \end{pmatrix}$$

a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur Z pour que la fonction φ admette un minimum. On pourra introduire l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est M.

■ 2 - Exercice sans préparation

Soit $k \in \mathbb{R}_+^*$.

1° Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation

$$x^{k+1} + x^k - n = 0$$

admet une solution unique x_n dans $\mathbb{R}_+^*$.

2° Étudier les variations et la limite éventuelle de la suite (x_n).

3° Déterminer un équivalent simple de x_n lorsque n tend vers $+\infty$.