1

ANALYSE

Exercice 1.01.

1. Déterminer les valeurs de $x \in \mathbb{R}$ pour lesquelles l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t+t^{x+1}}$ est convergente.

On pose alors $f(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t+t^{x+1}}$

2. Montrer que $f(1) = \dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

3. Montrer que f est décroissante sur son domaine de définition.

4. a) Montrer que pour $x > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t+t^{x+1}}$ est convergente. On note alors $g(x)$ sa valeur.

b) Montrer, à l'aide d'un changement de variable simple que

$$g(x) = \int_1^{+\infty} \frac{t^{x-1}dt}{t^x(1+t^x)} = \frac{1}{x}\int_1^{+\infty} \frac{du}{u(1+u)}$$

c) Vérifier que pour tout $u > 0$, $\dfrac{1}{u(1+u)} = \dfrac{1}{u} - \dfrac{1}{1+u}$; en déduire la valeur de $g(x)$.

5. a) Montrer que pour $x > 0$, on a : $0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{\ln 2}{x}$.

b) Montrer que pour $x > 0$, on a : $0 \leqslant \dfrac{\ln 2}{x} - f(x) \leqslant \dfrac{1}{2x+1}$.

c) Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers l'infini et un équivalent simple de $f(x)$ au voisinage de 0.

Solution

1. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t+t^{x+1}}$ est continue et positive sur $[1,+\infty[$. Le seul problème est en la borne infinie.

$\rightarrow$ Si $x > 0$, $f(t) \underset{(+\infty)}{\sim} \dfrac{1}{t^{x+1}}$ et $x+1 > 1$, la règle de Riemann assure la convergence.

$\rightarrow$ Si $x = 0$, $f(t) = \dfrac{1}{1+2t} \underset{(+\infty)}{\sim} \dfrac{1}{2t}$ et la règle de Riemann assure cette fois la divergence.

$\rightarrow$ Si $x < 0$, $t + t^{x+1} \underset{(+\infty)}{\sim} t$ et $f(t) \underset{(+\infty)}{\sim} \dfrac{1}{t}$, ce qui permet de conclure à la divergence (on peut aussi dire que le troisième cas est pire que le deuxième)

Le domaine de définition de f est $\mathbb{R}_+^*$.

2. $f(1) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t+t^2} = \int_1^{+\infty} \frac{1}{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dt = \frac{2}{3}\int_1^{+\infty} \frac{1}{(\frac{2t+1}{\sqrt{3}})^2+1}\,dt$

Soit : $f(1) = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\big[\arctan u\big]_{\sqrt{3}}^{\to+\infty} = \frac{2}{\sqrt{3}}(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

3. Si $0 < x \leqslant x'$, $\forall\, t \geqslant 1, t^{x+1} \leqslant t^{x'+1}$, $\dfrac{1}{1+t+t^{x'+1}} \leqslant \dfrac{1}{1+t+t^{x+1}}$ et par conservation des inégalités par intégration (les bornes sont dans l'ordre croissant et les intégrales convergent) : $f(x') \leqslant f(x)$.

La fonction f est décroissante sur son domaine de définition.

4. a) Voir 1., la suppression du terme 1 étant sans incidence sur la convergence.

b) $g(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+t^x)} = \int_1^{+\infty} \frac{t^{x-1}dt}{t^x(1+t^x)}$

Et, par le changement de variable préparé $u = t^x$ de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone :

$$g(x) = \frac{1}{x}\int_1^{+\infty} \frac{du}{u(1+u)}$$

c) $g(x) = \dfrac{1}{x}\big[\ln u - \ln(1+u)\big]_1^{\to+\infty} = \dfrac{1}{x}\big[\ln\big(\dfrac{u}{1+u}\big)\big]_1^{\to+\infty}$

$$g(x) = \frac{1}{x}\ln 2$$

5. a) Clairement $0 \leqslant \dfrac{1}{1+t+t^{x+1}} \leqslant \dfrac{1}{t+t^{x+1}}$ et les convergences étant acquises avec des bornes dans l'ordre croissant : $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$, *i.e.* $0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{x}\ln 2$.

b) $\dfrac{\ln 2}{x} - f(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t+t^{x+1})(t+t^{x+1})}\,dt \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{2x+2}} = \frac{1}{2x+1}$

c) $\star$ Le résultat a) donne $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

$\star$ Le résultat b) donne $0 \leqslant \dfrac{1}{x}\ln 2 - f(x) \leqslant 1$, ce qui est plus fort que ce qui est demandé et donne donc la conclusion :

$$f(x) \underset{(0^+)}{\sim} \frac{1}{x}\ln 2$$

Exercice 1.02.

1. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x}}\,dx$.

a) Montrer que u_n est bien défini.

b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et convergente. Déterminer sa limite notée ℓ.

c) À l'aide d'une intégration par parties, donner un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers l'infini. En déduire la nature de la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$.

d) Montrer qu'il existe deux réels α et β tels que au voisinage de l'infini, on a :

$$u_n = \ell + \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n^2} + o\big(\frac{1}{n^2}\big)$$

2. On pose maintenant $v_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x}}\,dx$.

a) Montrer que v_n est bien défini pour tout entier naturel n.

b) Déterminer la limite éventuelle de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

c) Quelle est la nature de la série $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$?

Solution

1. a) La suite (u_n) est bien définie puisque $x \mapsto \dfrac{x^n}{\sqrt{1+x}}$ est continue sur $[0,1]$.

b) Elle est décroissante puisque $0 \leqslant x^{n+1} \leqslant x^n$ sur $[0,1]$ et positive, donc convergente. Sa limite est nulle car :

$$0 \leqslant u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x}}\,dx \leqslant \int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1}$$

c) Les fonctions $x \mapsto x^{n+1}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ étant de classe C^1 sur $[0,1]$, il vient en intégrant par parties :

$$u_n = \Big[\frac{x^{n+1}}{n+1}\times\frac{1}{\sqrt{1+x}}\Big]_0^1 + \frac{1}{2(n+1)}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^{3/2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}(n+1)} + v_n$$

avec $0 \leqslant v_n \leqslant \dfrac{1}{2(n+1)}\displaystyle\int_0^1 x^{n+1}dx = \dfrac{1}{2(n+1)(n+2)} = o\big(\dfrac{1}{2(n+1)}\big)$.

Ainsi : $u_n \underset{(\infty)}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2}(n+1)} \underset{(\infty)}{\sim} \dfrac{1}{n\sqrt{2}}$

Enfin, la règle de Riemann montre que la série $\sum u_n$ diverge.

2. Une seconde intégration par parties (dans le même sens !) donne :

$$\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^{3/2}}\,dx = \Big[\frac{x^{n+2}}{n+2}\times\frac{1}{(1+x)^{3/2}}\Big]_0^1 + \frac{3}{2(n+2)}\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1+x)^{5/2}}\,dx$$

Donc : $v_n = \dfrac{1}{2(n+1)}\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^{3/2}}\,dx = \frac{1}{2^{5/2}(n+1)(n+2)} + o\big(\frac{1}{n^2}\big)$

Puis : $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{2}(n+1)} + \dfrac{1}{2^{5/2}(n+1)(n+2)} + o\big(\frac{1}{n^2}\big)$

$u_n = \dfrac{1}{n\sqrt{2}}\big(1+\frac{1}{n}\big)^{-1} + \dfrac{1}{2^{5/2}n^2} + o\big(\frac{1}{n^2}\big) = \dfrac{1}{n\sqrt{2}} + \big(\frac{1}{2^{5/2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\big)\frac{1}{n^2} + o\big(\frac{1}{n^2}\big)$

3. a) La fonction $x \mapsto \dfrac{x^n}{\sqrt{1-x}}$ est continue sur $[0,1[$, positive et équivalente à $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ dont l'intégrale converge sur $[0,1[$, donc l'intégrale définissant v_n converge.

b) La suite (v_n) tend vers 0. En effet pour tout choix de a dans $]0,1[$:

$$0 \leqslant v_n \leqslant \int_0^a \frac{x^n}{\sqrt{1-a}}\,dx + \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx \leqslant \frac{1}{(n+1)\sqrt{1-a}} + 2\sqrt{1-a}$$

On se donne alors $\varepsilon > 0$. On choisit a de sorte que $2\sqrt{1-a} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$, puis n assez grand pour que $\dfrac{1}{(n+1)\sqrt{1-a}} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$ et alors $0 \leqslant v_n \leqslant \varepsilon$. D'où le résultat.

c) En revanche $v_n \geq \displaystyle\int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1}$ et la divergence de la série s'en déduit.

Exercice 1.03.

1. Soit x un réel. Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt^2}}{1+t}\,dt$ est convergente si et seulement si x est strictement positif. On pose alors :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt^2}}{1+t}\,dt$$

L'exercice a pour but l'étude de la fonction F.

2. Etudier le sens de variation de F sur $]0,+\infty[$.

3. a) Démontrer que pour tout $x > 0$, on a $F(x) \geq \frac{1}{\mathrm{e}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{1}{1+t}\, dt$. En déduire la limite de F en 0.

b) Démontrer que pour tout réel $x > 0$, on a : $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u^2}}{\sqrt{x}+u}\, du$. En déduire la limite de F en $+\infty$.

4. Prouver que pour tous x_0 et x réels strictement positifs, on a :

$$\big|F(x) - F(x_0)\big| \leqslant \frac{|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}|}{\sqrt{x}\sqrt{x_0}} \times \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

En déduire que F est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

5. Démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x}\big(\sqrt{x}F(x) - \frac{\sqrt{\pi}}{2}\big) = -\frac{1}{2}$.

En déduire que $F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x} + o\big(\frac{1}{x}\big)$ au voisinage de $+\infty$.

Solution

1. Pour tout réel x, la fonction $t \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-xt^2}}{1+t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\to$ Pour $x \leqslant 0, \forall\, t \in [0, +\infty[, 0 \leqslant \frac{1}{1+t} \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-xt^2}}{1+t}$, par le critère de comparaison, on déduit que $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt^2}}{1+t} dt$ est divergente

$\to$ Pour $x > 0$, on a $\forall t \in [1, +\infty[, 0 \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-xt^2}}{1+t} \leqslant \mathrm{e}^{-xt}$. Or $\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt} dt$ est convergente, donc par le critère de comparaison, on déduit que $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt^2}}{1+t} dt$ est convergente, puis que $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt^2}}{1+t} dt$ converge.

On conclut que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt^2}}{1+t} dt$ est convergente si et seulement si x est strictement positif.

2. On a : $0 < x < y \implies \forall\, t \in [0, +\infty[, \frac{\mathrm{e}^{-xt^2}}{1+t} \geq \frac{\mathrm{e}^{-yt^2}}{1+t}$ et les intégrales étant convergentes et les bornes dans l'ordre croissant, il vient par conservatioin des inégalités $F(x) \geq F(y)$.
On déduit que F est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, (en fait même strictement décroissante).

3. a) Pour tout $x > 0, F(x) \geq \int_0^{1/\sqrt{x}} \frac{\mathrm{e}^{-xt^2}}{1+t}\, dt$, or

$$0 < t \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}} \implies xt^2 \leqslant 1 \implies -xt^2 \geq -1.$$

D'où $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt^2}}{1+t}dt \geq \mathrm{e}^{-1}\int_0^{1/\sqrt{x}} \frac{1}{1+t}dt = \mathrm{e}^{-1}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.
Par conséquent $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x) = +\infty$.

b) Pour tout réel $x > 0$ et tout réel A positif, on effectue le changement de variable affine $u = \sqrt{x}t$ dans $\displaystyle\int_0^A \frac{\mathrm{e}^{-xt^2}}{1+t}dt$. On obtient : $\displaystyle\int_0^A \frac{\mathrm{e}^{-xt^2}}{1+t}dt = \int_0^{\sqrt{x}A} \frac{\mathrm{e}^{-u^2}}{\sqrt{x}+u}du$, puis par passage à la limite :
(ce qui prouve au passage la convergence de l'intégrale que l'on va écrire ! !) :

$$\forall\, x > 0, F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u^2}}{\sqrt{x}+u}du$$

On déduit que $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, F(x) \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x}}\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}du = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$, d'où

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0.$$

4. Pour tout x_0 et x réels strictement positifs, on a :

$$\begin{aligned}|F(x) - F(x_0)| &= \left|\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\left(\frac{1}{\sqrt{x}+u} - \frac{1}{\sqrt{x_0}+u}\right)du\right| \\ &= \left|\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2} \times \frac{\sqrt{x_0}-\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+u)(\sqrt{x_0}+u)}\,du\right|\end{aligned}$$

$$|F(x) - F(x_0)| \leqslant \frac{|\sqrt{x_0}-\sqrt{x}|}{\sqrt{x}\sqrt{x_0}}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,du = \frac{|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}|}{\sqrt{x}\sqrt{x_0}} \times \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

On en déduit que pour tout x_0 de $\mathbb{R}_+^*$, $\lim\limits_{x\to x_0} F(x) = F(x_0)$, ce qui prouve que F est continue en tout point de $\mathbb{R}_+^*$.

5. On utilise les formes précédentes :

$$\begin{aligned}\sqrt{x}\left(\sqrt{x}F(x) - \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) &= \sqrt{x}\left(\sqrt{x}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u^2}}{\sqrt{x}+u}du - \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}du\right) \\ &= -\sqrt{x}\int_0^{+\infty} \frac{u\mathrm{e}^{-u^2}}{\sqrt{x}+u}\,du \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{u^2\mathrm{e}^{-u^2}}{\sqrt{x}+u}\,du - \int_0^{+\infty} u\mathrm{e}^{-u^2}\,du \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{u^2\mathrm{e}^{-u^2}}{\sqrt{x}+u}\,du - \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Or $0 \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^2\mathrm{e}^{-u^2}}{\sqrt{x}+u}du \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^{+\infty} u^2e^{-u^2}du \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}\big(\sqrt{x}F(x) - \frac{\sqrt{\pi}}{2}\big) = -\frac{1}{2}$, *i.e.* $F(x) \underset{(+\infty)}{=} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x} + o(x^{-1})$.

Exercice 1.04.

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On considère la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_1 = a \text{ et } \forall\, n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n}}\, u_n^2$$

1. On suppose que la suite u vérifie : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq \sqrt{n}$. Montrer que la suite u est croissante et divergente.

2. On suppose que la suite u vérifie : $\exists\, k \in \mathbb{N}^*, u_k < \sqrt{k}$.

   a) Montrer que $\forall\, n \geq k, u_n < \sqrt{n}$.

   b) Montrer que la suite u est décroissante à partir du rang k.

   c) Montrer que la suite u converge de limite nulle.

3. En déduire que la suite u converge si et seulement si il existe un rang k tel que $u_k < 1$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \frac{1}{2^{n-1}} \ln(u_n)$.

   a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est ainsi bien définie et que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, v_n - v_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}}\, \ln n$$

   b) Montrer que la série de terme général $s_n = \frac{1}{2^{n+1}}\, \ln n$ est convergente.

On note $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}}\, \ln n$.

   c) Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, $v_1 = v_n + \sum\limits_{k=1}^{n-1} s_k$. En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

   d) Montrer que la suite u converge si et seulement si $a < \mathrm{e}^S$.

Solution

1. Si on a toujours $u_n \geqslant \sqrt{n}$, *a fortiori* on a $u_n > 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_n}{\sqrt{n}} \geqslant 1$: la suite est bien croissante et la minoration donne trivialement la divergence.

2. a) Si pour un certain rang k, on a $u_k < \sqrt{k}$, alors $u_{k+1} = \frac{u_k^2}{\sqrt{k}} < \sqrt{k} < \sqrt{k+1}$. La propriété est donc héréditaire et par le principe de récurrence :

$$\forall\, n \geqslant k, u_n < \sqrt{n}$$

b) A partir du rang k, on a donc : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{u_n}{\sqrt{n}} < 1$: la suite u est décroissante à partir du rang k.

c) Décroissante à partir du rang k et minorée banalement par 0, la suite u est convergente.
Donc $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n^2}{\sqrt{n}} = 0$ et ainsi u converge de limite nulle.

3. $\star$ Si la suite u converge, elle converge vers 0, et il existe bien un rang k tel que $u_k < 1$.
$\star$ S'il existe un rang k tel que $u_k < 1$, on a sûrement $u_k < \sqrt{k}$ et le cheminement de la question 2 montre que la suite u converge vers 0.

4. a) u_n est toujours strictement positif, donc la définition de v_n est claire. De plus :

$$\begin{aligned} v_n - v_{n+1} &= \frac{1}{2^{n-1}}\ln(u_n) - \frac{1}{2^n}\ln(u_{n+1}) \\ &= \frac{1}{2^{n-1}}\ln(u_n) - \frac{1}{2^n}\ln(u_n^2) + \frac{1}{2^n}\ln(\sqrt{n}) \\ &= \frac{1}{2^n}\times\frac{1}{2}\ln(n) \end{aligned}$$

b) On peut écrire :

$$\frac{1}{2^{n+1}}\ln n = \frac{1}{(1.9)^{n+1}}\times(0.95)^{n+1}\ln n \underset{(n\to\infty)}{=} o\Big(\frac{1}{(1.9)^{n+1}}\Big)$$

[$(3/2)^n\times\dfrac{1}{2^{n+1}}\ln n \to 0$ suffisait largement pour conclure !]

c) Notons $s_n = \dfrac{1}{2^{n+1}}\ln n$ (s_n est positif ou nul et strictement positif pour $n \geqslant 2$). Par télescopage :

$$\sum_{k=1}^{n-1} s_k = \sum_{k=1}^{n-1}(v_k - v_{k+1}) = v_1 - v_n$$

Ainsi : $v_n = v_1 - \sum\limits_{k=1}^{n-1} s_k \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} v_1 - S = \ln(u_1) - S$

d) $\star$ Supposons $a < \mathrm{e}^S$. On a alors $\ln(u_1) = \ln a < S$ et $\lim v < 0$.
A partir d'un certain rang k on a $v_k < 0$, donc $u_k < 1$ et la suite u converge (voir la question 3.).
$\star$ Si la suite u converge, il existe un rang n tel que $u_n < 1$, donc $v_n < 0$ et $v_1 = v_n + \sum\limits_{k=1}^{n-1} s_k < S$, soit $\ln a < S$ et $a < \mathrm{e}^S$.

Exercice 1.05.

1. a) Justifier que $\arctan(u) \sim u$ au voisinage de 0.

b) Déterminer l'ensemble D des réels x pour lesquels $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x\,t)}{t\,(t^2+1)}\,dt$ est une intégrale convergente.
On note alors sa valeur $F(x)$.

2. On admet que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D et que

$$\forall\, x \in D, F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\arctan(x\,t)}{t\,(t^2+1)}\Big)\,dt$$

a) Pour x appartenant à une partie de D à préciser, déterminer deux réels a et b (indépendants de t, mais pouvant dépendre de x) tels que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\arctan(x\,t)}{t\,(t^2+1)}\Big) = \frac{a}{t^2+1} + \frac{b}{x^2t^2+1}$$

b) Calculer $F'(x)$ pour tout $x \in D$.

c) En déduire $F(x)$ pour tout $x \in D$.

3. Soit g la fonction $t \mapsto g(t) = \Big(\dfrac{\arctan t}{t}\Big)^2$.

Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\,dt$ et calculer sa valeur.

Solution

1. a) Clair, car $\arctan(0) = 0$ et $\arctan'(0) = 1$.

b) $\dfrac{\arctan(xt)}{t(t^2+1)} \underset{(t\to 0)}{\sim} x$ et $t > 0 \implies \Big|\dfrac{\arctan(xt)}{t(t^2+1)}\Big| \leqslant \dfrac{\pi}{2|t|^3}$.

la fonction à intégrer est donc continue sur $\mathbb{R}_+^*$, prolongeable par continuité en 0 et la règle de majoration donne la convergence (absolue si on ne veut pas discuter selon le signe de x) pour la borne infinie :

$$D = \mathbb{R}$$

2. a) On a : $\dfrac{\partial}{\partial x}\big(\dfrac{\arctan(xt)}{t(t^2+1)}\big) = \dfrac{1}{t(t^2+1)} \times \dfrac{t}{1+x^2t^2} = \dfrac{1}{(t^2+1)(x^2t^2+1)}$

Pour $x \notin \{-1, 1\}$, on a alors :

$\dfrac{\partial}{\partial x}\big(\dfrac{\arctan(xt)}{t(t^2+1)}\big) = \dfrac{a}{t^2+1} + \dfrac{b}{x^2t^2+1}$, avec :

$$a = \frac{1}{1-x^2} \text{ et } b = -\frac{x^2}{1-x^2}$$

b) D'où pour $x > 0$ et $x \neq 1$, via le changement de variable affine $x \mapsto xt = u$,

$$F'(x) = \frac{1}{1-x^2}\Big[\arctan(t) - x\,\arctan(xt)\Big]_0^{\to+\infty} = \frac{\pi}{2(1+x)}$$

encore valable en $x = 1$ par continuité (admise) de F'.
Par parité de F', on a donc :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, F'(x) = \frac{\pi}{2\,(1+|x|)}$$

c) Par intégration et imparité de F, avec $F(0) = 0$, il vient

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+, F(x) = \frac{\pi}{2}\,\ln(1+x) \text{ et } \forall\, x \in \mathbb{R}_-, F(x) = -\frac{\pi}{2}\,\ln(1-x)$$

3. a) $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+^*)$, $g(t) \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow}$ et $g(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi^2}{4t^2}$ donc I converge.

b) Par intégration par parties sur un segment de $\mathbb{R}_+^*$ et passage à la limite, on obtient :

$$I = \int_0^{+\infty} (\arctan t)^2 \times \frac{1}{t^2}\,dt = \Big[-\frac{1}{t}(\arctan t)^2\Big]_{\to 0}^{\to+\infty} + 2\int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{1+t^2} \times \frac{dt}{t} = 2F(1)$$

$$I = \pi \ln 2$$

Exercice 1.06.

On note C^0 l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$ et C_b^0 le sous-espace vectoriel de C^0 formé des fonctions bornées sur $\mathbb{R}_+$.
Soit ω une fonction de C^0 à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $\Omega(x) = \displaystyle\int_0^x \omega(t)\,dt$.

1. Soit $f \in C^0$. Pour tout $x > 0$, on pose $\varphi(f)(x) = \dfrac{1}{\Omega(x)} \displaystyle\int_0^x f(t)\omega(t)\,dt$.

Montrer que $\varphi(f)$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et qu'elle admet un prolongement par continuité en 0.
On note $T(f)$ la fonction ainsi prolongée.
Soit T l'application qui à tout $f \in C^0$ associe $T(f)$.

2. **a)** Montrer que T est un endomorphisme de C^0. Est-ce que $T(C_b^0) \subset C_b^0$?

b) Montrer que T est injectif.

3. On dit que λ est une valeur propre de T sur C^0 s'il existe une fonction $f \in C^0$ non identiquement nulle telle que pour tout $x \in \mathbb{R}_+ : T(f)(x) = \lambda f(x)$.
Soit λ une valeur propre de T et f une fonction telle que $T(f) = \lambda f$.

a) Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, (1-\lambda) f(x)\omega(x) = \lambda f'(x)\Omega(x) \quad (*)$.

b) Soit H une primitive de $\dfrac{\omega}{\Omega}$. En utilisant la fonction $\psi : x \mapsto f(x)\mathrm{e}^{-\frac{1-\lambda}{\lambda}H(x)}$, résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation $(*)$ précédente.

c) Déterminer l'ensemble des valeurs propres de T sur C^0 et donner pour chaque valeur propre λ, la dimension de l'espace $\{f \in C^0 \ / \ T(f) = \lambda f\}$.

Solution

1. a) La fonction ω étant continue strictement positive, la fonction $\varphi(f)$ est bien définie sur $\mathbb{R}^*$ et continue comme quotient de deux fonctions continues, le dénominateur ne s'annulant pas.

Montrons que $\lim_{x\to 0} \varphi(f)(x) = f(0)$.
En effet, soit $\varepsilon > 0$. La fonction f est continue en 0 : il existe $\delta > 0$ tel que $|x| \leqslant \delta$ entraîne $|f(x) - f(0)| \leq \varepsilon$. Ainsi, pour $|x| \leqslant \delta$, non nul :

$$|\varphi(f)(x) - f(0)| = \Big|\frac{1}{\Omega(x)}\int_0^x (f(t) - f(0))\omega(t)\,dt\Big|$$
$$\leqslant \frac{1}{|\Omega(x)|}\Big|\int_0^x |f(t) - f(0)|\omega(t)\,dt\Big| \leq \varepsilon$$

2. a) L'application T est manifestement linéaire. La question précédente montre que T est un endomorphisme de C^0.
Si la fonction f appartient à C_b^0 et si M est un majorant de $|f|$, alors :

$$x > 0 \implies |\varphi(f)(x)| \leqslant \frac{1}{|\Omega(x)|}\int_0^x |f(t)|\omega(t)\,dt \leqslant M$$

Ce résultat reste banalement vrai en 0. Ainsi C_b^0 est stable par T.

b) Soit $f \in C^0$ telle que $\varphi(f) = 0$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\displaystyle\int_0^x f(t)\omega(t)dt = 0$, puis en dérivant et en utilisant le fait que $\omega(x) > 0$, il vient $f(x) = 0$ pour tout x strictement positif, et aussi en 0 par continuité.

3. Au vu de l'injectivité de T, on a $\lambda \neq 0$.

La fonction Ω est non nulle et de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, pour f continue, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\omega(t)\,dt$ est également de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi $T(f)$ est de classe C^1 et puisque $f = \frac{1}{\lambda}T(f)$, f est de classe C^1

a) L'équation $T(f) = \lambda f$ donne pour $x > 0$:

$$\lambda f(x)\int_0^x \omega(t)\,dt = \int_0^x f(t)\omega(t)\,dt$$

En dérivant, il vient, toujours pour $x > 0$:
$\lambda(f'(x)\displaystyle\int_0^x \omega(t)\,dt + f(x)\omega(x)) = f(x)\omega(x)$, soit $(1-\lambda)f(x)\omega(x) = \lambda f'(x)\Omega(x)$.

b) Comme ω est la dérivée de Ω, une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de ω/Ω est la fonction $H : x \mapsto \ln(\Omega(x))$.
On remarque que :

$$\psi'(x) = \frac{d}{dx}\big(f(x)\mathrm{e}^{-\frac{1-\lambda}{\lambda}H(x)}\big) = \big(f'(x) - \frac{1-\lambda}{\lambda}f(x)H'(x)\big)\mathrm{e}^{-\frac{1-\lambda}{\lambda}H(x)}$$
$$= \big(f'(x) - \frac{1-\lambda}{\lambda}f(x)\frac{\omega(x)}{\Omega(x)}\big)\mathrm{e}^{-\frac{1-\lambda}{\lambda}H(x)} = 0$$

Donc, il existe une constante C telle que $\forall\, x > 0, \psi(x) = f(x)e^{-\frac{1-\lambda}{\lambda}H(x)} = C$, *i.e.* :

$$f(x) = C\mathrm{e}^{\frac{1-\lambda}{\lambda}\ln(\Omega(x))} = C[\Omega(x)]^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$$

c) Comme $\lim\limits_{x\to 0^+} \Omega(x) = 0$, la quantité $[\Omega(x)]^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$ n'a une limite finie en 0 que si $\dfrac{1-\lambda}{\lambda} \geqslant 0$, d'où la discussion finale :

Si $0 < \lambda \leqslant 1$, on vérifie aisément que la fonction $f : x \mapsto [\Omega(x)]^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$ est dans C^0 et vérifie $T(f) = \lambda f$ et λ est valeur propre de T de sous-espace propre associé la droite engendrée par la fonction $x \mapsto [\Omega(x)]^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$. (pour $\lambda = 1$, il s'agit donc de la fonction constante égale à 1)

Sinon, la seule fonction de C^0 vérifiant $T(f) = \lambda f$ est la fonction nulle et λ n'est pas valeur propre de T.

Exercice 1.07.

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels strictement positifs.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$u_n = \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \sqrt{a_3 + \cdots + \sqrt{a_n}}}} \qquad (*)$$

(On a donc $u_1 = \sqrt{a_1}$.)

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

2. Dans cette question, on suppose qu'il existe $\beta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, a_n = \beta$.

Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \sqrt{\beta + u_n}$, puis montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

3. Dans cette question, on suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, a_n = \alpha^{2^n}$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $u_n = \alpha\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots + \sqrt{1}}}}$
(n radicaux superposés).
En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et déterminer sa limite.

4. Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(a'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites à termes strictement positifs, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(u'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ les suites associées selon la formule $(*)$. Montrer que :

$$[\forall\, n \in \mathbb{N}^*, a_n \leq a'_n] \implies [\forall\, n \in \mathbb{N}^*, u_n \leq u'_n]$$

5. a) Supposons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergente et soit M tel que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, u_n \leq M$. Montrer que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, a_n \leq M^{2^n}$$

b) Réciproquement, on suppose la suite $\left(\frac{1}{2^n}\ln(a_n)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ majorée. Déduire des questions 3. et 4. que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

Solution

1. $\star$ On a : $a_1 + \sqrt{a_2} > a_1$, donc $u_2 = \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2}} > \sqrt{a_1} = u_1$.

$\star$ Supposons alors que la suite u soit croissante jusqu'à un certain rang n. On a donc, par décalage de la suite a (c'est-à-dire en utilisant l'hypothèse de récurrence sur la suite u' définie à partir de $a_2, a_3, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots$) :

$$\sqrt{a_2 + \sqrt{a_3 + \sqrt{\cdots + \sqrt{a_{n+1}}}}} > \sqrt{a_2 + \sqrt{a_3 + \sqrt{\cdots + \sqrt{a_n}}}}$$

et, par le premier point :

$$u_{n+1} = \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \sqrt{\cdots + \sqrt{a_{n+1}}}}} > \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \sqrt{\cdots + \sqrt{a_n}}}} = u_n$$

La suite u est donc strictement croissante jusqu'au rang $n+1$, et on conclut par le principe de récurrence :

la suite u est strictement croissante

2. Dans cette question, on a $u_1 = \beta$ et en regroupant : pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \sqrt{\beta + u_n}$.

Soit la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\beta + x}$. Cette fonction est évidemment strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, cet intervalle étant stable par f.

$\ell = \sqrt{\beta + \ell}$ donne $\ell^2 - \ell - \beta = 0$ de solution positive : $\ell = \dfrac{1 + \sqrt{1 + 4\beta}}{2} > \sqrt{\beta}$.

Ainsi $u_1 \leqslant \ell$ et par croissance de f : $u_2 \leqslant f(\ell) = \ell$ et récurrence : $\forall\, n, u_n \leqslant \ell$.

Comme on sait déjà que la suite est croissante :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est convergente de limite } \frac{1 + \sqrt{1 + 4\beta}}{2}$$

3. On a : $u_n = \sqrt{\alpha^2 + \sqrt{\alpha^4 + \sqrt{\alpha^8 + \cdots + \sqrt{\alpha^{2^n}}}}}$

$$u_n = \alpha\sqrt{1 + \frac{1}{\alpha^2}\sqrt{\alpha^4 + \sqrt{\alpha^8 + \cdots + \sqrt{\alpha^{2^n}}}}}$$

$$= \alpha\sqrt{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{\alpha^4}\sqrt{\alpha^8 + \cdots + \sqrt{\alpha^{2^n}}}}}$$

$$= \alpha\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\frac{1}{\alpha^8}\sqrt{\alpha^{16}+\cdots+\sqrt{\alpha^{2^n}}}}}}$$

et ainsi de suite, jusqu'à : $u_n = \alpha\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots+\sqrt{1}}}}$ et donc :

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \alpha\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

4. On a : $a_n \leqslant a'_n$, puis $a_{n-1}+\sqrt{a_n} \leqslant a'_{n-1}+\sqrt{a'_n}$, et un cran plus loin

$$a_{n-2}+\sqrt{a_{n-1}+\sqrt{a_n}} \leqslant a'_{n-2}+\sqrt{a'_{n-1}+\sqrt{a'_n}}$$

et ainsi, de proche en proche jusqu'à $u_n \leqslant u'_n$.

$$(\forall\, n\in\mathbb{N}^*, a_n \leqslant a'_n) \implies (\forall\, n\in\mathbb{N}^*, u_n \leqslant u'_n)$$

5. a) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente, alors elle est majorée. Notons M un de ses majorants. On obtient, par le résultat précédent et pour tout n :

$$M \geqslant u_n = \sqrt{a_1+\sqrt{a_2+\sqrt{a_3+\cdots+\sqrt{a_n}}}} \geqslant \sqrt{0+\sqrt{0+\sqrt{0+\cdots+\sqrt{a_n}}}}$$

Ainsi : $M \geqslant u_n \geqslant (a_n)^{2^{-n}}$ et donc : $a_n \leqslant M^{2^n}$.

b) Si $\forall\, n, a_n \leqslant M^{2^n}$, la suite (u_n) est majorée par la suite (u'_n) associée à la suite $(a'_n)_n = (M^{2^n})_n$.

Or, la suite $(u'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, donc elle est majorée et a fortiori la suite u est majorée.

Ainsi u, qui est croissante, est donc convergente.
Finalement :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est convergente} \iff (\frac{1}{2^n}\ln(a_n))_{n\in\mathbb{N}^*}, \text{ est majorée.}$$

Exercice 1.08.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $a_1,\ldots,a_n$ des réels non tous nuls. On considère les fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\prod_{k=1}^{n}x_k^2,\quad g(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{k=1}^{n}x_k^2 \quad\text{et}\quad h(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{k=1}^{n}a_kx_k.$$

1. a) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$. Déterminer son gradient en tout point.

b) Prouver que f admet un maximum sur la sphère unité S de $\mathbb{R}^n$ définie par

$$S=\{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n \;/\; \sum_{k=1}^{n}x_k^2=1\}$$

c) Déterminer le maximum de f sur S.

d) En déduire que pour tout point $u = (u_1, \ldots, u_n)$ de $\mathbb{R}^n$, on a :

$$|\prod_{k=1}^{n} u_k| \leqslant \Big(\frac{\|u\|}{\sqrt{n}}\Big)^n$$

où $\|.\|$ désigne la norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^n$.

2. a) Soit $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $a_i \neq 0$. On pose

$$H = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ / \ h(x_1, \ldots, x_n) = 1\} \text{ et } B = \big\{x \in \mathbb{R}^n \ / \ \|x\| \leqslant \frac{1}{|a_i|}\big\}$$

Prouver que l'ensemble $B \cap H$ est non vide, puis qu'il est un fermé borné de $\mathbb{R}^n$.

b) Justifier que la fonction g admet un minimum sur $B \cap H$. Prouver que ce minimum est aussi le minimum de g sous la contrainte $h(x_1, \ldots, x_n) = 1$.

c) Déterminer le minimum de g sur H.

Solution

1. a) La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ (et même $\mathcal{C}^\infty$) sur $\mathbb{R}^n$ comme produit de fonctions qui le sont de façon évidente. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, il vient

$$\partial_i(f)(x) = 2x_i \prod_{k=1, k\neq i}^{n} x_k^2$$

On trouve donc $\nabla(f)(x) = (2x_1x_2^2 \ldots x_n^2, 2x_2x_1^2x_3^2 \ldots x_n^2, \ldots, 2x_nx_1^2 \ldots x_{n-1}^2)$.

b) Comme $S = \{x \in \mathbb{R}^n; g(x) = 1\}$, on voit que S est fermé en utilisant la continuité de g. (On peut aussi écrire $S = \{x \in \mathbb{R}^n; |g(x) - 1| \leqslant 0\}$ si l'on veut se ramener à un ensemble du type $\{x \in \mathbb{R}^n; \varphi(x) \leqslant a\}$ avec φ continue sur $\mathbb{R}^n$).
Il est clair que S est borné. Comme f est continue sur le fermé borné S, elle y admet un maximum.

c) On est dans le cas d'application du théorème du cours qui nous dit qu'il faut qu'il existe un réel λ tel que $\nabla(f)(y) = \lambda\nabla(g)(y)$ en un point $y \in S$. Ce qui nous conduit aux équations : $2y_i \prod_{k=1, k\neq i}^{n} y_k^2 = 2\lambda y_i$, pour $i \in [\![1, n]\!]$.

En multipliant les deux membres par $y_i/2$, on obtient $\prod_{k=1}^{n} y_k^2 = \lambda y_i^2$.
Si $\lambda = 0$, on voit que $f(y) = 0$ qui ne peut pas être un maximum.
Si $\lambda \neq 0$, on en déduit que $y_i^2 = y_j^2$, puis que $y_i^2 = 1/n$ puisque $y \in S$.
On a donc nécessairement $f(y) = 1/n^n$ et il s'agit donc bien de points où f atteint son maximum sur S.

d) Si $u = 0$, l'inégalité est évidente, sinon on pose $x = u/\|u\| \in S$ et on trouve que $f(x) \leqslant 1/n^n$ d'après la question précédente. L'inégalité souhaitée en découle facilement.

2. a) Le point $x_0 = (0, \dots, 1/a_i, \dots, 0)$ appartient à $B \cap H$, ce dernier est donc non vide. Comme h et la norme euclidienne sont continues, on en tire comme en 1. b) que B et H sont fermés. Il en est donc de même pour leur intersection. Il est clair que $B \cap H$ est borné puisque B l'est déjà.

b) La fonction g est continue sur le fermé borné $B \cap H$, elle admet donc un minimum m sur cet ensemble. De plus, on remarque que l'on a obligatoirement $m \leqslant 1/a_i^2 = g(x_0)$ et $g(x) = \|x\|^2 > 1/a_i^2$ pour tout x de H qui n'appartient pas à B. Il en résulte immédiatement que m est aussi le minimum de g sur H.

c) On peut appliquer le théorème du cours qui nous dit qu'en un point $x \in H$ où le minimum est atteint, on a nécessairement

$$\nabla(g)(x) \in \{x \in \mathbb{R}^n ; \sum_{k=1}^{n} a_k x_k = 0\}^{\perp} = \mathrm{Vect}(a_1, \cdots, a_n)$$

Il existe donc un réel λ tel que $2x_k = \lambda a_k$ pour $k \in [\![1, n]\!]$, on en déduit que

$$0 = \sum_{k=1}^{n} a_k(2x_k - \lambda a_k) = 2 - \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k^2.$$

D'où :

$$m = f(x) = \sum_{k=1}^{n} \Big[\frac{a_k}{\sum_{\ell=1}^{n} a_\ell^2}\Big]^2 = \frac{1}{\sum_{\ell=1}^{n} a_\ell^2}$$

Exercice 1.09.

1. Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Soit f et g deux applications de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ continues ; de plus on suppose que g garde un signe constant sur $[a, b]$.

Montrer qu'il existe au moins un point c dans $[a, b]$ tel que :

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx$$

2. Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Soit f une application de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}^+$ de classe $\mathcal{C}^1$, décroissante et g une application de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ continue. On veut prouver le résultat suivant :

$$\exists\, c \in [a, b], \int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a)\int_a^c g(x)\,dx$$

a) Prouver le résultat si $f(a) = 0$.

On suppose dans la suite que $f(a) \neq 0$.

b) On note G la primitive de g sur $[a, b]$ nulle en a. Justifier l'existence d'au moins un point d dans $[a, b]$ tel que :

$$\int_a^b f'(x)G(x)\,dx = G(d)\int_a^b f'(x)\,dx$$

c) Conclure à l'aide d'une intégration par parties.

Solution

1. La fonction f est continue sur le segment $[a,b]$, donc il existe m et M tels que :

$$\forall\, x \in [a,b], m \leqslant f(x) \leqslant M$$

$\star$ Supposons que $\forall x \in [a,b], g(x) \geq 0$.

Comme g est à valeurs positives ou nulles :

$$\forall\, x \in [a,b], mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x)$$

Les bornes étant dans l'ordre croissant, par conservation des inégalités par encadrement : $\displaystyle\int_a^b mg(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leqslant \int_a^b Mg(x)\,dx$

Soit :

$$m\int_a^b g(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leqslant M\int_a^b g(x)\,dx$$

Si g est la fonction nulle le résultat demandé est banal et sinon $I = \displaystyle\int_a^b g(x)\,dx > 0$, ce qui permet d'écrire :

$$m \leqslant \frac{1}{I}\int_a^b f(x)g(x)\,dx \leqslant M$$

et comme $\frac{1}{I}\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx \in [m,M]$, le théorème des valeurs intermédiaires donne l'existence d'au moins un point $c \in [a,b]$ tel que $\frac{1}{I}\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)$.

Il n'y a plus qu'à remultiplier par I.

$\star$ Si g est à valeurs négatives ou nulles, il suffit d'appliquer le résultat précédent à la fonction $-g$.

2. a) Si $f(a) = 0$, alors comme f est positive décroissante et $a \leqslant b$, f est en fait la fonction nulle et le résultat est banal.

b) G est continue sur $[a,b]$ et f' est continue sur $[a,b]$ et garde un signe constant (négatif ou nul sur $[a,b]$).

Le résultat de la question 1. donne donc directement :

$$\exists\, d \in [a,b] \int_a^b G(x)f'(x)\,dx = G(d)\int_a^b f'(x)\,dx$$

c) En intégrant par parties le résultat précédent donne :

$$f(b)G(b) - f(a)G(a) - \int_a^b f(x)g(x)dx = G(d)(f(b) - f(a))$$

Comme $f(a) \neq 0$, ceci peut s'écrire :

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a)\big(\frac{f(b)}{f(a)}G(b) + \big(1 - \frac{f(b)}{f(a)}\big)G(d)\big)$$

Posons $\rho = \dfrac{f(b)}{f(a)}$, comme f est décroissante à valeurs positives et telle que $f(a) > 0$, on a $0 \leqslant \rho \leqslant 1$.

En notant m_G et M_G les bornes inférieure et supérieure de la fonction continue G sur le segment $[a, b]$, on a :

$$m_G = \rho m_G + (1-\rho)m_G \leqslant \rho G(b) + (1-\rho)G(d) \leqslant \rho M_G + (1-\rho)M_G = M_G$$

Une nouvelle application du théorème des valeurs intermédiaires donne :

$$\exists\, c \in [a,b],\ \frac{f(b)}{f(a)}G(b) + (1 - \frac{f(b)}{f(a)})G(d) = G(c) = \int_a^c g(x)\,dx$$

D'où le résultat.

Exercice 1.10.

On s'intéresse à l'ensemble $\mathcal{E}$ des fonctions $g : I =]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ vérifiant les deux propriétés :

$$\forall\, x \in I, g(x+1) - g(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} \qquad (1)$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0 \qquad (2)$$

1. Montrer que si g vérifie (1) et (2), alors $\forall\, x \in I$, la série $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(x+n)^2}$ converge et $g(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^2}$ (3).

2. a) Réciproquement, montrer que (3) définit une fonction g sur I vérifiant (1).

b) Quel est alors le sens de variation de g ?

c) Montrer que g vérifie (2). En déduire que $\mathcal{E}$ contient une fonction et une seule.

3. Déterminer un équivalent de g en $+\infty$.

4. Déterminer la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers -1 par valeurs supérieures.

5. On admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Calculer $g\big(-\frac{1}{2}\big)$.

Solution

1. Par sommation télescopique et passage à la limite :

$$g(x+n)-g(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\big[g(x+k+1)-g(x+k)\big]=-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(x+k)^2}$$

D'où :

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(x+n)^2}$$

2. a) La série est bien convergente (règle de Riemann), donc g est bien définie sur I et via les sommes partielles et passage à la limite :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(x+1+k)^2}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(x+k)^2}=\frac{1}{(x+n+1)^2}-\frac{1}{(x+1)^2}$$

D'où :

$$g(x+1)-g(x)=-\frac{1}{(x+1)^2}$$

b) $\forall\, x>-1, \forall\, n\in\mathbb{N}^*, x+n>0$, donc $x\mapsto 1/(x+n)^2$ est décroissante, et (via les sommes partielles) g décrot.

c) $t\mapsto 1/(x+t)^2$ est positive et décroissante sur $]-1,+\infty[$ et par comparaison série-intégrale :

$$\int_k^{k+1}\frac{dt}{(x+t)^2}\le\frac{1}{(x+k)^2}\le\int_{k-1}^{k}\frac{dt}{(x+t)^2}$$

Donc :

$$\int_1^{+\infty}\frac{dt}{(x+t)^2}\le g(x)\le\frac{1}{(x+1)^2}+\int_1^{+\infty}\frac{dt}{(x+t)^2}$$

soit : $\dfrac{1}{x+1}\le g(x)\le\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{(x+1)^2}$ et donc :

$$\lim_{+\infty} g=0$$

3. $\mathcal{E}$ contient une unique fonction, g définie par (3).

4. Par encadrement $g(x)\underset{(+\infty)}{\sim}\dfrac{1}{x}$

5. idem $\lim\limits_{(-1)^+} g=+\infty$.

6. Par décomposition en sommes de séries convergentes (ou via les sommes partielles)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{(2p)^2}+\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}\implies\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

et

$$g\big(-\tfrac{1}{2}\big)=\sum_{p=1}^{\infty}\frac{4}{(2p-1)^2}=\frac{\pi^2}{2}$$

Exercice 1.11.

1. a) Pour quelles valeurs du réel x, l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,dt$ est-elle convergente ?

On pose alors $f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,dt$.

b) Pour quelles valeurs du réel x, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{\sqrt{t^2-1}}\,dt$ est-elle convergente ?

On pose alors $g(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{\sqrt{t^2-1}}\,dt$.

c) Etudier la monotonie des fonctions f et g.

2. a) Montrer que pour tout réel $x > 0$, on a : $f(x) = \displaystyle\int_x^1 \frac{\mathrm{e}^{-t}-1}{t}\,dt - \ln(x) + f(1)$.

b) Montrer qu'il existe un réel k_1 tel que l'on a, au voisinage de 0 :

$$f(x) = -\ln(x) + k_1 + o(1)$$

3. a) Montrer que :

$$\forall\, x > 0, f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xu}}{u}du \text{ et } g(x) = f(x) + \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}\Big(\frac{1}{\sqrt{t^2-1}} - \frac{1}{t}\Big)\,dt$$

b) Montrer que pour tout $x > 0$, $g(x) = \mathrm{e}^{-x}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{2xu+u^2}}\,du$.

4. a) Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. Montrer que $0 < \dfrac{1}{\sqrt{a}} - \dfrac{1}{\sqrt{b}} \leqslant \dfrac{b-a}{2a^{3/2}}$.

b) Montrer que pour tout $x > 0$:

$$0 \leqslant \mathrm{e}^{-x}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{2xu}}\,du - g(x) \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-x}}{2(2x)^{3/2}}\int_0^{+\infty} \sqrt{u}\,\mathrm{e}^{-u}\,du$$

Solution

1. a) Soit $x > 0$, la fonction $\varphi : t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t}$ est définie, continue et positive sur $[x, +\infty[$. Au voisinage de $+\infty$, $\varphi(t) = o(\mathrm{e}^{-t})$. Il suit que l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,dt$ converge pour tout $x > 0$. En revanche $\varphi(t) \underset{(0)}{\sim} \dfrac{1}{t}$ et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,dt$ diverge. A fortiori, on ne peut pas prendre $x < 0$ et f est définie sur $]0, +\infty[$.

b) Soit $x > 0$. La fonction $\psi : t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-tx}}{\sqrt{t^2-1}}$ est définie, continue et positive sur $]1,+\infty[$. Au voisinage de $+\infty$, $\psi(t) = o(\mathrm{e}^{-xt})$ et $\displaystyle\int_2^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}dt$ converge. D'autre part, $\psi(t) \underset{(1^+)}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{2}\sqrt{t-1}}$ et $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{t-1}}dt$ converge en tant qu'intégrale de référence. Il suit que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{\sqrt{t^2-1}}dt$ converge pour tout $x > 0$. Mais pour $x \leqslant 0$, on a $\psi(t) \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{t^2-1}} \underset{(+\infty)}{\sim} \dfrac{1}{t}$ et l'intégrale proposée diverge. Ainsi, g est définie sur $]0,+\infty[$.

c) $\star$ f est dérivable et $f'(x) = -\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x} < 0$: f est décroissante.

$\star$ Soient x et y deux réels tels que $0 < x \leqslant y$. Pour tout $t \geqslant 1$, $\mathrm{e}^{-yt} \leqslant \mathrm{e}^{-xt}$. D'où, $\dfrac{\mathrm{e}^{-ty}}{\sqrt{t^2-1}} \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-tx}}{\sqrt{t^2-1}}$

Par conservation des inégalités par intégration (les bornes sont dans l'ordre croissant), on en déduit que $g(y) \leqslant g(x)$: g est donc décroissante sur $]0,+\infty[$.

2. a) $f(x) - f(1) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \ldots - \int_1^{+\infty} \ldots = \int_x^1 \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,dt = \int_x^1 \frac{\mathrm{e}^{-t}-1}{t}\,dt + \int_x^1 \frac{dt}{t}$

$$f(x) = \int_x^1 \frac{\mathrm{e}^{-t}-1}{t}\,dt - \ln x + f(1)$$

b) La fonction $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}-1}{t}$ se prolonge par continuité en 0 (par la valeur -1), donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-t}-1}{t}\,dt$ converge et la notant I, la relation précédente donne :

$$f(x) \underset{(0^+)}{=} -\ln x + f(1) + I + o(1)$$

3. a) • Soit $x > 0$ On effectue dans $f(x)$ le changement de variable affine $t = xu$, la fonction $u \mapsto xu$ réalisant une bijection strictement croissante et de classe $\mathcal{C}^1$ de $]1,+\infty[$ sur $]x,+\infty[$. On a alors

$f(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xu}}{u}\,du$

Puis par linéarité de l'intégration, $g(x) - f(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}\Big(\frac{1}{\sqrt{t^2-1}} - \frac{1}{t}\Big)dt$, ce qui donne la formule attendue.

b) Soit $x > 0$. On effectue dans $g(x)$ le changement de variable affine $t = \dfrac{u}{x} + 1$, la fonction $u \mapsto \dfrac{u}{x} + 1$ réalisant une bijection strictement croissante et de classe $\mathcal{C}^1$ de $]0,+\infty[$ sur $]1,+\infty[$. On a alors

$$g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-(u+x)}}{\sqrt{(u/x+1)^2-1}} \frac{du}{x} = \mathrm{e}^{-x} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{(u+x)^2-x^2}} du$$
$$= \mathrm{e}^{-x} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{2xu+u^2}} du.$$

4. a) Soient a et b tels que $b > a > 0$. On a :

$$0 < \frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{\sqrt{ab}} = \frac{b-a}{\sqrt{ab}(\sqrt{b}+\sqrt{a})} \leqslant \frac{b-a}{2a^{3/2}}.$$

b) Pour tout $x > 0$, on trouve, en remplaçant $g(x)$ par l'expression trouvée précédemment :

$$\mathrm{e}^{-x} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{2xu}} du - g(x) = \mathrm{e}^{-x} \Big(\int_0^{+\infty} (\frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{2xu}} - \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{2xu+u^2}}) du \Big)$$
$$= \mathrm{e}^{-x} \Big(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u} (\frac{1}{\sqrt{2xu}} - \frac{1}{\sqrt{2xu+u^2}}) du \Big)$$

On applique alors le résultat a) avec $a = 2xu > 0$ et $b = 2xu + u^2 > a > 0$. On en déduit que

$$0 < \mathrm{e}^{-u} \Big(\frac{1}{\sqrt{2xu}} - \frac{1}{\sqrt{2xu+u^2}} \Big) \leqslant \frac{\sqrt{u}\mathrm{e}^{-u}}{2(2x)^{3/2}}.$$

D'où le résultat par intégration.

Exercice 1.12.

On considère l'espace vectoriel E des fonctions continues sur l'intervalle $[0,1]$. Pour toute fonction $f \in E$, on définit la fonction moyenne $T(f)$ associée à f en posant

$$T(f)(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\, dt & \text{si } x \in]0,1] \\ f(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. a) Montrer $T : f \mapsto T(f)$ est un endomorphisme de E.

b) T est-il injectif ? Surjectif ?

2. Soient f et g deux fonctions appartenant à E. On considère la fonction F définie sur $[0,1]$ par :

$$\forall\, x \in [0,1], F(x) = x \int_0^x f(t)g(t)\, dt - \Big(\int_0^x f(t)\, dt \Big) \Big(\int_0^x g(t)\, dt \Big)$$

a) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et exprimer sa dérivée à l'aide d'une seule intégrale.

b) On suppose que f et g sont croissantes. Montrer que
$\forall\, x \in [0,1], T(fg)(x) \geqslant T(f)(x)T(g)(x)$.

c) Que peut-on dire si les deux fonctions f et g de E sont supposées décroissantes ?

d) Quelle inégalité obtient-on si l'une des fonctions est croissante et l'autre décroissante ?

3. Si $f \in E$, on lui associe la fonction $\widetilde{f}$ en posant $\widetilde{f}(x) = \max\limits_{t\in[0,x]} f(t)$.

a) Montrer que $\widetilde{f}$ est bien définie et croissante.

b) Soit x et y deux points de $[0,1]$ tels que $x < y$. Montrer que

$$|\widetilde{f}(y) - \widetilde{f}(x)| \leqslant \max_{(t,s)\in[x,y]^2} |f(t) - f(s)|$$

En déduire que $\widetilde{f}$ est continue.

c) Etablir l'inégalité suivante :

$$\int_0^1 \widetilde{f}(t)\widetilde{g}(t)\,dt \geqslant \Big(\int_0^1 \widetilde{f}(t)\,dt\Big)\Big(\int_0^1 \widetilde{g}(t)\,dt\Big)$$

Solution

1. a) Comme f est continue sur $]0,1]$, la fonction $T(f)$ est le quotient d'une primitive de f par une fonction continue qui ne s'annule pas, elle est donc continue sur $]0,1]$.
De plus $T(f)(x) = \dfrac{F(x)}{x} = \dfrac{F(x)-F(0)}{x-0}$, où F désigne la primitive de f nulle en 0. Ce qui prouve que $\lim\limits_{x\to 0} T(f)(x) = F'(0) = f(0)$.
Enfin, la linéarité de l'opérateur T est banale.

b) Si $T(f) = 0$, F s'annule sur $]0,1]$ (notation précédente), la fonction f s'annule donc sur $]0,1]$ et en 0 par continuité, par suite $f = 0$ et T est injectif. La fonction $T(f)$ est toujours de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1]$, il suffit donc de choisir une fonction $g \in E$ qui n'est pas dérivable en un point de $]0,1]$ (on peut prendre par exemple $g(x) = |x - 1/2|$) pour que l'équation $T(f) = g$ n'ait pas de solution. L'endomorphisme T n'est donc pas surjectif.

2. a) La fonction F est clairement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ comme somme de produits ne faisant intervenir que des primitives de fonctions continues et de la fonction $x \mapsto x$.
Le calcul de la dérivée donne :

$$F'(x) = \int_0^x f(t)g(t)\,dt + xfx)g(x) - f(x)\int_0^x g(t)\,dt - g(x)\int_0^x f(t)\,dt$$

Soit : $F'(x) = \displaystyle\int_0^x (f(x) - f(t))(g(x) - g(t))\,dt.$

b) Les fonctions f et g étant croissantes, on voit que l'intégrande précédent est positif, par suite $F'(x) \geqslant 0$. La fonction F est donc croissante et comme $F(0) = 0$, on aboutit à $T(fg)(x) \geqslant T(f)(x)T(g)(x)$ sur $]0,1]$ et ceci reste évidemment vrai en 0.

Si les deux fonctions f et g de E sont supposées décroissantes, l'intégrande correspondant à F' reste positif et on arrive à la même inégalité.

c) Si l'une des fonctions est croissante et l'autre décroissante, l'intégrande associé à F' est négatif et par suite F est décroissante.
On obtient alors $T(fg)(x) \leqslant T(f)(x)T(g)(x)$ sur $[0,1]$.

3. a) La fonction $\widetilde{f}$ est bien définie car f est une fonction continue, elle admet donc un maximum sur le segment $[0,x]$.
Si $x \leqslant y$, on a $[0,x] \subseteq [0,y]$ et par suite $\widetilde{f}(x) \leqslant \widetilde{f}(y)$, la fonction $\widetilde{f}$ est donc croissante.

b) $\star$ Si $x < y$, on observe que pour $t \leqslant x$ on a $f(t) \leqslant \widetilde{f}(x)$ et si $x \leqslant t \leqslant y$ alors il vient :

$$f(t) = (f(t)-f(x))+f(x) \leqslant |f(t)-f(x)|+f(x) \leqslant \max_{t,s\in[x,y]} |f(t)-f(s)|+\widetilde{f}(x).$$

D'où $\widetilde{f}(y) \leqslant \max\limits_{t,s\in[x,y]} |f(t)-f(s)| + \widetilde{f}(x)$.

Comme $\widetilde{f}$ est croissante, on observe que $|\widetilde{f}(y) - \widetilde{f}(x)| = \widetilde{f}(y) - \widetilde{f}(x)$ et que l'inégalité précédente conduit immédiatement à l'inégalité souhaitée.

On déduit de cette inégalité que si $|f(y) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon/2$ sur un intervalle I de la forme $I =]x_0 - \alpha, x_0 - \alpha[\cap [0,1]$, alors $|\widetilde{f}(y) - \widetilde{f}(x_0)| \leqslant \varepsilon$ sur I.
La continuité de $\widetilde{f}$ en x_0 provient alors clairement de celle de f en x_0.
(faire un petit dessin pour montrer le lien entre $\widetilde{f}$ et f)

c) Puisque $\widetilde{f}$ et $\widetilde{g}$ sont continues et croissantes, d'après 2. b) on a :

$$T(\widetilde{f}\widetilde{g})(1) \geqslant T(\widetilde{f})(1)T(\widetilde{g})(1)$$

et c'est exactement l'inégalité demandée.

Exercice 1.13.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
Soit $a_1, \ldots, a_n$ des réels non nuls. On considère les ensembles suivants :

$$\mathcal{E} = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n / \ \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{a_i^2} \leqslant 1\}$$

ainsi que :

$$S = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n / \ \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{a_i^2} = 1\}$$

et

$$\mathcal{E}_0 = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n / \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{a_i^2} < 1\}$$

1. **a)** Montrer que $\mathcal{E}$ est une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^n$ telle que : $\forall\, (x, y) \in \mathcal{E}^2, \frac{1}{2}(x + y) \in \mathcal{E}$.

b) Montrer que $\mathcal{E}_0$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et que S est un fermé borné de $\mathbb{R}^n$.

Soit $x \in \mathbb{R}^n$, tel que $x \notin \mathcal{E}$. On considère la fonction f définie sur $\mathcal{E}$ par :

$f(z) = \|z - x\|^2$, où $\|.\|$ représente la norme euclidienne canonique de $\mathbb{R}^n$

2. **a)** Montrer que $\inf_{z \in \mathcal{E}} f(z)$ existe et est atteint en un (ou plusieurs) point(s) de $\mathcal{E}$.

b) Soit z_0 un point où f atteint son minimum sur $\mathcal{E}$. En calculant le gradient de f, montrer que z_0 appartient à S.

c) Montrer que $\inf_{z \in \mathcal{E}} f(z)$ est atteint en un seul point. On le note x^*.

3. **a)** Montrer que le point $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ est défini par : il existe λ réel tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$

$$x_i^* = \frac{a_i^2 x_i}{a_i^2 + \lambda} \qquad (\star)$$

b) Montrer que l'on peut supposer $\lambda > 0$.

c) En étudiant la fonction φ définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2 x_i^2}{(a_i^2 + t)^2} - 1$$

montrer qu'il existe un unique λ vérifiant $(\star)$.

4. On suppose dans cette question que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $a_i = 1$. Déterminer le point x^* ainsi que $f(x^*)$.

Solution

1. a) $\star$ L'ensemble $\mathcal{E}$ est fermé car l'application $(x_1, \ldots, x_n) \to \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{a_i^2}$ est polynomiale donc continue.
$\star$ Il est borné car pour $x \in \mathcal{E}$, on a, pour tout indice i, $|x_i| \leqslant |a_i|$, donc $\|x\| \leqslant \|a\|$ (en posant bien entendu $a = (a_1, \ldots, a_n)$).
$\star$ Enfin, $\left(\frac{x_i + y_i}{2}\right)^2 \leqslant \frac{1}{2}(x_i^2 + y_i^2)$ (car $(x_i - y_i)^2 \geqslant 0$)
Donc avec $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$, et $z = \frac{1}{2}(x + y) = (z_1, \ldots, z_n)$:

$$x, y \in \mathcal{E} \implies \sum_{i=1}^{n} \frac{z_i^2}{a_i^2} \leqslant \frac{1}{2}\Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{a_i^2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i^2}{a_i^2}\Big) \leqslant \frac{1}{2}(1 + 1) = 1 \text{ et } z \in \mathcal{E}$$

b) $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{E}_0$ est fermé pour la même raison que précédemment donc $\mathcal{E}_0$ est ouvert et S est fermé, borné car $S = \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_0 = \mathcal{E} \cap (\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{E}_0)$.

2. a) La fonction f est continue, car polynomiale. Sa restriction à $\mathcal{E}$ qui est fermé et borné admet donc un minimum sur ce domaine.

b) Si ce minimum est atteint en un point z_0 de l'ouvert $\mathcal{E}_0$, c'est un point critique. Or :

$$\nabla f(z) = \big(2(x_1 - z_1), \dots, 2(x_n - z_n)\big)$$

Le seul point critique de f est donc le point x qui n'appartient pas à $\mathcal{E}$. Ainsi le minimum est-il atteint sur $\mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_0 = S$.

c) Supposons le minimum m atteint en $z_1 \neq z_2$ de S. Soit $z = \dfrac{z_1 + z_2}{2}$. Comme $z \in \mathcal{E}$, on a :

$$m \leqslant \|z - x\| = \frac{1}{2}\|(z_1 - x) + (z_2 - x)\| \leqslant \frac{1}{2}(\|z_1 - x\| + \|z_2 - x\|) = m$$

On a donc égalité dans les inégalités précédentes, et égalité dans l'inégalité du triangle. Il existe donc $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que $z_1 - x = \alpha(z_2 - x)$.

Comme $\|z_1 - x\| = \|z_2 - x\|$, il vient $\alpha = 1$ et $z_1 = z_2$, ce qui contredit l'hypothèse faite. (On peut aussi se contenter de faire un petit dessin pour comparer côtés et hauteur d'un triangle isocèle.)

Le minimum est donc atteint en un seul point noté x^*.

3. a) On utilise les multiplicateurs de Lagrange.

On cherche le minimum de f sous la contrainte $g(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{a_i^2} - 1 = 0$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\nabla(f(z) + \lambda g(z)) = 0$. Il vient :

$$\forall\, i \in [\![1, n]\!],\ z_i - x_i + \lambda \frac{z_i}{a_i^2} = 0, \text{ soit } \lambda \frac{x_i^*}{a_i^2} = x_i - x_i^* \text{ et } x_i^* = \frac{a_i^2 x_i}{a_i^2 + \lambda}$$

b) Comme $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i^*)^2 = \lambda^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^*}{a_i^2}$, on peut supposer $\lambda > 0$ (car $x \neq x^*$).

c) La fonction φ est clairement strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$ telle que l'on ait $\varphi(0) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^*}{a_i^2} > 1$ (car $x \notin \mathcal{E}$) et $\lim\limits_{+\infty} \varphi = 0$. Il existe donc un unique $\lambda_0 > 0$ tel que $\varphi(\lambda_0) = 0$. Ce λ_0 donnera le point x^*.

4. Dans le cas particulier de la sphère unité de $\mathbb{R}^n$, les calculs précédents donnent $x_i^* = \dfrac{x_i}{1 + \lambda}$ et $\varphi(\lambda) = 0$ donne $(1 + \lambda)^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \|x\|^2$; donc $\lambda_0 = \|x\| - 1$ (car $\|x\| > 1$). Le minimum est atteint en $\dfrac{x}{1 + \|x\| - 1}$ ce qui correspond à l'intersection de la sphère unité et de la demi-droite $[0, x[$.

Exercice 1.14.

Soit f une fonction définie sur $I = \mathbb{R}_+$ à valeurs réelles. Pour tout réel positif m, on définit la fonction h_m sur I, par $h_m : x \mapsto mx - f(x)$ et on note :

$$M(f) = \{m \in \mathbb{R}_+ \ / \ h_m \text{ est majorée sur } I\}$$

1. Montrer que si $m \in M(f)$, alors $[0, m] \subset M(f)$.

Désormais, lorsque $m \in M(f)$, on pose $f^*(m) = \sup_{x \in I} h_m(x) = \sup_{x \in I}(mx - f(x))$. La fonction f^*, ainsi définie sur $M(f)$, est appelée la fonction conjuguée de f.

2. Soit c un réel et α un réel strictement supérieur à 1. Pour les fonctions qui suivent, préciser $M(f)$ et expliciter, pour les réels x de $M(f)$, $f^*(x)$ en fonction de x.

a) $f : I \to \mathbb{R}, x \mapsto c$.

b) $f : I \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{x^\alpha}{\alpha}$.

3. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ telle que $M(f)$ soit non vide. Montrer que :

$$\forall\, x \in I, \forall\, m \in M(f), f(x) + f^*(m) \geqslant mx$$

4. Soient f, g deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$ telles que $f \leqslant g$. Montrer que $M(f) \subset M(g)$, puis que

$$\forall\, m \in M(f),\ g^*(m) \leqslant f^*(m)$$

5. On se propose de chercher les fonctions vérifiant $M(f) = I$ et $f = f^*$.

a) A l'aide de la question 2., déterminer une solution.

b) A l'aide des résultats précédents, montrer qu'il existe une seule fonction f égale à sa conjuguée.

Solution

1. Soit $m \in M(f)$ et $\mu \in [0, m]$. Comme $m \in M(f)$, la fonction h_m est majorée sur I et il existe un réel K tel que $\forall\, x \in I, mx - f(x) \leqslant K$.
Alors $\forall\, x > 0$, $\mu x - f(x) = mx - f(x) - (m - \mu)x \leqslant K$ et $\mu \in M(f)$.
Ainsi $[0, m] \subset M(f)$.

2. **a)** Soit f_1 la fonction constante égale c. Soit m un réel strictement positif, alors $\lim_{x \to +\infty}(mx - c) = +\infty$ et $m \notin M(f_1)$. Donc la fonction $h_m : x \mapsto mx - c$ est majorée sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $m = 0$. Ainsi,

$$M(f_1) = \{0\}, f_1^* : 0 \mapsto -c$$

b) Ici $h_m(x) = mx - \dfrac{x^\alpha}{\alpha}$, h_m est dérivable sur $\mathbb{R}^+$, avec $h'_m(x) = m - x^{\alpha-1}$.
Comme $\alpha > 1$, h_m passe par un maximum en $x_0 = m^{\frac{1}{\alpha-1}}$, ce maximum valant :

$$h_m(x_0) = m^{1+\frac{1}{\alpha-1}} - \frac{1}{\alpha} m^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} = \frac{\alpha-1}{\alpha} m^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$$

Donc $M(f_2) = I$ et $f_2^* : x \mapsto \dfrac{\alpha-1}{\alpha} x^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$.
On peut noter que f_2^* est de la même forme que f_2, en remplaçant $\alpha > 1$ par $\dfrac{\alpha}{\alpha-1} > 1$. (à suivre . . .)

3. Soit $m \in M(f)$ et $x \in I$. D'après la définition de $f^*(m)$:
$f(x) + f^*(m) \geqslant f(x) + h_m(x) = mx$.
Finalement :

$$\forall\, x \in I, \forall\, m \in M(f), f(x) + f^*(x) \geqslant mx$$

4. Soit f, g telles que $f > g$. Pour tout $m \in \mathbb{R}_+$ et pour tout $x \in I$,
$mx - g(x) \leqslant mx - f(x)$
Ainsi, si $m \in M(f)$, alors $x \mapsto mx - f(x)$ est bornée et $x \mapsto mx - g(x)$ est bornée. D'où $M(f) \subset M(g)$.

Alors, comme $f^*(m)$ est un majorant de $x \mapsto mx - f(x)$,

$$\forall\, x \in I, mx - g(x) \leqslant f^*(m)$$

Ainsi, $f^*(m)$ est un majorant de $x \mapsto mx - g(x)$ et $g^*(m) \leqslant f^*(m)$.

5. a) Soit $f_2 : x \mapsto \dfrac{x^2}{2}$, on a vu en 2. b) que $f_2^* = f_2$.

b) D'après la question 3., $\forall\, x \in I, \forall\, m \in M(f), f(x) + f^*(m) \geqslant mx$.
Ainsi, comme $f = f^*$ et $M(f) = I$, $\forall\, x \in I$, $2f(x) \geqslant x^2$. Ainsi :

$$\text{si } f = f^*, \text{ alors } f \geqslant f_2.$$

Comme $f \geqslant f_2$, d'après la question 4., on a $f^* \leqslant f_2^* = f_2$, et puisque $f = f^*$, $f \leqslant f_2$.
Finalement $f = f_2$ et le problème a donc une solution et une seule.

Exercice 1.15.

E désigne l'ensemble des suites de nombres entiers naturels $p = (p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$p_0 > 1, \text{ et } \forall\, n \in \mathbb{N}, p_n \leq p_{n+1}$$

Soit $p = (p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E. On définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, x_n = \frac{1}{p_0} + \frac{1}{p_0 p_1} + \frac{1}{p_0 p_1 p_2} + \cdots + \frac{1}{p_0 p_1 \ldots p_n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{p_0 p_1 \cdots p_k}$$

1. **a)** On suppose ici que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $p_n = a$, où a est un entier fixé tel que $a \geqslant 2$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer x_n et déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

b) On suppose ici que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $p_n = n + 2$. Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

c) On revient au cas général. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que sa limite appartient à $]0, 1]$.

Pour $p \in E$, on note alors $f(p)$ la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associée, définissant ainsi une application de E dans $]0, 1]$.

2. Soit $p = (p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $q = (q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux éléments distincts de E.

a) On suppose $p_0 > q_0$. Montrer que $f(p) < f(q)$.

b) On suppose $p_0 = q_0$. En introduisant $\ell = \min\{j \in \mathbb{N}^* \ / \ p_j \neq q_j\}$, montrer que $f(p) \neq f(q)$. Quelle propriété de f a-t-on ainsi obtenu ?

Solution

1. a) $x_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{a^{k+1}} = \frac{1}{a} \times \frac{1 - (\frac{1}{a})^{n+1}}{1 - \frac{1}{a}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{a-1}$

b) $x_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+2)!} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e} - 2$.

c) La suite (x_n) est strictement croissante de premier terme strictement positif et comme la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 2, on a : $x_n \leqslant \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{k+1}} \leqslant \frac{1}{2} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$.

La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante majorée par 1, donc convergente et sa limite appartient à $]0, 1]$.

2. **a)** La suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, donc par majoration du terme général puis passage à la limite :

$$f(p) \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p_0^{k+1}} = \frac{1}{p_0} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{p_0}} = \frac{1}{p_0 - 1}$$

Alors que $f(q) = \frac{1}{q_0} + \cdots > \frac{1}{q_0} \geqslant \frac{1}{p_0 - 1}$ (car $p_0 > q_0 \implies p_0 - 1 \geqslant q_0$, puisque l'on travaille avec des entiers)

Ainsi $f(p) < f(q)$.

b) Quitte à échanger p et q, on peut supposer $p_0 = q_0, p_1 = q_1, \ldots, p_{\ell-1} = q_{\ell-1}$ et $p_\ell > q_\ell$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $x_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{p_0 p_1 \cdots p_k}$ et $y_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{q_0 q_1 \cdots q_k}$

soit alors $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant \ell$. On a, les convergences ayant été vues :

$$f(p) = x_{\ell-1} + \frac{1}{p_0 \dots p_{\ell-1}} \sum_{k=\ell}^{\infty} \frac{1}{p_\ell \dots p_k}$$

$$\leqslant x_{\ell-1} + \frac{1}{p_0 \dots p_{\ell-1}} \sum_{k=\ell}^{n} \frac{1}{p_\ell^{k-\ell+1}} = x_{\ell-1} + \frac{1}{p_0 \dots p_{\ell-1}} \times \frac{1}{p_\ell - 1}$$

$$f(p) \leqslant x_{\ell-1} + \frac{1}{p_0 \dots p_{\ell-1}} \times \frac{1}{q_\ell}$$

tandis que

$$f(q) > y_\ell = \sum_{k=0}^{\ell} \frac{1}{q_0 q_1 \dots q_k} = x_{\ell-1} + \frac{1}{p_0 \dots p_{\ell-1}} \times \frac{1}{q_\ell}$$

(puisque la suite q coincide avec la suite p jusqu'au rang $\ell - 1$)

On a donc $f(p) \neq f(q)$.

On vient de démontrer que l'application f réalise une injection de E dans $]0, 1]$.

Exercice 1.16.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on considère l'application f_n définie comme suit :

$$f_n :]n, +\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{x-k}$$

1. Soit A un réel fixé strictement positif. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, l'équation $f_n(x) = A$ admet une unique solution que l'on notera x_n.

2. Déterminer la limite de la suite $(x_n)_n$.

3. a) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(n+1)$.

En déduire qu'il existe un entier n_1 tel que $\forall\, n \geqslant n_1, x_n > n + 1$.

b) Plus généralement, montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe un rang n_k tel que $\forall\, n \geqslant n_k, x_n > n + k$.

4. Montrer que pour tout entier $n \geqslant n_1$

$$\int_{x_n - n}^{x_n + 1} \frac{dt}{t} \leqslant f_n(x_n) = A \leqslant \int_{x_n - n - 1}^{x_n} \frac{dt}{t}$$

5.a) Montrer que la suite $\left(\frac{x_n}{n}\right)_n$ est convergente et exprimer sa limite en fonction de A.

b) Déterminer la nature de la série de terme général $\frac{1}{x_n}$.

Solution

1. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on pose $g_k : x \mapsto \frac{1}{x-k}$. La fonction g_k est strictement décroissante sur $]n, +\infty[$. Par somme, $f_n = g_0 + g_1 + \dots + g_n$ est continue et strictement décroissante sur $]n, +\infty[$.

Lorsque x tend vers n^+, $g_n : x \mapsto \dfrac{1}{x-n}$ tend vers $+\infty$ et $\lim\limits_{x\to n} f_n(x) = +\infty$.
Lorsque x tend vers $+\infty$, chaque fonction g_k tend vers 0 et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$.
La fonction f_n réalise donc une bijection de $]n, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$. Ainsi, tout réel $A > 0$ admet un unique antécédent $x_n \in]n, +\infty[$ par f_n.

2. Pour tout entier n, $x_n > n$. Donc, par comparaison, la suite (x_n) diverge vers $+\infty$.

3. Pour tout entier n, $f_n(n+1) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{(n+1)-k} = \sum\limits_{u=1}^{n+1} \dfrac{1}{u}$, grâce au changement d'indice $u = (n+1) - k$.
On reconnaît la somme partielle de rang $n+1$ de la série harmonique.
Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(n+1) = +\infty$.
Ainsi, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $f_n(n+1) > A = f_n(x_n)$. D'où, par stricte décroissance de f_n, pour tout $n \geqslant n_0$, $x_n > n+1$.
Plus généralement :

$$f_n(n+p) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+p-k} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p+1} + \cdots + \frac{1}{p+n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

Ainsi pour n assez grand $f_n(n+p) > A$ et $x_n > n+p$

4. Soit $n \geqslant n_0$. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Prenons un réel t tel que $x_n - k \leqslant t \leqslant x_n - k + 1$.
Comme $x_n - k > (n+1) - k \geqslant 1$, nous sommes dans l'intervalle $]0, +\infty[$, intervalle dans lequel la fonction inverse est décroissante. Nous obtenons donc $\dfrac{1}{x_n-k+1} \leqslant \dfrac{1}{t} \leqslant \dfrac{1}{x_n-k}$ puis en intégrant sur $[x_n - k + 1, x_n - k]$:

$$\frac{1}{x_n-k+1} \leqslant \int_{x_n-k}^{x_n-k+1} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{x_n-k}.$$

En opérant de même avec un réel t tel que $0 < x_n - k - 1 \leqslant t \leqslant x_n - k$, on obtient :

$$\frac{1}{x_n-k} \leqslant \int_{x_n-k-1}^{x_n-k} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{x_n-k-1}.$$

En combinant les deux inégalités obtenues, on obtient :

$$\int_{x_n-k}^{x_n-k+1} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{x_n-k} \leqslant \int_{x_n-k-1}^{x_n-k} \frac{dt}{t}$$

On somme pour k allant de 0 à n, ce qui donne grâce à la relation de Chasles :

$$\int_{x_n-n}^{x_n+1} \frac{dt}{t} \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{x_n-k} = f_n(x_n) \leqslant \int_{x_n-n-1}^{x_n} \frac{dt}{t}.$$

5. a) Comme une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ sur $]0, +\infty[$ est la fonction ln, l'inégalité précédente se réécrit :

$$\ln\Big(\frac{x_n+1}{x_n-n}\Big) \leqslant A \leqslant \ln\Big(\frac{x_n}{x_n-n-1}\Big) \qquad (**).$$

L'inégalité de gauche de $(**)$ donne une fois transformée $x_n \geqslant \dfrac{1+ne^A}{e^A-1}$, d'où :

$$\frac{x_n}{n} \geqslant \frac{1/n+e^A}{e^A-1}.$$

L'inégalité de droite de $(**)$ donne $x_n \leqslant \dfrac{(n+1)e^A}{e^A-1}$, d'où $\dfrac{x_n}{n} \leqslant \dfrac{(1+1/n)e^A}{e^A-1}$.

Par théorème d'encadrement, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{n} = \dfrac{e^A}{e^A-1}$.

b) D'après la question précédente, $\dfrac{1}{x_n} \sim (\dfrac{e^A-1}{e^A})\,\dfrac{1}{n}$, les deux termes comparés étant positifs.
Donc, par critère d'équivalence, la série $\sum \dfrac{1}{x_n}$ diverge.

Exercice 1.17.

1. **a)** Déterminer l'ensemble D' des réels α tels que l'intégrale $G(\alpha) = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t^\alpha}$ converge.

b) Déterminer l'ensemble D des réels α tels que l'intégrale $F(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha}$ converge.

2. Soit p et q des réels quelconques. On pose $I(p,q) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{2q}}{1+t^{2p}}\,dt$.

a) Déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$ des couples $(p,q) \in \mathbb{R}^2$ tels que l'intégrale $I(p,q)$ converge.

b) Représenter l'ensemble solution $\mathcal{S}$ dans un repère cartésien du plan, avec p en abscisse et q en ordonnée. On hachurera la partie du plan correspondant à l'ensemble des points M de coordonnées $(p,q) \in \mathcal{S}$.

3. **a)** Justifier que $t \mapsto u = t^{2q+1}$ définit un changement de variables admissible dans l'intégrale $I(p,q)$, pour $q > -1/2$, et en déduire une relation entre $I(p,q)$ et $F(\alpha)$ pour des valeurs de p, q et α à préciser.

b) En utilisant le changement de variable $u \mapsto t = u^{1/(1-\alpha)}$, montrer que pour α dans un intervalle à préciser on a

$$F(\alpha) = G(\alpha) + \frac{1}{\alpha-1}\,G\big(\frac{\alpha}{\alpha-1}\big)$$

c) On admet que, pour $\alpha \in D$, $G(\alpha) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\alpha+1}$.
Pour $\alpha \in D$, exprimer $F(\alpha)$ comme la somme d'une série.

d) En déduire l'expression de $I(p,q)$ sous forme d'une série, pour des valeurs de p et q à préciser.

Solution

1. a) $f : t \mapsto \dfrac{1}{1+t^\alpha}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ si $\alpha \geqslant 0$ et $\lim\limits_{t\to 0} f(t) = 0$ si $\alpha < 0$. L'intégrale définissant $G(\alpha)$ est donc convergente pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

b) $f(t) \underset{(+\infty)}{\sim} \begin{cases} \dfrac{1}{t^\alpha} & \text{si } \alpha > 0 \\ 1/2 & \text{si } \alpha = 0 \\ 1 & \text{si } \alpha \leqslant 0 \end{cases}$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

$$D' = \mathbb{R}, D =]1, +\infty[$$

2. a) Notons $h_{p,q} : t \mapsto \dfrac{t^{2q}}{1+t^{2p}}$.

$\star$ En 0 : $h_{p,q}(t) \sim \begin{cases} t^{2q} & \text{si } p > 0, \text{ intégrable sur }]0,1] \text{ lorsque } q > -1/2 \\ \frac{1}{2}t^{2q} & \text{si } p = 0 \text{ intégrable sur }]0,1] \text{ lorsque } q > -1/2 \\ t^{2(q-p)} & \text{si } p < 0, \text{ intégrable sur }]0,1] \text{ lorsque } q - p > -1/2 \end{cases}$

$\star$ En $+\infty$:

$h_{p,q}(t) \sim \begin{cases} 1/t^{2(p-q)} & \text{si } p > 0, \text{ intégrable sur } [+\infty[\text{ lorsque } p - q > 1/2 \\ \frac{1}{2}t^{2q} & \text{si } p = 0, \text{ intégrable sur } [1, +\infty[\text{ lorsque } q < -1/2 \\ t^{2q} & \text{si } p < 0, \text{ intégrable sur } [1, +\infty[\text{ lorsque } q < -1/2 \end{cases}$

En résumé : $(p,q) \in \mathcal{S} \iff [p > 0 \text{ et } -\frac{1}{2} < q < p - \frac{1}{2}]$ ou $[p < 0$ et $p - \frac{1}{2} < q < -\frac{1}{2}]$.

b) Dans le plan (p,q) on trace les deux droites d'équations respectives $q = -\frac{1}{2}$ et $q = p - \frac{1}{2}$ et l'ensemble $\mathcal{S}$ des points situés dans les deux angles aigus (ouverts) formés par ces deux droites.

3. a) Pour $q > -1/2$, $t \mapsto t^{2q+1} = u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ bijective de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et alors : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{2q}}{1+t^{2p}}\,dt = \frac{1}{2q+1}\int_0^{+\infty} \frac{u^{2q/(2q+1)}}{1+u^{2p/(2q+1)}} u^{-2q/(2q+1)}\,du$, donc :

$$I(p,q) = \frac{1}{2q+1}\,F\Big(\frac{2p}{2q+1}\Big)$$

à condition bien entendu que (p,q) appartienne à $\mathcal{S}$, donc à condition que $p > 0$ et $q < p - \frac{1}{2}$, ce qui donne bien $\alpha = \dfrac{2p}{2q+1} > 1$.

b) Le changement de variable $t = u^{1/(1-\alpha)}$, est de classe $\mathcal{C}^1$ bijectif de $[1, +\infty[$ sur $]0,1]$, avec $\alpha/(\alpha-1) > 1$ d'où, pour $\alpha > 1$,

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha} = -\frac{1}{1-\alpha}\int_0^1 \frac{du}{1+u^{\alpha/(\alpha-1)}} = \frac{1}{\alpha-1}\,G\big(\frac{\alpha}{\alpha-1}\big), \text{ et :}$$

$$F(\alpha) = G(\alpha) + \frac{1}{\alpha-1}\,G\big(\frac{\alpha}{\alpha-1}\big)$$

c) $F(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\,\alpha+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\,\alpha+\alpha-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \Big[\frac{(-1)^n}{n\,\alpha+1} + \frac{(-1)^{n-1}}{n\,\alpha-1}\Big]$

$$F(\alpha) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\,(-1)^{n-1}}{n^2\,\alpha^2-1}$$

d) Pour $-1/2 < q < p - 1/2$ (et $p > 0$)

$$I(p,q) = \frac{1}{2q+1}\Big[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\,(-1)^{n+1}}{n^2\,(\frac{2p}{2q+1})^2-1}\Big]$$

Exercice 1.18.

On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par

$$f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x-1} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Démontrer que f est continue sur $[0,+\infty[$ et prouver que : $\forall\, x \in [0,+\infty[, 0 < f(x) \leqslant 1$.

2. Etablir que pour tout entier naturel n non nul et tout réel strictement positif x, on a :

$$\frac{x\mathrm{e}^{-nx}}{\mathrm{e}^x-1} = \frac{x}{\mathrm{e}^x-1} - \sum_{k=1}^{n} x\mathrm{e}^{-kx}$$

3. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x.\mathrm{e}^{-nx}\,dx$ est convergente et déterminer sa valeur.

4. Prouver que pour tout entier naturel n non nul, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x.\mathrm{e}^{-nx}}{\mathrm{e}^x-1}\,dx$ est convergente et démontrer que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} \frac{x.\mathrm{e}^{-nx}}{\mathrm{e}^x-1}\,dx = 0$.

5. Déduire de ce qui précède que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

6. On admet que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. En adaptant les méthodes développées aux questions précédentes, prouver que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x+1}\,dx$ converge et vaut $\frac{\pi^2}{12}$.

Solution

1. $\mathrm{e}^x - 1 \underset{(0)}{\sim} x$ fait partie du patrimoine et la continuité de f en 0 est donc acquise.
$\mathrm{e}^x - 1 \geqslant x$ est tout aussi classique et on a bien $x \geqslant 0 \implies 0 < f(x) \leqslant 1$.

2. Pour tout entier naturel n non nul, et tout réel strictement positif x, on a :
$$\sum_{k=1}^{n} x\mathrm{e}^{-kx} = x\mathrm{e}^{-x} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{-(k-1)x} = x\mathrm{e}^{-x} \sum_{j=0}^{n-1} (\mathrm{e}^{-x})^j = x\mathrm{e}^{-x} \frac{1-\mathrm{e}^{-nx}}{1-\mathrm{e}^{-x}} = x\frac{1-\mathrm{e}^{-nx}}{\mathrm{e}^x - 1}$$
et on remet dans l'ordre souhaité.

3. Pour $a > 0$, $\displaystyle\int_0^a x\mathrm{e}^{-nx}dx = -\frac{1}{n}\left[x\mathrm{e}^{-nx}\right]_0^a + \frac{1}{n}\int_0^a \mathrm{e}^{-nx}dx$
$$= -\frac{1}{n}a\mathrm{e}^{-na} + \frac{1}{n^2}(1-\mathrm{e}^{-na}),$$
et, par passage à la limite :
$$\int_0^{+\infty} x.\mathrm{e}^{-nx}dx = \frac{1}{n^2}$$

4. Pour tout entier naturel n non nul et $x > 0$, on a $0 \leqslant \dfrac{x.\mathrm{e}^{-nx}}{\mathrm{e}^x - 1} \leqslant \mathrm{e}^{-nx}$ et la fonction à intégrer se prolonge par continuité en 0, l'existence de l'intégrale s'en déduit et de plus :
$0 \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x.\mathrm{e}^{-nx}}{\mathrm{e}^x - 1}dx \leqslant \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx}\,dx = \frac{1}{n}$, donc : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{x.\mathrm{e}^{-nx}}{\mathrm{e}^x - 1}\,dx = 0.$

5. f est continue sur $\mathbb{R}_+$, positive et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2 f(x) = 0$, donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.
Pour tout entier n non nul, on tire de 2. :
$$\int_0^{+\infty} \frac{x\mathrm{e}^{-nx}}{\mathrm{e}^x - 1}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1}\,dx - \sum_{k=1}^{n} \int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-kx}dx$$
d'où :
$$\int_0^{+\infty} \frac{x\mathrm{e}^{-nx}}{\mathrm{e}^x - 1}dx = \int_0^{+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1}dx - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$
puis par passage à la limite :
$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

6. $\star$ Pour tout réel x et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$\sum_{k=1}^{n} x(-\mathrm{e}^{-x})^k = -x\mathrm{e}^{-x} \sum_{k=1}^{n} (-\mathrm{e}^{-x})^{k-1} = -x\mathrm{e}^{-x} \sum_{j=0}^{n-1} (-\mathrm{e}^{-x})^j$$
$$= -x\mathrm{e}^{-x} \frac{1-(-1)^n\mathrm{e}^{-nx}}{1+\mathrm{e}^{-x}} = -\frac{x}{\mathrm{e}^x + 1} - (-1)^n \frac{x\mathrm{e}^{-nx}}{\mathrm{e}^x + 1}$$

Par intégration et passage à la limite quand n tend vers l'infini, on a :
$0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x+1}dx + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k^2}$
On a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k^2} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(2i)^2} + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(2i-1)^2} = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2} + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(2i-1)^2}$.
on en déduit, par passage à la limite : $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(2i-1)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{4}\times\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}$.
D'autre part : $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k}{k^2} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(2i)^2} - \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(2i-1)^2}$, d'où
$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2} = \frac{1}{4}\times\frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{8} = -\frac{\pi^2}{12}$.
D'où : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x}{\mathrm{e}^x+1}dx = -\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}$

Exercice 1.19.

1. **a)** Montrer que pour tout $x \in [0,1[$, l'intégrale $\displaystyle\int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{t-x}}$ converge et calculer alors sa valeur notée $I(x)$.

b) Soit f une fonction continue sur $[0,1]$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_x^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t-x}}dt$ converge pour tout $x \in [0,1[$ et déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}\int_x^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t-x}}dt$.

On note alors $T(f)$ la fonction définie sur $[0,1]$ par

$$T(f)(x) = \int_x^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t-x}}dt, \text{ si } 0 \leqslant x < 1 \text{ et } T(f) \text{ continue en } 1$$

2. **a)** Montrer que pour tout $x \in [0,1[$, on a

$$T(f)(x) = \sqrt{1-x}\int_0^1 \frac{f\big(x+(1-x)u\big)}{\sqrt{u}}du.$$

b) On suppose f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, montrer que la fonction $T(f)$ est continue sur $[0,1]$.

3. On suppose dans cette question que $f(1) \neq 0$.

a) Donner un équivalent de $T(f)$ au voisinage de 1.

b) Montrer que $T(f)$ n'est pas dérivable en $x = 1$.

4. **a)** Déterminer une constante $C > 0$ telle que pour toute fonction f continue sur $[0,1]$, on a :

$$\sup_{x\in[0,1]}|T(f)(x)| \leqslant C \sup_{x\in[0,1]}|f(x)|$$

b) Déterminer la plus petite constante C vérifiant l'inégalité précédente.

Solution

1. a) Pour $x \in [0,1[$, la fonction $t \to \dfrac{1}{\sqrt{t-x}}$ est continue sur $]x,1]$, et la règle de Riemann donne la convergence de l'intégrale pour la borne inférieure x. De plus par intégration immédiate :

$$I(x) = 2\sqrt{1-x}, \text{ en particulier } I(0) = 2$$

b) La fonction f est bornée sur $[0,1]$. Donc, il existe $C \geqslant 0$ tel que pour tout $t \in]x,1]$, on a $\left|\dfrac{f(t)}{\sqrt{t-x}}\right| \leqslant \dfrac{C}{\sqrt{t-x}}$, ce qui montre que l'intégrale définissant $T(f)(x)$ converge absolument, donc converge : $T(f)(x)$ est bien défini pour tout $x \in [0,1[$. Enfin :

$$|T(f)(x)| \leqslant 2C\sqrt{1-x} \implies \lim_{x\to 1^-} T(f)(x) = 0$$

On pose donc $T(f)(1) = 0$ pour assurer la continuité (à gauche) en 1.

2. a) Le changement de variable affine $t = x + (1-x)u$ donne la réponse.

b) Il suffit de montrer la continuité de

$$g : x \mapsto \int_0^1 \frac{f(x+(1-x)u)}{\sqrt{u}}\,du = \int_0^1 \frac{f(u+x(1-u))}{\sqrt{u}}\,du.$$

On a pour $x \in [0,1]$ et h tel que $x+h \in [0,1]$:

$$g(x+h) - g(x) = \int_0^1 \frac{f(u+(x+h)(1-u)) - f(u+x(1-u))}{\sqrt{u}}\,du$$

Or $|f(u+(x+h)(1-u)) - f(u+x(1-u))| \leqslant |h|(1-u)\max(|f'|) \leqslant |h| \max_{[0,1]}(|f'|)$

Ainsi : $|g(x+h) - g(x)| \leqslant |h| \max(|f'|) \displaystyle\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u}} = 2|h| \max(|f'|)$.

On en déduit la continuité de g donc de $T(f)$.

3. a) Pour intégrer localement un équivalent, il nous faut revenir aux définitions « epsilonesques » :

Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $|x-1| \leqslant \delta$ entraîne $|f(t) - f(1)| \leqslant \varepsilon$. Ainsi pour $x \geqslant 1-\delta$:

$$\begin{aligned}\left|T(f)(x) - 2f(1)\sqrt{1-x}\right| &= \int_x^1 \frac{f(t)-f(1)}{\sqrt{t-x}}\,dt \leqslant \int_x^1 \left|\frac{f(t)-f(1)}{\sqrt{t-x}}\right| dt \\ &\leqslant 2\varepsilon\sqrt{1-x}\end{aligned}$$

Ainsi $x \geqslant 1-\delta \implies \left|\dfrac{T(f)(x)}{2f(1)\sqrt{1-x}} - 1\right| \leqslant \dfrac{2\varepsilon}{|f(1)|}$ et $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{T(f)(x)}{2f(1)\sqrt{1-x}} = 1$

$$T(f)(x) \underset{(1^-)}{\sim} 2f(1)\sqrt{1-x}$$

b) La question précédente montre que $\dfrac{T(f)(x)-T(f)(1)}{x-1} \underset{(1^-)}{\sim} -\dfrac{2f(1)}{\sqrt{1-x}}$ qui n'est pas de limite finie en 1, donc $T(f)$ n'est pas dérivable en 1(la représentation graphique admet une tangente verticale)

4. a) La question 1 montre que $|T(f)(x)| \leqslant (\max\limits_{[0,1]}|f|)2\sqrt{1-x} \leqslant 2\max\limits_{[0,1]}|f|$.

b) En prenant $f=1$, il vient $T(f)(x)=2\sqrt{1-x} \leqslant 2$. Cela montre que 2 est la meilleure constante possible.

2

ALGÈBRE

Exercice 2.01.

Dans cet exercice, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
$\forall\,(f,g)\in\mathcal{L}(E)^2$, on pose $[f,g]=f\circ g-g\circ f$.

On dira qu'un endomorphisme f de E est *nilpotent* s'il existe un entier naturel n, tel que $f^n=0$.

1. a) Montrer que : $\forall\,(f,g,h)\in\mathcal{L}(E)^3, [[f,g],h]+[[g,h],f]+[[h,f],g]=0$.

b) Soit $(f,g)\in\mathcal{L}(E)^2$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $[f,g]=[g,f]$.

2. Soit $f\in\mathcal{L}(E)$. On souhaite démontrer dans cette question l'équivalence des propositions :

(i) Il existe un projecteur $p\in\mathcal{L}(E)$ tel que $f=[p,f]$.
(ii) $f^2=0$.

a) On suppose (i). Montrer successivement que $p\circ f\circ p=0$, puis $f\circ p=0$ et conclure.

b) On suppose (ii). En considérant une projection p d'image $\mathrm{Im}(f)$, conclure.

3. Soit g fixé dans $\mathcal{L}(E)$.

a) Démontrer que l'application $\varphi_g:\mathcal{L}(E)\to\mathcal{L}(E), f\mapsto[f,g]$ est linéaire.

b) Démontrer que :

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\forall\, f\in\mathcal{L}(E), (\varphi_g)^n(f)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}g^k\circ f\circ g^{n-k}.$$

c) En déduire que si g est nilpotent alors φ_g est nilpotent.

4. Résoudre l'équation $[f, g] = id_E$, d'inconnues f et g appartenant à $\mathcal{L}(E)$.

Solution

1. a) Soit $(f, g, h) \in \mathcal{L}(E)^3$. Alors :
$[[f, g], h] = [f \circ g - g \circ f, h] = f \circ g \circ h - g \circ f \circ h - h \circ f \circ g + h \circ g \circ f$,
d'où, en faisant tourner les lettres et en écrivant par simple juxtaposition une composition :

$$[[f, g], h] + [[g, h], f] + [[h, f], g] = (fgh - gfh - hfg + hgf) + (ghf - hgf - fgh + fhg) + (hfg - fhg - ghf + gfh) = 0$$

b) Pour $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$, on a $[f, g] = f \circ g - g \circ f = -(g \circ f - f \circ g) = -[g, f]$.
On a donc $[f, g] = [g, f]$ si et seulement si, $[f, g] = 0$, soit $f \circ g = g \circ f$.

2. a) Supposons qu'il existe un projecteur p tel que $p \circ f - f \circ p = f$.

En composant d'abord à gauche par p, $p \circ f - p \circ f \circ p = p \circ f$, d'où $p \circ f \circ p = 0$.

En revenant au point de départ et en composant maintenant à droite par p, comme $p \circ f \circ p = 0$, il vient : $-f \circ p = f \circ p$, ce qui équivaut à $f \circ p = 0$.
Enfin $f^2 = (p \circ f)^2 = p \circ (f \circ p) \circ f = 0$.

b) Réciproquement, supposons $f^2 = 0$, c'est-à-dire $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$. Soit F tel que $\mathrm{Im}(f) \oplus F = E$ et p la projection sur $\mathrm{Im}(f)$ parallèlement à F.
Soit $x \in E$.
D'une part $p \circ f(x) = f(x)$ car $f(x) \in \mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(p)$.
D'autre part, $f \circ p(x) = 0$ car $p(x) \in \mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.

D'où : $[p, f](x) = (p \circ f - f \circ p)(x) = f(x)$ et le résultat.

3. a) Montrons que φ_g est linéaire. Soit $(f, f') \in \mathcal{L}(E)^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$. Alors :

$$\begin{aligned}\varphi_g(\alpha f + \beta f') &= [\alpha f + \beta f', g] = (\alpha f + \beta f') \circ g - g \circ (\alpha f + \beta f') \\ &= \alpha(f \circ g - g \circ f) + \beta(f' \circ g - g \circ f') \\ &= \alpha\varphi_g(f) + \beta\varphi_g(f')\end{aligned}$$

Donc $\varphi_g \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$.

Enfin, $\mathrm{Ker}(\varphi_g)$ est l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec g.

b) Raisonnons par récurrence et notons encore la composition par simple juxtaposition.
$\rightarrow (\varphi_g)^0(f) = f$, et l'égalité proposée est alors banale.

$\rightarrow$ Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $(\varphi_g)^n(f) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} g^k f g^{n-k}$, alors

$(\varphi_g)^{n+1}(f) = \varphi_g((\varphi_g)^n(f)) = [(\varphi_g)^n(f), g] = (\varphi_g)^n(f) \circ g - g \circ (\varphi_g)^n(f)$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} g^k f g^{n-k+1} - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} g^{k+1} f g^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} g^k f g^{n-k+1} - \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \binom{n}{k-1} g^k f g^{n+1-k}$$

$$(\varphi_g)^{n+1}(f) = f g^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] g^k f g^{n-k+1} + (-1)^{n+1} g^{n+1} f$$

Et, par la formule triangulaire de Pascal et incorporation des termes extrêmes :

$$(\varphi_g)^{n+1}(f) = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} g^k f g^{n+1-k}$$

Ce qui prouve que la relation est héréditaire. On conclut par le principe de récurrence.

c) Supposons g nilpotent, soit alors $p \in \mathbb{N}$ tel que $g^p = 0$. Il vient :

$$(\varphi_g)^{2p-1}(f) = \sum_{k=0}^{2p-1} (-1)^k \binom{2p-1}{k} g^k f g^{2p-1-k}.$$

Pour chaque indice k de cette somme, ou bien $k \geqslant p$, ou bien $k \leqslant p-1$ et alors $2p-1-k \geqslant p$; chaque terme $g^k f g^{2p-1-k}$ est donc nul, ce qui prouve que $(\varphi_g)^{2p-1} = 0$. Ainsi, si g est nilpotent, alors φ_g est nilpotent.

4. Evidemment cette équation n'a pas de solution si $n = \dim E > 0$, car on a $\mathrm{tr}([f,g]) = 0 \neq \mathrm{tr}(id_E)$.
Si $\dim E = 0$ le problème est dégénéré car $id_E = 0$!

Exercice 2.02.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. On note $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des formes linéaires sur E.

Pour tout polynôme P, on note $P^{(k)}$ la dérivée $k^{\text{ème}}$ de P.

Soit $Q \in E$ de degré n. Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, on pose $Q_i(X) = Q(X+i)$.

Le but de cet exercice est de montrer que $(Q_0, Q_1, \ldots, Q_n)$ constitue une base de E.

1. Montrer que la famille $(Q, Q', Q'', \ldots, Q^{(n)})$ est une base de E.

2. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on définit l'application linéaire f_k par :

$$f_k : E \to \mathbb{R}, P \mapsto P^{(k)}(0)$$

a) Montrer que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, f_k est dans E^*.

b) Pour tout couple d'entiers $(k, \ell) \in [\![0, n]\!]^2$, calculer $f_k(X^\ell)$.

c) Montrer que $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ est une famille libre d'éléments de E^*.

3. Soit $\varphi \in E^*$.

a) Déterminer la dimension de E^*.

b) Montrer qu'il existe un unique $(n+1)$-uplet $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que :

$$\forall\, P \in E, \varphi(P) = \sum_{i=0}^{n} a_i P^{(i)}(0)$$

c) Soit $\varphi \in E^*$ tel que $\varphi(Q_0) = \varphi(Q_1) = \cdots = \varphi(Q_n) = 0$. Montrer que $\varphi = 0$.

4. On suppose que $(Q_0, Q_1, \ldots, Q_n)$ n'est pas une base de E.

a) Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel H de E tel que $\dim(H) = n$ et $\mathrm{Vect}(Q_0, Q_1, \ldots, Q_n) \subset H$

b) Montrer qu'il existe $a \in E$ tel que $E = \mathrm{Vect}(a) \oplus H$.

c) On définit une application $\psi_a : E \to \mathbb{R}$ comme suit :
pour tout $x \in E$ s'écrivant $x = \mu a + h$ avec $\mu \in \mathbb{R}$ et $h \in H$, on pose $\psi_a(x) = \mu$.
Montrer que ψ_a est une forme linéaire sur E et déterminer son noyau.

d) Aboutir à une contradiction et conclure.

Solution

1. Comme $\deg Q = n$, la famille $(Q, Q', Q'', \ldots, Q^{(n)})$ est libre car à degrés échelonnés. Cette famille contenant $(n+1)$ polynômes, on en déduit qu'elle constitue une base de E.

2. a) On vérifie facilement que f_k est une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$.

b) Soient $(k, \ell) \in [\![0, n]\!]^2$. On a : $f_k(X^k) = k!$ et $f_k(X^\ell) = 0$ si $k \neq \ell$.

(si $k > \ell$, il ne reste rien et si $k < \ell$, il reste au moins un facteur X)

c) Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_n f_n = 0$.
Soit $\ell \in [\![0, n]\!]$ quelconque . En évaluant cette formule en X^ℓ, on obtient $\lambda_\ell \ell! = 0$, d'où $\lambda_\ell = 0$. On en déduit que la famille $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ est une famille libre de E^*.

3. a) On a : $\dim(E^*) = \dim(\mathcal{L}(E, \mathbb{R})) = \dim(E) \times \dim(\mathbb{R}) = n + 1$.

b) La famille $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ est une famille libre de E^* et elle compte $(n+1)$ éléments. C'est donc une base de E^*. Par unicité de la décomposition dans la base, il existe un unique $(n+1)$-uplet $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\varphi = a_0 f_0 + a_1 f_1 + \ldots + a_{n+1} f_{n+1}$.
En appliquant cette égalité à un polynôme quelconque P de E, on trouve

$$\begin{aligned}\varphi(P) &= a_0 f_0(P) + a_1 f_1(P) + \ldots + a_{n+1} f_{n+1}(P) \\ &= a_0 P(0) + a_1 P'(0) + \ldots + a_n P^{(n)}(0)\end{aligned}$$

c) Soit $\varphi \in E^*$ tel que $\varphi(Q_0) = \varphi(Q_1) = \ldots = \varphi(Q_n) = 0$.
En utilisant la question précédente, on obtient :

$$\forall\, j \in [\![0, n]\!], 0 = \varphi(Q_j) = a_0 Q_j(0) + a_1 Q_j'(0) + \ldots + a_n Q_j^{(n)}(0)$$

Comme $Q_j(X) = Q(X + j)$, cette formule se réécrit sous la forme :

$$\forall\, j \in [\![0, n]\!], 0 = a_0 Q(j) + a_1 Q'(j) + \ldots + a_n Q^{(n)}(j)$$

On pose alors $R(X) = a_0 Q(X) + a_1 Q'(X) + \ldots + a_n Q^{(n)}(X)$.
Les relations précédentes montrent que $R(0) = R(1) = \cdots = R(n) = 0$. Le polynôme R, de degré au plus n, admet ainsi $(n + 1)$ racines distintes : c'est donc le polynôme nul. Il vient :

$$0 = R(X) = a_0 Q(X) + a_1 Q'(X) + \ldots + a_n Q^{(n)}(X)$$

Comme la famille $(Q, Q', Q'', \ldots, Q^{(n)})$ est libre (cf. question 1), on en déduit que $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$. En revenant à la définition des coefficients a_i, on conclut que $\varphi = 0$.

4. a) On suppose que $(Q_0, Q_1, \ldots, Q_n)$ n'est pas une base de E. Comme c'est une famille de cardinal $(n + 1)$, elle n'est donc ni libre ni génératrice.
Ainsi, $V = \mathrm{Vect}(Q_0, Q_1, \ldots, Q_n)$ est un sous-espace vectoriel strict de E et $\dim(V) \leqslant n$. En utilisant le théorème de la base incomplète, on construit un sous-espace vectoriel H de E de dimension n et tel que $V \subset H$.

b) Comme $H \subsetneq E$, il existe un vecteur a de E tel que $a \in E$ et $a \notin H$. Le vecteur a est donc non nul et la droite $\mathrm{Vect}\, a$ n'est pas incluse dans H. Ainsi $E = \mathrm{Vect}(a) \oplus H$.

c) $\psi_a(x)a$ n'est autre que le projeté de x dans la projection sur $\mathrm{Vect}\, a$ parallèlement à H. La linéarité de ψ_a est alors claire et son noyau n'est autre que H.

d) La forme linéaire ψ_a s'annule sur H, donc en particulier en $Q_0, Q_1, \ldots, Q_n$ puisque ces polynômes sont contenus dans H. On déduit de la question 3 que ψ_a est la forme linéaire nulle, ce qui est faux puisque $\psi_a(a) = 1$. On aboutit donc à une contraction. On a ainsi montré par un raisonnement par l'absurde que $(Q_0, Q_1, \ldots, Q_n)$ est une base de E.

Exercice 2.03.

1. Montrer pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, la convergence de l'intégrale

$$\int_0^1 t^2 (\ln t - xt - y)^2\, dt$$

On note alors $\varphi(x, y)$ la valeur de cette intégrale.

2. Montrer que les valeurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2/5 & 1/2 \\ 1/2 & 2/3 \end{pmatrix}$ sont strictement positives.

3. a) Montrer que la fonction φ définie en 1. est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et qu'elle admet un unique point critique (x_0, y_0) que l'on déterminera.

b) Montrer que $\inf\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} \varphi(x,y) = \varphi(x_0,y_0)$.

4. Montrer que l'ensemble E des fonctions continues $f :]0,1] \to \mathbb{R}$ telles que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^2 f^2(t)\,dt$ converge est un espace vectoriel et que l'on définit un produit scalaire sur E en posant :

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 t^2 f(t)g(t)\,dt$$

5. Montrer que si X est un ensemble et si $h : X \to \mathbb{R}_+$ est une fonction, alors $\inf\limits_X h^2 = \left(\inf\limits_X h\right)^2$.
En déduire à l'aide de la question 4., mais indépendamment des résultats de la question 3., comment retrouver que $\inf\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} \varphi(x,y) = \varphi(x_0,y_0)$.

Solution

1. En développant $t^2(\ln t - xt - y)^2$, les intégrales qui posent problème sont de la forme $\displaystyle\int_0^1 t^p \ln^q t dt$ pour $2 \leqslant p \leqslant 4$ et $0 \leqslant q \leqslant 2$ qui sont faussement impropres ou convergentes en 0.

En développant la fonction dans l'intégrale $f(x,y)$, il vient :

$$\begin{aligned}\varphi(x,y) &= I_{2,2} + x^2 I_{4,0} + y^2 I_{2,0} + 2xI_{3,1} + 2yI_{2,1} + 2xyI_{3,0}\\ &= I_{2,2} + \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{3} + \frac{x}{8} + \frac{2}{9}y + \frac{1}{2}xy.\end{aligned}$$

2. Les valeurs propres de A sont les racines de l'équation $\lambda^2 - \frac{16}{15}\lambda + \frac{1}{60} = 0$. Le discriminant est positif et il y a donc deux racines réelles. Etant de somme et de produit strictement positifs elles sont bien strictement positives.

3. a) Comme φ est polynomiale, elle est de classe C^2 et on a :

$$\nabla\varphi(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{5}x + \frac{1}{8} + \frac{1}{2}y = 0\\ \frac{2}{3}y + \frac{2}{9} + \frac{1}{2}x = 0\end{cases}$$

La résolution de ce système donne : $(x_0, y_0) = \left(\frac{5}{3}, -\frac{19}{12}\right)$.

b) Comme la matrice Hessienne de φ est A, de valeurs propres strictement positives, φ admet au point critique un minimum global (on peut faire le calcul de $\varphi(x,y) - \varphi(x_0,y_0)$ et observer les simplifications des termes du premier degré)

Donc $\inf\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} \varphi(x,y) = \varphi(x_0,y_0)$.

3. Il est évident que l'ensemble E contient la fonction nulle, est stable par produit par un scalaire et que le produit scalaire est bilinéaire, symétrique et positif (si l'intégrale converge).

Par théorème de comparaison pour les intégrales :

- comme
$0 \leqslant t^2(f(t)+g(t))^2 \leqslant t^2(f(t)+g(t))^2 + t^2(f(t)-g(t))^2 = 2t^2f(t)^2 + 2t^2g(t)^2$,
l'ensemble E est stable par somme ;
- comme $0 \leqslant t^2|f(t)g(t)| \leqslant \dfrac{1}{2}(t^2f(t)^2 + t^2g(t)^2)$, l'intégrale qui définit le produit scalaire est absolument convergente.
- Si $\langle f,f\rangle = 0$, pour tout $x \in]0,1]$, on a $0 \leqslant \displaystyle\int_x^1 t^2f^2(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \langle f,f\rangle = 0$,
donc, en dérivant par rapport à x (ou aussi par un argument continuité), on a $-x^2f^2(x) = 0$ pour tout $x \in]0,1]$, donc $f = 0$

4. De $0 \leqslant \inf_X \alpha \leqslant \alpha$ on déduit que $(\inf_X \alpha)^2$ est un minorant de α^2, donc $(\inf_X \alpha)^2 \leqslant \inf_X \alpha^2$.

De $0 \leqslant \inf_X \alpha^2 \leqslant \alpha^2$ on déduit que $(\inf_X \alpha)^{\frac{1}{2}}$ est un minorant de α, donc

$$\left(\inf_X \alpha^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \inf_X \alpha.$$

Ainsi en posant $u_0(t) = 1$, $u_1(t) = t$ et $\theta(t) = \ln t$, on a $u_0, u_1, \theta \in E$ et :

$$\begin{aligned}\inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} \varphi(x,y) &= \inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} \|\theta - xu_1 - yu_0\|^2 \\ &= \left(\inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} \|\theta - xu_1 - yu_0\|\right)^2,\end{aligned}$$

qui est le carré de la distance de θ à l'espace vectoriel $\mathrm{Vect}(u_0,u_1)$ dans l'espace euclidien $\mathrm{Vect}(u_0,u_1,\varphi)$.

Donc cette distance est atteinte en un unique point $x_0u_1 + y_0u_0$ qui est le projeté orthogonal de θ sur $\mathrm{Vect}(u_0,u_1)$.

Exercice 2.04.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Soit (u,v) une famille libre de deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$, U et V les matrices colonnes canoniquement associées à u et v et α un réel non nul.

I_n désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. On considère la matrice $A = I_n + \alpha\, U.{}^tU$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ de matrice A relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

a) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

b) Soit Q une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que ses valeurs propres réelles (s'il y en a) appartiennent à l'ensemble $\{-1, 1\}$.

c) Pour quelle(s) valeur(s) de α la matrice A est-elle orthogonale ?

2. Dans cette question, on considère la matrice $B = I_n + U.{}^tV + V.{}^tU$ et g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ de matrice B relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

a) Montrer qu'un vecteur x de matrice colonne canoniquement associée X est vecteur propre de g associé à la valeur propre λ, si et seulement si :

$$(\lambda - 1)x = \langle x, u\rangle\, v + \langle x, v\rangle\, u$$

b) En déduire les valeurs propres de g. L'endomorphisme g est-il diagonalisable ?

Solution

1. a) $A - I_n = \alpha\, U.{}^tU$ est de rang 1, de valeurs propres 0 associée à $\text{Vect}(u)^\perp$ et $\mu = \text{tr}(\alpha\, U.{}^tU) = \alpha\, \|u\|^2 \neq 0$ associée à $\text{Vect}(u)$, d'où :

$\text{spec}(f) = \{1, 1+\mu\}, \text{Ker}(f - id) = \text{Vect}(u)^\perp, \text{Ker}(f - (1+\mu)\, id) = \text{Vect}(u)$

f est diagonalisable car $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ ou en remarquant que la somme (directe) de ses sous-espaces propres est égale à $\mathbb{R}^n$.

b) $Q \in O_n(\mathbb{R})$ et $Q\,X = \lambda\, X$ donnent

$\lambda^2\, \|X\|^2 = {}^t(Q\,X)\,(Q\,X) = {}^tX\,{}^tQ\,Q\,X = {}^tX\,X = \|X\|^2$, d'où $\lambda^2 = 1$ et $\lambda \in \{-1, 1\}$.

c) $A \in O_n(\mathbb{R})$, alors $\mu = 1 + \alpha\, \|U\|^2 = \pm 1$. Comme $\alpha \neq 0$, la valeur 1 est à exclure et donc :

$$A \in O_n(\mathbb{R}) \implies \alpha = -2/\|u\|^2$$

Alors$1 + \mu = -1$ et f est la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan $\text{Vect}(u)^\perp$, donc A est bien orthogonale.

2. a) On a :

$$B\,X = \lambda\, X \iff \lambda\, X = X + U.{}^tV\,X + V.{}^tU\,X$$
$$\iff (\lambda - 1)\, x = \langle x, v\rangle\, u + \langle x, u\rangle\, v \in \text{Vect}(u, v)$$

b) On distingue deux cas :

• Si $\lambda = 1$, il vient : $g(x) = x \iff \langle x, u\rangle = \langle x, v\rangle = 0 \iff x \in \big(\text{Vect}(u, v)\big)^\perp$, donc si $n > 2$, 1 est valeur propre de g la dimension du sous-espace propre associé valant $n - 2$.

• Si $\lambda \neq 1$, alors $x \in V = \text{Vect}(u, v)$ et s'écrit $x = a\, u + b\, v$; puis :
$g(x) = \lambda x \iff (\lambda - 1)(au + bv) = \langle au + bv, v\rangle u + \langle au + bv, u\rangle v$

$$\iff \begin{cases} a(\langle u,v\rangle + 1 - \lambda) + b\|v\|^2 = 0 \\ a\|u\|^2 + b(\langle u,v\rangle + 1 - \lambda) = 0 \end{cases}$$

Ce système a des solutions non triviales si et seulement si λ est solution de l'équation : $(\langle u,v\rangle + 1 - \lambda)^2 - \|u\|^2\|v\|^2 = 0$, soit :

$$\lambda = 1 + \langle u,v\rangle \pm \|u\|\|v\|$$

Comme u et v ne sont pas colinéaires on a $|\langle u,v\rangle| < \|u\|\|v\|$ et on vient de trouver deux valeurs propres différentes et différentes de 1. Chacune a un sous-espace propre associé de dimension au moins 1, donc de dimension exactement 1 et par somme des dimensions des sous-espaces propres, g est diagonalisable.

Exercice 2.05.

Dans tout cet exercice, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\mathbb{R}_n[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n, et $\mathbb{Z}[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

1. Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, on note $\varphi_n(P)$ le quotient dans la division de $P(-1) - P(X)$ par $X + 1$.

a) Démontrer que φ_n ainsi définie est une application linéaire de $\mathbb{R}_n[X]$ vers $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Déterminer son noyau.

c) L'application φ_n est-elle une surjection de $\mathbb{R}_n[X]$ vers $\mathbb{R}_{n-1}[X]$?

2. Ecrire la matrice de φ_n dans les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

3. Soit $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in \mathbb{R}_n[X]$. Démontrer que $\varphi_n(P)$ s'écrit $\sum_{i=0}^{n-1} b_i X^i$ avec, pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$:

$$b_i = (-1)^i \sum_{k=i+1}^{n} (-1)^k a_k$$

Dans la suite de cet exercice, on considère la suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $T_0(X) = 1$, $T_1(X) = 1 - 2X$ puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$T_{n+2}(X) = 2(1 - 2X)T_{n+1}(X) - T_n(X).$$

4. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_n = T_n(-1)$.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, trouver l'expression de v_n en fonction de n.

b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_n est un entier strictement positif.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer le degré de T_n et montrer que $T_n \in \mathbb{Z}[X]$.

6. Démontrer que $\varphi_n(T_n) \in \mathbb{Z}[X]$.

Solution

1. a) Le polynôme $Q = P(-1) - P(X)$ s'annule en -1 et est donc divisible par $X+1$: la division « tombe juste ». La linéarite de φ_n est banale, car :

soit $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, alors :

$$\begin{aligned}(aP+bQ)(-1) - (aP+bQ)(X) &= a(P(-1)-P(X)) + b(Q(-1)-Q(X)) \\ &= a(X+1)\varphi_n(P) + b(X+1)\varphi_n(Q) \\ &= (X+1)(a\varphi_n(P) + b\varphi_n(Q))\end{aligned}$$

Donc par définition de φ_n : $\varphi_n(aP+bQ) = a\varphi_n(P)+b\varphi_n(Q)$ et φ_n est linéaire et le degré de $\varphi_n(P)$ ne saurait excéder $n-1$:

$$\varphi_n \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$$

b) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. $P \in \mathrm{Ker}(\varphi_n)$ si et seulement si $P(X) = P(-1)$, c'est-à-dire si et seulement si P est constant. Ainsi, $\mathrm{Ker}(\varphi_n) = \mathbb{R}_0[X]$, qui est de dimension 1.

c) Par le théorème du rang $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = 1 + \mathrm{rg}(\varphi_n)$, donc

$\mathrm{rg}(\varphi_n) = n = \dim(\mathbb{R}_{n-1}[X])$. Ainsi

$$\mathrm{Im}(\varphi_n) = \mathbb{R}_{n-1}[X].$$

2. Puisque $(1, X, \ldots, X^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, on regarde chaque image des vecteurs de la base, et ainsi, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$,

$$(-1)^k - X^k = -(1+X)\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{k-1-i}X^i = (1+X)\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{k-i}X^i$$

tandis que $\varphi_n(1) = 0$.

On en déduit donc que la matrice associée à φ_n, dans les bases précédentes est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & \cdots & \cdots & (-1)^n \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \cdots & (-1)^{n-1} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Comme a_i est la $(i+1)^{\text{ème}}$ coordonnée de P et que b_i est la $(i+1)^{\text{ème}}$ coordonnée de $\varphi_n(P)$, on obtient, en notant $(m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n+1}$, les coefficients de M, définie précédemment :

$$b_i = \sum_{k=1}^{n+1} m_{i+1,k}a_{k-1} = \sum_{k=0}^{n} m_{i+1,k+1}a_k = \sum_{k=i+1}^{n}(-1)^{k-i}a_k$$

4. a) D'après la relation de récurrence sur la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on en déduit immédiatement : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+2} = 6v_{n+1} - v_n$. Il s'agit d'une suite

récurrente d'ordre 2, et d'après les formules classiques, en utilisant $v_0 = 1$ et $v_1 = 3$, on obtient :

$$v_n = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{8})^n + \frac{1}{2}(3 + \sqrt{8})^n$$

b) On voit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n > 0$. Ensuite, en faisant une récurrence double, on prouve que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \in \mathbb{N}$, ou alors on dit que si on développe, les termes contenant une puissance impaire de la racine se détruisent.

5. Toujours par récurrence double, on montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\deg(T_n) = n$ et que $T_n \in \mathbb{Z}[X]$.

6. Comme $T_n \in \mathbb{Z}[X]$ et comme M est à coefficients entiers, on en déduit que $\varphi_n(T_n) \in \mathbb{Z}[X]$.

Exercice 2.06.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$\forall\,(i,j) \in [\![1,n]\!]^2, a_{i,j} > 0 \text{ et } \forall\, i \in [\![1,n]\!], \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$$

1. Montrer que 1 est valeur propre de A.

2. Montrer que toutes les valeurs propres réelles ou complexes de A sont de module inférieur ou égal à 1.

(on pourra considérer une colonne propre $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ associée et un indice i tel que $j \neq i \implies |x_j| \leqslant |x_i|$)

3. a) Soit z un nombre complexe non nul vérifiant $|1 + z| = 1 + |z|$. Montrer que z est un réel strictement positif.

b) Montrer que si z_1 et z_2 sont des complexes non nuls tels que

$$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|,$$

alors z_1 et z_2 ont même argument.

c) Soit $z_1, z_2, \ldots, z_n$ des complexes non nuls tels que

$$|z_1 + \cdots + z_n| = |z_1| + \cdots + |z_n|.$$

Montrer que ces complexes ont même argument.

4. On considère une valeur propre λ de A de module 1 et X une colonne propre associée.

a) Montrer que tous les coefficients de X sont non nuls.

b) Montrer que tous les coefficients de X ont le même argument.

c) Montrer que tous les coefficients de X ont le même module.

d) En déduire que 1 est la seule valeur propre de module égal à 1.

5. Ce dernier résultat est-il encore vrai si on suppose seulement :

$$\forall\,(i,j)\in[\![1,n]\!]^2, a_{i,j}\geqslant 0 \text{ et } \forall\, i\in[\![1,n]\!], \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}=1\,?$$

Solution

1. Pour $X={}^t(1\quad\cdots\quad 1)$, on a $AX=X$ et donc 1 est valeur propre de A.

2. Soit λ une valeur propre de A, $X={}^t(x_1\quad\cdots\quad x_n)$ une colonne propre associée. Soit i un indice tel que $\forall\, j\neq i, |x_j|\leqslant|x_i|$. Alors $AX=\lambda X$ donne en particulier :

$$a_{i,1}x_1+\cdots+a_{i,i}x_i+\cdots+a_{i,n}x_n=\lambda x_i$$

Ainsi : $|\lambda|.|x_i|\leqslant|x_i|\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}=|x_i|$ et $|\lambda|\leqslant 1$.

3. a) Ecrivons $z=a+ib$, avec a et b réels. Alors :

$$|1+z|=\sqrt{(a+1)^2+b^2} \text{ et } 1+|z|=1+\sqrt{a^2+b^2}$$

On a donc égalité si et seulement si : $a^2+2a+1+b^2=1+a^2+b^2+2\sqrt{a^2+b^2}$ ou encore : $\sqrt{a^2+b^2}=a$, soit $,b=0,a\geqslant 0$ et comme $z\neq 0$, $a>0$.

b) $|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|\iff|1+\frac{z_2}{z_1}|=1+|\frac{z_2}{z_1}|\iff\frac{z_2}{z_1}\in\mathbb{R}_+^*\iff z_1$ et z_2 ont même argument (modulo 2π).

c) $\star$ On vient de montrer le résultat pour $n=2$.

$\star$ Supposons le résultat pour un certain rang $n-1$, et considérons $z_1,\ldots,z_n$ vérifiant la condition imposée.

Alors : $|z_1|+\cdots+|z_n|=|z_1+\cdots+z_n|\leqslant|z_1+\cdots+z_{n-1}|+|z_n|$.

Donc $|z_1|+\cdots+|z_{n-1}|\leqslant|z_1+\cdots+z_{n-1}|$ et l'inégalité contraire étant banale :

$$|z_1|+\cdots+|z_{n-1}|=|z_1+\cdots+z_{n-1}|$$

Par l'hypothèse de récurrence $z_1,\ldots,z_{n-1}$ ont tous le même argument θ et il reste :

$|(\rho_1+\cdots+\rho_{n-1})\mathrm{e}^{i\theta}+z_n|=\rho_1+\cdots+\rho_{n-1}+|z_n|$

On est donc revenu du rang 2, avec les points $(\rho_1+\cdots+\rho_{n-1})\mathrm{e}^{i\theta}$ et z_n. Ainsi z_n a le même argument θ.

On conclut par le principe de récurrence.

4. Avec les notations de la question 2. : $\forall\, i\in[\![1,n]\!], \sum_{j=1}^{n}a_{i,j}x_j=\lambda x_i$ et on choisit encore un indice i tel que : $j\neq i\implies|x_j|\leqslant|x_i|$.

a) On a donc : $\lambda = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \frac{x_j}{x_i}$. S'il existait un coefficient x_k nul, on aurait : $\lambda = \sum_{j\neq k}^{n} a_{i,j} \frac{x_j}{x_i}$, d'où : $|\lambda| \leqslant \sum_{j\neq k}^{n} a_{i,j} = 1 - a_{i,k} < 1$.
Par contraposée : $|\lambda| = 1 \implies \forall\, k, x_k \neq 0$.

b) On a alors :
$$|x_i| = |\lambda x_i| = \Big| \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j \Big| \leqslant \sum_{j=1}^{n} \big|a_{i,j}x_j\big| = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}|x_j| \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}|x_i| = |x_i|$$
Cette succession d'inégalités est donc en fait une succession d'égalités et en particulier :
$$\Big| \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j \Big| = \sum_{j=1}^{n} \big|a_{i,j}x_j\big|$$
Ce qui prouve que tous les nombres non nuls $a_{i,j}x_j$ ont le même argument et il en est de même des nombres non nuls x_j.

c) Affinons le raisonnement fait en a) : s'il existait un indice k tel que $|x_k| < |x_i|$, on aurait : $|\lambda| \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \big|\frac{x_j}{x_i}\big| < \sum_{j\neq k} a_{i,j} + a_{i,k} < 1$

d) Ainsi le vecteur colonne X est colinéaire au vecteur ${}^t(\,1 \quad \cdots \quad 1\,)$ donc propre pour la valeur propre 1 et $\lambda = 1$.

5. On considère la matrice A telle que $i \in [\![1, n-1]\!] \implies a_{i,i+1} = 1$, $a_{n,1} = 1$ tous les autres coefficients étant nuls. Elle est stochastique et toutes ses valeurs propres sont de module 1.

Exercice 2.07.

Soit une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit l'application $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :
$$f(M) = M - 2\,\mathrm{tr}(M)A$$
où tr désigne l'application « trace ».

1. L'application f est-elle linéaire ? Montrer que $f(A) = 0$ si et seulement si $\mathrm{tr}(A) = \frac{1}{2}$ ou $A = 0$.

2. a) Montrer que si $\mathrm{tr}(A) \neq \frac{1}{2}$, alors $\mathrm{Ker}\, f = \{0\}$.

b) Montrer que f est bijective si et seulement si $\mathrm{tr}(A) \neq \frac{1}{2}$.

3. Dans cette question on suppose que $\mathrm{tr}(A) = \frac{1}{2}$.
On note $H = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \;/\; \mathrm{tr}(M) = 0\}$.

a) Montrer que H et $\mathrm{Vect}(A)$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b) Montrer que f est le projecteur de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sur H parallèlement à $\text{Vect}(A)$.

4. Montrer que $f \circ f = id_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ si et seulement si $\text{tr}(A) = 1$ ou $A = 0$. Quels sont alors les sous-espaces propres de f ?

5. Dans cette question on ne fait aucune hypothèse sur $\text{tr}(A)$.

a) Déterminer un polynôme annulateur de f.

b) Montrer que f est diagonalisable si et seulement si $\text{tr}(A) \neq 0$ ou $A = 0$.

Solution

1. L'application f est linéaire d'après la linéarité de la trace. On a :

$$f(A) = 0 \iff (1 - 2\,\text{tr}(A))A = 0 \iff \text{tr}(A) = \frac{1}{2} \text{ ou} A = 0$$

2. a) $\rightarrow$ Si $A = 0$, alors $f = id$ et $\text{Ker}\, f = \{0\}$.
$\rightarrow$ Si $A \neq 0$, alors : $M \in \text{Ker}\, f \iff M = \text{tr}(M)A \implies M = \lambda A$.
Réciproquement, comme $A \neq 0$ et $\text{tr}(A) \neq \frac{1}{2}$, d'après la question 1, λA appartient à $\text{Ker}\, f$ si et seulement si $\lambda = 0$. Donc $\text{Ker}\, f = \{0\}$.

b) Comme f est un endomorphisme d'un espace de dimension finie, il est bijectif si et seulement si $\text{Ker}\, f = \{0\}$. C'est vrai si $\text{tr}(A) \neq \frac{1}{2}$ (cf question 2a). Si $\text{tr}(A) = \frac{1}{2}$, alors $A \neq 0$ et (question 1) $A \in \text{Ker}\, f$, donc f non bijectif.

3. a) Par le théorème du rang, on a :

$$\dim(H) = \dim(\text{Ker}(\text{tr})) = \dim \mathcal{M}_n - \text{rg}(\text{tr}) = n^2 - 1.$$

Or $\dim \text{Vect}(A) = 1$, donc $\dim H + \dim \text{Vect}(A) = \dim \mathcal{M}_n$.
De plus $\text{Vect}(A) \cap H = \{0\}$ par calcul facile, d'où la conclusion.

b) On a : $\text{tr}(f(M)) = \text{tr}(M) - 2\,\text{tr}(M)\,\text{tr}(A) = 0$ car $\text{tr}(A) = \frac{1}{2}$.
Donc, pour tout M, on a : $M = \underbrace{2\,\text{tr}(M)A}_{\in \text{Vect}(A)} + \underbrace{f(M)}_{\in H}$.

4. On calcule :

$$\begin{aligned} f(f(M)) &= (M - 2\,\text{tr}(M)A) - 2\,\text{tr}\,(M - 2\,\text{tr}(M)A)\,A \\ &= M + 4(\text{tr}(A) - 1)\,\text{tr}(M)A. \end{aligned}$$

Ainsi, comme $\text{tr}(M)$ n'est pas toujours nul, on a : $f \circ f = id \iff \text{tr}(A) = 1$ ou $A = 0$.
Alors $X^2 - 1$ est un polynôme annulateur de f, donc les seules valeurs propres possibles sont 1 et -1 et les sous-espaces propres alors associés sont :

$$\begin{cases} E_1 = \mathcal{M}_n & \text{si } A = 0 \\ E_1 = H \text{ et } E_{-1} = \text{Vect}(A) & \text{si } \text{tr}(A) = 1 \end{cases}$$

5. a) En remarquant que $\mathrm{tr}(M)A = \frac{1}{2}(M - f(M))$, le calcul de la question 4. donne :

$$f \circ f = id + 4(\mathrm{tr}(A) - 1)\frac{1}{2}(id - f)$$

Ainsi un polynôme annulateur de f est $P = X^2 + 2(\mathrm{tr}(A) - 1)X - 2\,\mathrm{tr}(A) + 1$.

b) Si $A = 0$ alors $f = id$ est diagonalisable.

Si $A \neq 0$ et $\mathrm{tr}(A) = 0$, le polynôme P a une racine double $\lambda = 1$ seule valeur propre possible ; or $\mathrm{Ker}(f - id) = H \neq \mathcal{M}_n$ donc f n'est pas diagonalisable.

Si $\mathrm{tr}(A) \neq 0$ alors les racines du polynôme P sont 1 et $1 - 2\,\mathrm{tr}(A)$ et on a $E_1 = H$ et $E_{1-2\,\mathrm{tr}(A)} = \mathrm{Vect}(A)$; donc la somme des dimensions des sous-espaces propres vaut n^2 et f est diagonalisable.

Exercice 2.08.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n. Soit s un endomorphisme de E vérifiant les propriétés suivantes :

(i) $s \circ s = id_E$.

(ii) $s \neq id_E$.

(iii) $s \neq -id_E$.

On considère l'application φ définie par $\varphi : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E), f \mapsto \frac{1}{2}(s \circ f + f \circ s)$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$.

2. Montrer que s est diagonalisable et que son spectre est égal à $\{-1, 1\}$.

On notera dans la suite E_1 (resp. E_{-1}) le sous-espace propre de s associé à la valeur propre 1 (resp. -1).

3. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence suivante :

$$f \in \mathrm{Ker}(\varphi) \iff f(E_1) \subset E_{-1} \text{ et } f(E_{-1}) \subset E_1$$

4. Soit λ une valeur propre de φ. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un vecteur propre associé. Soit $x \in E_1$. Déterminer une relation entre $f(x)$ et $s(f(x))$. Même question pour $x \in E_{-1}$.

5. Montrer que le spectre de φ est inclus dans $\{-1, 0, 1\}$.

6. Déterminer un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de coefficient dominant égal à 1 et de degré 3 tel que $P(\varphi) = 0$.

Solution

1. On a bien $\varphi(f) \in \mathcal{L}(E)$ et on vérifie facilement la linéarité de φ.

2. Comme $s^2 = id_E$, $P(X) = X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$ est un polynôme annulateur de s. On en déduit que $\text{spec}(s) \subset \{-1, 1\}$. On note E_1 (resp. E_{-1}) le sous-espace propre de s associé à la valeur propre éventuelle 1 (resp. -1).
Comme $x = \underbrace{\frac{1}{2}(x + s(x))}_{x_1} + \underbrace{\frac{1}{2}(x - s(x))}_{x_2}$, avec :
$s(x_1) = \frac{1}{2}(s(x) + s^2(x)) = x_1$ et $s(x_2) = \frac{1}{2}(s(x) - s^2(x)) = -x_2$
on a $E = \text{Ker}(s - id_E) + \text{Ker}(s + id_E) = E_1 + E_{-1}$. Comme clairement $E_1 \cap E_{-1} = \{0\}$, ceci prouve que $E = E_1 \oplus E_{-1}$ et s est un endomorphisme diagonalisable.

Si on avait $\text{spec}(s) = \{1\}$, comme s est diagonalisable, on aurait $s = id_E$, ce qui contredit l'hypothèse (ii). De même, si $\text{spec}(s) = \{-1\}$, comme s est diagonalisable, on aurait $s = -id_E$, ce qui contredit l'hypothèse (iii).
On peut donc conclure que $\text{spec}(s) = \{-1, 1\}$.

3. • Soit $f \in \text{Ker}(\varphi)$. Alors, $s \circ f = -f \circ s$. Prenons $x \in E_1$. Alors, $s(x) = x$ et $s(f(x)) = -f(x)$, ce qui prouve que $f(x) \in E_{-1}$. Ceci montre que $f(E_1) \subset E_{-1}$.
Puis, prenons $x \in E_{-1}$. Alors, $s(x) = -x$ et $s(f(x)) = -f(-x) = f(x)$, ce qui prouve que $f(x) \in E_1$. Ceci montre que $f(E_{-1}) \subset E_1$.

• On suppose réciproquement que $f(E_1) \subset E_{-1}$ et $f(E_{-1}) \subset E_1$.
Soit $x \in E$. Comme $E = E_1 \oplus E_{-1}$, x se décompose en $x = y + z$ où $y \in E_1$ et $z \in E_{-1}$. Par hypothèse, $f(y) \in E_{-1}$ et $f(z) \in E_1$, i.e. $s(f(y)) = -f(y)$ et $s(f(z)) = f(z)$.

On en déduit que

$$\begin{aligned} s(f(x)) + f(s(x)) &= s(f(y)) + s(f(z)) + f(s(y)) + f(s(z)) \\ &= -f(y) + f(z) + f(y) - f(z) = 0 \end{aligned}$$

On conclut que $\varphi(f)(x) = 0$. Ceci étant vrai pour tout $x \in E$, $\varphi(f) = 0$ et $f \in \text{Ker}(\varphi)$.

4. Par définition de λ et de f, $\varphi(f) = \lambda f$, soit $\frac{1}{2}(s \circ f + f \circ s) = \lambda f$.

Ainsi $s \circ f(x) + f \circ s(x) = 2\lambda f(x)$.

• Prenons $x \in E_1$.

Dans ce cas, $s(x) = x$, on en déduit que $s(f(x)) = (2\lambda - 1)f(x)$.

• Prenons $x \in E_{-1}$.

Dans ce cas, $s(x) = -x$, on en déduit que $s(f(x)) = (2\lambda + 1)f(x)$.

5. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \neq 0$.

• Supposons qu'il existe $x \in E_1$ tel que $f(x) \neq 0$. D'après la question précédente, $s(f(x)) = (2\lambda - 1)f(x)$, ce qui implique que $2\lambda - 1$ est une valeur propre de s. Ainsi, $2\lambda - 1 = 1$ ou $2\lambda - 1 = -1$, donc $\lambda = 1$ ou $\lambda = 0$.

• De même, supposons qu'il existe $x \in E_{-1}$ tel que l'on ait $f(x) \neq 0$. D'après la question précédente, $s(f(x)) = (2\lambda + 1)f(x)$, ce qui implique que $2\lambda + 1$ est une valeur propre de s. Ainsi, $2\lambda + 1 = 1$ ou $2\lambda + 1 = -1$, donc $\lambda = 0$ ou $\lambda = -1$.

On a fait le tour des possibles, car comme $f \neq 0$ et E_1, E_2 supplémentaires, au moins une des deux restrictions de f à E_1 et E_{-1} est non nulle.
On conclut que $\text{spec}(\varphi) \subset \{-1, 0, 1\}$.

6. L'idée est de choisir comme polynôme annulateur un polynôme de degré 3 dont les racines sont les valeurs propres potentielles de φ, à savoir 0, 1 et -1. On prend donc $P(X) = X(X-1)(X+1) = X^3 - X$.

Pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$ et en notant la composition par juxtaposition pour gagner de la place :
$\varphi(f) = \frac{1}{2}(sf + fs)$
$\varphi^2(f) = \frac{1}{4}(s(sf + fs) + (sf + fs)s) = \frac{1}{4}(f + 2sfs + f) = \frac{1}{2}(f + sfs)$
$\varphi^3(f) = \frac{1}{4}(s(f + sfs) + (f + sfs)s) = \frac{1}{4}(sf + fs + fs + sf) = \varphi(f)$.
On a bien $(\varphi^3 - \varphi)(f) = 0$ et $P = X^3 - X$ convient.

Exercice 2.09.

Pour tout entier $p \geqslant 2$, on note $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre p.

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe un entier $n \geqslant 2$ tel que ${}^tA = A^n$.

1. **a)** Montrer que $A^{n^2} = A$.

b) Soit $B = A^{n+1}$. Montrer que $B^n = B$, puis que B est symétrique.

c) En déduire que B est diagonalisable et déterminer les valeurs propres possibles de B.

2. a) Montrer que -1 n'est pas valeur propre de B.

b) Montrer que B est la matrice d'un projecteur orthogonal.

3. Soit a (respectivement b) l'endomorphisme de $\mathbb{R}^p$ canoniquement associé à A (resp. B). Montrer que $\text{Ker}\, b = \text{Ker}\, a$, et que $\text{Im}\, b = \text{Im}\, a$.

4. **a)** Montrer que l'endomorphisme de $\text{Im}\, a$ induit par a est un endomorphisme orthogonal de $\text{Im}\, a$.

b) En déduire que A est la matrice nulle ou est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, où A_1 est une matrice orthogonale de taille $r \in [\![1, p]\!]$ telle que $A_1^{n+1} = I_r$.

Solution

1. a) On a : $A^{n^2} = (A^n)^n = ({}^tA)^n = {}^t(A^n) = {}^{tt}A = A$.

b) De même $B^n = (A^{n+1})^n = A^{n^2}A^n = AA^n = B$.
Puis :

$$ {}^tB = {}^t(A^{n+1}) = ({}^tA){}^t(A^n) = {}^tAA $$

ce qui montre que B est une matrice symétrique (et même positive – voir 2. a)).

c) La matrice B est symétrique réelle : ses valeurs propres sont réelles et elle est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et les sous-espaces propres de b sont deux à deux orthogonaux.

Les valeurs propres possibles de B sont les réels solutions de l'équation $x^n - x = 0$, soit $\{0, 1, -1\}$

2. a) Le réel -1 ne peut être valeur propre de B puisque si X est une colonne telle que $BX = -X$, on a : $-\|X\|^2 = {}^tXBX = {}^tX{}^tAAX = \|AX\|^2$, ce qui impose $X = 0$.

b) Ainsi $\mathrm{Sp}(b) \subseteq \{0, 1\}$ et $E_0(b)$ et $E_1(b)$ sont supplémentaires orthogonaux (l'un des deux peut être réduit au vecteur nul) et b est la projection orthogonale sur $E_1(b)$ parallèlement à $E_0(b)$.

3. $\star$ Comme $B = {}^tAA$, on a $AX = 0 \implies BX = 0$ et $\mathrm{Ker}\, a \subset \mathrm{Ker}\, b$.
Si $BX = 0$, alors $0 = {}^tX{}^tAAX = ||AX||^2$ et $AX = 0$. Ceci prouve l'inclusion contraire et finalement $\mathrm{Ker}\, b = \mathrm{Ker}\, a$.
Comme $B = A^{n+1}$, alors $\mathrm{Im}\, b \subset \mathrm{Im}\, a$. On termine avec le théorème du rang qui donne l'égalité des dimensions de ces deux sous-espaces.

4. a) Le sous-espace $\mathrm{Im}\, a$ est stable par a. La restriction de a à $\mathrm{Im}\, a$ induit un endomorphisme de $\mathrm{Im}\, a$.
De plus si $y \in \mathrm{Im}\, a$, alors $y \in \mathrm{Im}\, b$ et $b(y) = y$, ce qui entraîne que :

$$ \|a(y)\|^2 = {}^tY{}^tAAY = {}^tYBY = \langle y, b(y)\rangle = \|y\|^2 $$

ce qui montre que cet endomorphisme induit est une isométrie, c'est-à-dire un endomorphisme orthogonal de $\mathrm{Im}\, a$.

b) Si $A \neq 0$, la matrice A est donc orthogonalement semblable à une matrice bloc suivante : $A' = \begin{pmatrix} A_1 & (0) \\ (0) & (0) \end{pmatrix}$, avec $A_1 \in O_r(\mathbb{R})$, $r \in [\![1, p]\!]$.

et comme la matrice de passage diagonalisante est orthogonale : $A^n = {}^tA$ donne $A'^n = {}^tA'$, soit $A_1^n = {}^tA_1 = A_1^{-1}$ et donc $A_1^{n+1} = I_r$.

Exercice 2.10.

On considère l'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ des matrices carrées d'ordre n ($n \geqslant 2$) à coefficients complexes. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\sigma(A)$ l'ensemble des valeurs propres de A.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme annulateur non nul de A.

a) Vérifier que si λ est une valeur propre de A, alors c'est une racine de P.

b) Montrer qu'il existe un unique polynôme annulateur non nul de degré minimum et de coefficient de plus haut degré égal à 1. On note désormais par m_A ce polynôme.
Vérifier que $m_A = m_{{}^tA}$ (où ${}^tA$ est la matrice transposée de A).

c) Soit λ une racine de m_A.
En raisonnant par l'absurde et en écrivant m_A sous la forme $m_A(z) = (z-\lambda)q(z)$ où $q \in \mathbb{C}[z]$, montrer que λ est nécessairement une valeur propre de A.

d) En déduire que $\sigma(A)$ est exactement l'ensemble des racines du polynôme m_A.

e) On considère la matrice $R \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ donnée par $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer R^2 et en déduire m_R. Déterminer $\sigma(R)$.

2. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ fixées. On considère l'endomorphisme Φ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ défini par $\Phi(M) = AM - MB$. On suppose que l'intersection de $\sigma(A)$ et de $\sigma(B)$ est vide.

a) Soit $M \in \mathrm{Ker}(\Phi)$. Montrer que $P(A)M = MP(B)$ pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$.

b) Prouver que la matrice $m_B(A)$ est inversible
(on pourra écrire m_B sous la forme $m_B(X) = (X-b_1)^{n_1} \dots (X-b_\ell)^{n_\ell}$)

c) En déduire que le noyau de Φ est réduit à $\{0\}$.

d) Soit $Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Justifier que l'équation $AM - MB = Y$ admet une unique solution $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

e) On suppose que A est inversible et que B est nilpotente d'ordre $m \in \mathbb{N}^*$ (c'est-à-dire que l'on a $B^m = 0$ et $B^{m-1} \neq 0$). Prouver que l'unique solution de l'équation $AM - MB = Y$ est $M = \sum_{k=0}^{m-1} (A^{-1})^{k+1} Y B^k$.

3. On considère la matrice N de $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ donnée par : $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Résoudre dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ l'équation $RM - MN = I_4$ d'inconnue M, où R est la matrice donnée en 1. e).

Solution

1. a) C'est du cours : $AX = \lambda X \implies P(A)X = P(\lambda)X$ et la conclusion car $X \neq 0$.

b) L'ensemble des degrés des polynômes annulateurs non nuls de A est un sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}$, il admet donc un plus petit élément m. En multipliant un polynôme annulateur de degré m par l'inverse de son coefficient dominant on obtient un polynôme de la forme souhaitée. Si l'on suppose qu'il existe deux tels polynômes, on voit que leur différence, si elle est non nulle, fournirait un polynôme annulateur non nul de degré strictement inférieur à m, ce qui est absurde. D'où l'unicité.

c) Soit λ une racine de m_A : $m_A = (X - \lambda)Q$.
Si λ n'est pas une valeur propre de A, alors $A - \lambda I$ est inversible et on a alors $0 = (A - \lambda I)^{-1} m_A(A) = Q(A)$. Par suite, Q est un polynôme non nul de degré strictement inférieur à celui de m_A qui est annulateur, c'est absurde.

d) Notons $\mathcal{Z}(m_A)$ l'ensemble des racine de m_A.
Avec a) on voit que $\sigma(A) \subseteq \mathcal{Z}(m_A)$ et avec c) que $\mathcal{Z}(m_A) \subseteq \sigma(A)$. On a donc bien $\sigma(A) = \mathcal{Z}(m_A)$.

e) Un calcul simple (par blocs ou directement) donne $R^2 = -I$, Comme R n'est pas un multiple de l'identité, on a nécessairement $m_R = X^2 + 1$. Il résulte alors de d) que $\sigma(R) = \{-i, i\}$.

2) a) Soit $M \in \mathrm{Ker}(\Phi)$, on a donc $AM = MB$, d'où l'on déduit par une récurrence immédiate que $A^n M = MB^n$ pour tout entier n, et par linéarité que $P(A)M = MP(B)$ pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$.

b) Comme $\sigma(A) \cap \sigma(B) = \emptyset$, on sait d'après 1. d) qu'aucun des b_i n'est valeur propre de A, les matrices $A - b_i I$ sont donc inversibles. Or un produit de matrices inversibles est encore une matrice inversible, il en résulte que $m_B(A)$ est inversible.

c) Soit $M \in \mathrm{Ker}(\Phi)$, avec a) on voit que $m_B(A)M = Mm_B(B) = 0$ et avec b) on obtient $M = m_B(A)^{-1} m_B(A)M = 0$. On a donc bien $\mathrm{Ker}(\Phi) = \{0\}$.

d) On vient de montrer que Φ est injectif. Le théorème du rang nous dit que Φ est surjectif. C'est donc un isomorphisme, d'où la propriété souhaitée.

e) Si $M = \sum_{k=0}^{m-1} (A^{-1})^{k+1} Y B^k$, il vient

$$AM - MB = \sum_{k=0}^{m-1} (A^{-1})^k Y B^k - \sum_{k=0}^{m-1} (A^{-1})^{k+1} Y B^{k+1} = Y - (A^{-1})^m Y B^m = Y$$

C'est donc bien l'unique solution prévue par d).

3) On observe que N est nilpotente d'ordre 3. Or R est inversible et on a même $R^{-1} = -R$ d'après 1. e). D'après 2) e) l'unique solution de l'équation $RM - MN = I_4$ est donc :

$$M = -R - N + RN^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2.11.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 = id_E$ et $u \neq id_E$. On pose :

$$E_1 = \mathrm{Ker}(u - id_E) \text{ et } E_2 = \mathrm{Ker}(u^2 + u + id_E)$$

1. a) Montrer que $E_1 \cap E_2 = \{0\}$.

b) Déterminer un polynôme P tel que $(u^2 + u + id_E) - (u - id_E) \circ P(u)$ soit proportionnel à id_E. En déduire que $E = E_1 \oplus E_2$.

2. On suppose dans cette question que $n = 2$.

a) On suppose que l'on a $\dim E_1 = \dim E_2 = 1$. Soit alors $e_1 \in E_1 \setminus \{0\}$ et $e_2 \in E_2 \setminus \{0\}$.

i) Quelle est la forme de la matrice $A = M_{(e_1,e_2)}(u)$?

ii) Montrer que le terme situé en deuxième ligne et deuxième colonne de $A^2 + A + I_2$ ne peut être nul.

iii) Montrer que l'hypothèse faite est absurde.

b) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Solution

1. a) Soit $x \in E_1 \cap E_2$, on a $u(x) = x$ et $u^2(x) + u(x) + x = 0$, soit $3x = 0$ et $x = 0$.

b) On peut chercher P de degré 1 et unitaire pour assurer la disparition des termes en u^2 et le choix de $P = X + 2$ fait disparaître les termes en u :

$$u^2 + u + id - (u - id) \circ (u + 2id) = 3id$$

Soit $x \in E$, on a donc $3x = (u^2 + u + id)(x) - (u - id) \circ (u + 2id)(x)$
$\rightarrow$ avec $x_1 = (u^2 + u + id)(x)$, il vient $(u - id)(x_1) = (u^3 - id)(x_1) = 0$.
$\rightarrow$ avec $x_2 = (u - id) \circ (u + 2id)(x)$, il vient
$(u^2 + u + id)(x_2) = (u^3 - id)((u + 2id)(x_2)) = 0$
Ainsi $x = \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2$, avec $\frac{1}{3}x_1 \in E_1$ et $\frac{1}{3}x_2 \in E_2$.
Ce qui prouve que $E = E_1 + E_2$ et finalement $E = E_1 \oplus E_2$.

2. a) i) Comme $u(e_1) = e_1$, la matrice A est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & \beta \end{pmatrix}$.

ii) Ainsi $A^2 + A + I_2 = \begin{pmatrix} * & * \\ * & \beta^2 + \beta + 1 \end{pmatrix}$ et comme β est réel le dernier coefficient ne peut être nul.

iii) Mais $e_2 \in E_2$, on doit donc avoir $(A^2 + A + I_2)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et la contradiction est claire.

b) On ne peut avoir $\dim E_1 = 2$ (car $u \neq id_E$), on ne peut avoir $\dim E_1 = 1$, donc $\dim E_1 = 0$ et $\dim E_2 = 2$.

Soit e_1 un vecteur non nul de E_2. La seule valeur propre possible de u est 1 (car $u^3 = id_E$) et on vient de l'exclure. Donc $e_2 = f(e_1)$ n'est pas colinéaire à e_1 et (e_1, e_2) est une base de E.

Comme $e_1 \in E_2$, on a $(u^2 + u + id)(e_1) = 0$, soit :
$u(e_2) = u^2(e_1) = -e_1 - u(e_1) = -e_1 - e_2$ et donc :

$$M_{(e_1,e_2)}(u) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2.12.

Soit un entier naturel $n \geqslant 2$ et E un espace vectoriel réel de dimension n. Soit f un endomorphisme non nul de E nilpotent, ce qui signifie qu'il existe $p \geqslant 2$ tel que $f^p = 0$ et $f^{p-1} \neq 0$.

1. Montrer que $p \leqslant n$.

2. On suppose dans cette question uniquement que $p = n$. Résoudre l'équation $u^2 = f$, d'inconnue u endomorphisme de E.

3. Déterminer les valeurs propres de f. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

4. Soit g un endomorphisme de E.

a) Montrer qu'il existe un polynôme Q annulateur de g dont les racines sont exclusivement les valeurs propres de g.

b) Montrer que dans l'ensemble des polynômes annulateurs non nuls de g, il existe un polynôme annulateur de degré minimal. Quel lien existe-t-il entre Q et ce polynôme ?

c) On suppose dans cette question que g ne possède que 0 comme valeur propre. Montrer que g est nilpotent.

Solution

1. On sait qu'il existe $x \neq 0$ tel que $f^{p-1}(x) \neq 0$. La famille $(x, f(x), \ldots, f^{p-1}(x))$ est de cardinal p et est libre puique si $\sum_{k=0}^{p} a_k f^k(x) = 0$, en composant par f^{p-1}, cela montre que $a_0 = 0$, puis en composant par f^{p-2}, etc.
Donc $p \leqslant n$.

2. Dans cette question $f^{n-1} \neq 0$ et $f^n = 0$. Soit u tel que $u^2 = f$. Alors $u^{2n} = 0$ et $u^{2n-2} \neq 0$. Donc u est nilpotent, mais par la question précédente son indice de nilpotence est inférieur ou égal à n. Donc $2n - 1 \leqslant n \Rightarrow n \leqslant 1$ ce qui n'est pas le cas et l'équation proposée n'a donc pas de solution.

3. Les valeurs propres de f font partie des racines de tout polynôme annulateur, ici X^p. Donc $\text{spec}(f) \subseteq \{0\}$. Mais f est nilpotente donc non inversible et $\text{spec}(f) = \{0\}$.
L'endomorphisme f ne peut être diagonalisable, ne possédant qu'une unique valeur propre, sinon, il serait nul.

4. a) Tout endomorphisme g de E admet un polynôme annulateur, puisque la famille $(Id, g, g^2, \ldots, g^{n^2})$ étant de cardinal $n^2 + 1$ est liée. Notons P un polynôme annulateur.
Le théorème de d'Alembert Gauss permet de décomposer P sous la forme

$$P(X) = C \prod_{i=1}^{k} (X - \alpha_i)^{m_i}$$

où les (α_i) sont réels ou complexes et les m_i des entiers naturels supérieurs ou égaux à 1. On a ainsi $\prod_{i=1}^{k} (g - \alpha_i Id)^{m_i} = 0$ et les facteurs en jeu commutent eux à deux.
Supposons qu'il existe i_0 tel que α_{i_0} ne soit pas valeur propre de g. L'endomorphisme $g - \alpha_{i_0} Id$ est donc inversible, tout comme $(g - \alpha_{i_0} Id)^{m_{i_0}}$. En ramenant ce facteur en début de factorisation et en multipliant par son inverse, on récupère un autre polynôme annulateur de degré inférieur dans lequel on a enlevé une racine qui n'est pas valeur propre de g. En procédant ainsi pour chacune des racines de P, on récupère un polynôme annulateur

dont les racines sont exactement les valeurs propres de g. Notons le Q et q son degré.

b) Soit $\mathcal{A} = \{P \in \mathbb{R}[X]/P(g) = 0\}$ et $\mathcal{D} = \{\deg(P), P \in \mathcal{A}\}$. L'ensemble $\mathcal{D}$ est un sous ensemble de $\mathbb{N}^*$ minoré par 1 donc admet un élément minimal p_0 et il existe $P \in \mathcal{A}$ de degré p_0.
En utilisant un raisonnement identique au raisonnement précédent, les racines de P sont exactement les valeurs propres de g. Donc P divise Q.

c) Si g est un endomorphisme dont la seule valeur propre est 0, le polynôme Q est de la forme X^m et $g^m = 0$. Donc g est nilpotent. L'indice de nilpotence de g est donné par le degré du polynôme P trouvé dans la question précédente.

Exercice 2.13.

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soit $A = (a_{i,j})$ la matrice d'ordre n, à coefficients réels, définie par :

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i+j = n+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \text{ soit : } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & & \iddots & \iddots & \vdots \\ \vdots & \iddots & \iddots & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ associé à A dans la base canonique $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que u est diagonalisable.

2. Dans cette question, n est pair et on écrit $n = 2p$.

a) Montrer qu'il existe des plans vectoriels $F_1, \dots, F_p$ stables par u tels que l'on ait $\bigoplus_{k=1}^{p} F_k = \mathbb{R}^n$.

b) En déduire les valeurs propres de u ainsi qu'une base orthonormée de vecteurs propres de u.

3. Dans cette question, n est impair, et on écrit $n = 2p+1$. Déterminer les éléments propres de u.

4. On considère la matrice A définie par : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & & \iddots & \iddots & \vdots \\ \vdots & \iddots & \iddots & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Montrer que A n'est pas diagonalisable.

5. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_4 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. A quelles conditions A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$?

Solution

1. On considère $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique. La matrice A est symétrique réelle : elle est diagonalisable et l'endomorphisme u associé est diagonalisable.

2. a) Les plans demandés sont les plans $F_1, \ldots, F_p$, où $F_k = \text{Vect}(e_k, e_{2p-k+1})$, puisque $u(e_k) = e_{2p-k+1}$ et $u(e_{2p-k+1}) = e_k$.

La famille $(e_1, \ldots, e_{2p})$ étant une base, ces p plans sont bien en somme directe de somme $\mathbb{R}^{2p}$. De plus cette somme directe est orthogonale.

b) Soit u_k l'endomorphisme induit par la restriction de u à F_k. La matrice associée à u_k est $A_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Il s'agit de la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à la droite engendrée par $e_k + e_{2p-k+1}$ et une base orthonormée $\mathcal{B}_k$ de F_k formée de vecteurs propres de u_k est formée des vecteurs :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(e_k + e_{2p-k+1}) \text{ et } \frac{1}{\sqrt{2}}(e_k - e_{2p-k+1})$$

Finalement u admet 1 et -1 pour valeurs propres et $(\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_p)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^{2p}$formée de vecteurs propres de u.

3. On procède exactement de la même façon, en mettant tout de même à part le vecteur e_{p+1}, qui est un vecteur propre associé à la valeur propre 1.

4. On a $u(e_1) = e_n$ et $u(e_n) = 0$, donc $u^2(e_1) = u^2(e_n) = 0$.

Le rang de A est évidemment $n-1$ (par échelonnement des $n-1$ premières colonnes) tandis que le rang de u^2 est strictement inférieur à $n-1$.

Si A était diagonalisable, on aurait dans une base $\mathcal{B}$ adéquate $M_{\mathcal{B}}(u) = \text{diag}(0, *, \ldots, *)$, les coefficients $*$ étant non nuls. On aurait alors $M_{\mathcal{B}}(u^2) = \text{diag}(0, *^2, \ldots, *^2)$, ce qui donnerait $\text{rg}(u^2) = n-1$. D'où la contradiction.

5. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^4$ canoniquement associé à u.

$\rightarrow$ Si tous les coefficients a_i sont non nuls, alors la restriction de u à chacun des deux plans $\text{Vect}(e_1, e_4)$ et $\text{Vect}(e_2, e_3)$ est diagonalisable, car admettant deux valeurs propres opposées et donc A est $\mathbb{C}$-diagonalisable.

$\rightarrow$ Si par exemple $a_1 = 0$ et $a_4 \neq 0$, alors $e_4 \notin \operatorname{Ker} u$ tandis que $e_4 \in \operatorname{Ker}(u^2)$ et comme nous avons déjà fait remarquer que u diagonalisable impose $\operatorname{Ker} u^2 = \operatorname{Ker} u$, on en conclut que u n'est pas diagonalisable.

$\rightarrow$ Si $a_1 = a_4 = 0$, alors l'endomorphisme de $\operatorname{Vect}(e_1, e_4)$ induit par u est l'endomorphisme nul et il n'y a pas de problème dans ce plan.

$\rightarrow$ Le raisonnement est le même pour les coefficients a_2 et a_3.

Bref A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ si et seulement si les coefficients anti-diagonaux équidistants des extrêmes sont simultanément nuls ou simultanément non nuls.

Exercice 2.14.

Soit $E = \mathbb{R}^n$, avec $n \geqslant 2$. Soit f un endomorphisme de E. On dit que g est un **pseudo-inverse** de f si g est un endomorphisme de E vérifiant les trois propriétés suivantes :

(1) $f \circ g \circ f = f$.

(2) $g \circ f \circ g = g$.

(3) $f \circ g = g \circ f$.

1. a) On suppose que f est un automorphisme de E. Montrer que f admet un unique pseudo-inverse.

b) On suppose que f est un projecteur de E. Proposer un pseudo-inverse de f.

2. Montrer que si u et v sont deux endomorphismes de E, on a :
$\operatorname{rg}(u \circ v) \leqslant \min\{\operatorname{rg}(u), \operatorname{rg}(v)\}$.

3. On suppose dans cette question que g est un endomorphisme de E vérifiant la propriété (1).

a) Montrer que $g \circ f$ et $f \circ g$ sont des projecteurs.

b) Comparer les rangs de f, $f \circ g$ et $g \circ f$.

c) Montrer que $f \circ g$ est le projecteur sur $\operatorname{Im}(f)$ parallèlement à un sous-espace vectoriel contenant $\operatorname{Ker}(g)$.

4. On suppose dans cette question que g et h sont deux pseudo-inverses de f.

a) Montrer que $f \circ h = g \circ f$.

b) Montrer que $g = h$.

5. On suppose dans cette question que f admet comme pseudo-inverse g.

a) Montrer que $\operatorname{Im}(g) = \operatorname{Im}(f)$ et $\operatorname{Ker}(g) = \operatorname{Ker}(f)$.

b) Montrer que $\operatorname{Im}(f)$ et $\operatorname{Ker}(f)$ sont supplémentaires dans E.

Solution

1. a) Si f est un automorphisme de E, f admet un inverse noté f^{-1}.
Si f admet un pseudo-inverse noté g, alors
$f \circ g \circ f = f \implies f^{-1} \circ f \circ g \circ f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f \circ f^{-}1 \implies g = f^{-1}$.
Réciproquement, on constate que f^{-1} vérifie les propriétés (1), (2) et (3).
Ainsi, si f est un automorphisme de E, f admet pour pseudo-inverse son inverse $g = f^{-1}$.

b) Si f est un projecteur de E, f vérifie $f \circ f = f$. On vérifie alors que f vérifie les propriétés (1), (2) et (3). Ainsi, si f est un projecteur de E, f est un pseudo-inverse de f.

2. Soient u et v deux endomorphismes de E.
On a $\mathrm{Im}(u \circ v) \subset \mathrm{Im}(u)$, d'où $\mathrm{rg}(u \circ v) \leqslant \mathrm{rg}(u)$.
D'autre part, $\mathrm{Ker}(v) \subset \mathrm{Ker}(u \circ v)$, d'où $\dim(\mathrm{Ker}(v)) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(u \circ v))$. Par le théorème du rang, on en déduit que $\mathrm{rg}(u \circ v) \leqslant \mathrm{rg}(v)$.
On peut donc conclure que $\mathrm{rg}(u \circ v) \leqslant \min\{\mathrm{rg}(u), \mathrm{rg}(v)\}$.

3. a) • En composant la propriété (1) à gauche par g, on trouve que

$$(g \circ f) \circ (g \circ f) = g \circ f,$$

ce qui prouve que $g \circ f$ est un projecteur.

• En composant la propriété (1) à droite par g, on trouve que $(f \circ g) \circ (f \circ g) = f \circ g$, ce qui prouve que $f \circ g$ est un projecteur.

b) • On déduit d'abord de la question 2 que $\mathrm{rg}(f \circ g) \leqslant \mathrm{rg}(f)$. D'autre part, comme $f = f \circ g \circ f$, on a $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}((f \circ g) \circ f) \leqslant \mathrm{rg}(f \circ g)$. On conclut que $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f \circ g)$.

• Or, on a aussi $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f \circ (g \circ f)) \leqslant \mathrm{rg}(g \circ f) \leqslant \mathrm{rg}(f)$. Toutes ces inégalités sont donc des égalités. On conclut que $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}(f \circ g)$.

c) Comme $\mathrm{Im}(f \circ g) \subset \mathrm{Im}(f)$ avec égalité des dimensions d'après la question précédente, on a $\mathrm{Im}(f \circ g) = \mathrm{Im}(f)$. Comme $f \circ g$ est un projecteur, il suit que :

$$E = \mathrm{Im}(f \circ g) \oplus \mathrm{Ker}(f \circ g) = \mathrm{Im}(f) \circ \mathrm{Ker}(f \circ g)$$

Or, $\mathrm{Ker}(g) \subset \mathrm{Ker}(f \circ g)$. Par les propriétés des projecteurs, on peut conclure que $f \circ g$ est le projecteur sur $\mathrm{Im}(f)$ parallèlement à un sous-espace vectoriel contenant $\mathrm{Ker}(g)$.

4. a) On a $f \circ g \circ f = f$. En composant à droite par h, on trouve $(f \circ g \circ f) \circ h = f \circ h$, soit $(f \circ g) \circ (f \circ h) = f \circ h$

comme g et h commutent avec f (propriété (3)), on a donc : $(g \circ f) \circ (h \circ f) = f \circ h$

soit $g \circ (f \circ h \circ f) = f \circ h$ et donc $g \circ f = f \circ h$.

b) comme $f \circ h = g \circ f$, on a : $f \circ h \circ g = g \circ f \circ g = g \quad (*)$.

Mais comme $f \circ h = h \circ f$, la relation (*) donne $h \circ f \circ g = g$, soit $h \circ (f \circ g) = g$.

Comme $g \circ f = f \circ h$, on en déduit que $g = h \circ (f \circ g) = h \circ (g \circ f) = h \circ f \circ h = h$.

Ainsi, si f possède un pseudo-inverse, celui-ci est unique.

5. a) • En utilisant les propriétés (2) et (3), on montre que :

$$\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Im}(g \circ f \circ g) \subset \mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}(f \circ g) \subset \mathrm{Im}(f).$$

Par symétrie des rôles joués par f et g, on montre de manière analogue que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Im}(g)$. Par double inclusion, on conclut que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(g)$.

• Soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$. Alors, $g(x) = (g \circ f \circ)(x) = (g \circ g \circ f)(x) = 0$. Donc, $x \in \mathrm{Ker}(g)$, et $\mathrm{Ker}(g) \subset \mathrm{Ker}(f)$.

Par symétrie des rôles joués par f et g, on montre de manière analogue que l'on a $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$ (ou bien : l'égalité des images donne l'égalité des dimensions des noyaux). Par double inclusion, on conclut que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(g)$.

b) • Par le théorème du rang, $\mathrm{rg}(f) + \dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(E)$.

• Il reste à montrer que $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$. Soit $x \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$. Comme $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(g)$, il existe $y \in E$ tel que $x = g(y)$. D'où, $0 = f(x) = (f \circ g)(y)$.

En appliquant g, on trouve que $0 = (g \circ f \circ g)(y) = g(y) = x$.

On conclut que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

Exercice 2.15.

On note k un entier naturel fixé et E le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à k.
Soit $a \in \mathbb{C}^*$. On définit : $t_a : E \to E, P(X) \mapsto P(X + a)$; $d : E \to E, P \mapsto P'$ (où P' désigne le polynôme dérivé du polynôme P).

On note $\mathcal{B} = (1, X, X^2, \ldots, X^k)$ la base canonique de E.

1. Montrer que t_a et d sont des endomorphismes de E.

2. **a)** Ecrire les matrices, notées respectivement T_a et D, des endomorphismes t_a et d relativement à la base $\mathcal{B}$.

b) En déduire les valeurs propres et les sous-espaces propres de ces endomorphismes.

3. On s'intéresse aux sous-espaces vectoriels de E stables par d, c'est-à-dire à l'ensemble des sous-espaces vectoriels $F \subset E$ tels que $d(F) \subset F$.

a) Montrer que tous les $\mathbb{C}_p[X]$, pour $p \in [\![0, k]\!]$, et $\{0\}$ sont stables par d.

b) Réciproquement, soit F un sous-espace vectoriel non réduit à $\{0\}$ de E, stable par d. En considérant $P \in F$ de degré maximal noté p, montrer que $F = \mathbb{C}_p[X]$.

4. Soit $P(X) = \sum_{i=0}^{k} p_i X^i$ un polynôme fixé de degré k (on a donc $p_k \neq 0$).

Montrer que la famille $\left(P, \frac{d(P)}{1!}, \frac{d^2(P)}{2!}, \ldots, \frac{d^k(P)}{k!}\right)$ constitue une base $\mathcal{B}_1$ de E. Donner la matrice de passage R de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}_1$.

Solution

1. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ et $(P, Q) \in E^2$. On a :

$$\begin{aligned} t_a(\lambda P + \mu Q) &= (\lambda P + \mu Q)(X + a) = \lambda P(X + a) + \mu Q(X + a) \\ &= \lambda t_a(P) + \mu t_a(Q) \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} d(\lambda P + \mu Q)(X) &= (\lambda P + \mu Q)'(X) \\ &= \lambda P'(X) + \mu Q'(X) = \lambda d(P)(X) + \mu d(Q)(X) \end{aligned}$$

De plus $t_a(P)$ et $d(P)$ sont bien de degré inférieur ou égal à k. Donc t_a et d sont des endomorphismes de E.

2. On calcule les images des vecteurs de base $1, \ldots, X^k$ par ces applications :

Pour $j \in [\![0, k]\!]$,

$$t_a(X^j) = (X + a)^j = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} a^{j-i} X^i \text{ et } d(X^j) = \begin{cases} 0 & \text{si} j = 0 \\ jX^{j-1} & \text{si } j \neq 0 \end{cases}$$

D'où $T_a = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0}a & \cdots & \binom{k}{0}a^k \\ 0 & \binom{1}{1} & \cdots & \binom{k}{1}a^{k-1} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \binom{k}{k} \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 0 & k \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

3. En lisant les diagonales : $\operatorname{spec}(t_a) = \{1\}$ et $\operatorname{spec} d = \{0\}$.

$\star$ $t_a(P) = P \iff P(X + a) = P(X) \iff P$ est un polynôme constant. Cela peut se voir car le rang de $T_a - I_{k+1}$ vaut k, donc le sous-espace propre est de dimension 1 et contient clairement les polynômes constants. On peut aussi dire qu'un polynôme périodique est constant...

$\star$ $d(P) = 0 \iff P$ est un polynôme constant.

$$E_{(1)}(t_a) = E_{(0)}(d) = \mathbb{C}_0[X]$$

4. a) On peut remarquer que tous les $\mathbb{C}_p[X]$, pour $p \in [\![0, k]\!]$ sont stables par d, puisque la dérivation abaisse le degré. Il est clair également que $\{0\}$ est aussi stable par d.

b) Soit F un sous-espace de E, stable par d. On supposera également que $F \neq \{0\}$.

Soit $P \in F$, de degré maximal noté p. Ceci signifie que tout élément de F est de degré inférieur ou égal à p, donc $F \subset \mathbb{C}_p[X]$.

Les polynômes P, $d(P)$, $d^2(P)$, $\ldots$, $d^p(P)$ se trouvent dans F, puisque ce dernier est stable par d. La dérivation fait baisser le degré d'une unité donc $d^j(P)$ est de degré $p-j$ pour $j \in [\![0, p]\!]$. La famille $(P, d(P), \ldots, d^p(P))$ est alors libre car formée de polynômes de degrés étagés. Ainsi $\dim F \geqslant p+1$.

Par inclusion et dimension, on a donc $F = \mathbb{C}_p[X]$.

Ainsi, les sous-espaces de E stables par d, sont $\{0\}$, $\mathbb{C}_0[X]$, $\ldots$, $\mathbb{C}_k[X]$.

5. La famille $\left(P, \dfrac{d(P)}{1!}, \ldots, \dfrac{d^k(P)}{k!}\right)$ est libre, puisqu'il s'agit d'une famille, étagée en degré. De plus, elle comporte $k+1$ vecteurs de E, qui est de dimension $k+1$, c'en est donc une base.

Pour trouver la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}_1$, il suffit de décomposer les vecteurs de $\mathcal{B}_1$, dans la base canonique.

$$\text{Or : } \forall\,(i,j) \in \mathbb{N}^2,\ d^j(X^i) = \begin{cases} \dfrac{i!}{(i-j)!}X^{i-j} & \text{si } j \leqslant i \\ 0 & \text{si } j > i \end{cases}$$

Par suite :

$$\begin{aligned} \forall\, j \in [\![0,k]\!],\ \frac{d^j(P)}{j!} &= \frac{1}{j!}\sum_{i=1}^{k} p_i d^j(X^i) = \sum_{i=j}^{k} \frac{i!}{j!(i-j)!} p_i X^{i-j} \\ &= \sum_{i=0}^{k-j} \frac{(i+j)!}{j!i!} p_{i+j} X^i = \sum_{i=0}^{k-j} \binom{i+j}{j} p_{i+j} X^i. \end{aligned}$$

On obtient ainsi la matrice de passage :

$$R = \begin{pmatrix} \binom{0}{0}p_0 & \cdots & \binom{k-1}{k-1}p_{k-1} & \binom{k}{k}p_k \\ \binom{1}{0}p_1 & \cdots & \binom{k}{k-1}p_k & 0 \\ \vdots & \iddots & & \vdots \\ \binom{k}{0}p_k & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2.16.

Soit un entier $n \geqslant 2$.

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall\,(i,j) \in [\![1,n]\!]^2, a_{i,j} = i + j$. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice A. On note enfin u et v les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ de matrices colonnes canoniquement associées :

$$U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ . \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ . \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$$

1. La matrice A est-elle diagonalisable ?

2. Déterminer l'image et le rang de f.

3. a) Montrer que $A = V\,{}^tU + U\,{}^tV$, où ${}^tU$ (resp. ${}^tV$) désigne la transposée de U (resp. de V).

b) En déduire le noyau de f.

4. a) Soit X un vecteur colonne propre de A associé à une valeur propre λ non nulle. Montrer que X s'écrit $X = aU + bV$, avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

b) Déterminer les valeurs propres de f.

c) Déterminer les sous-espaces propres de f.

5. Pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on pose $Q(X) = {}^tXAX$. La forme quadratique Q est-elle positive ? Négative ?

Solution

1. Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{j,i} = j + i = i + j = a_{i,j}$: la matrice A est donc symétrique réelle. Par suite, A est diagonalisable.

2. Pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, on remarque que la $j^{\text{ème}}$ colonne C_j de A s'écrit $C_j = V + jU$. Donc $\text{Im}(A) = \text{Vect}(V+U, V+2U, \ldots, V+nU) = \text{Vect}(U,V)$. Comme U et V ne sont pas colinéaires, on en déduit que A est de rang 2.

3. a) On a :

$$\begin{aligned} V\,{}^tU + U\,{}^tV &= (\,V \quad V \quad \ldots \quad V\,) + (\,U \quad 2U \quad \ldots \quad nU\,) \\ &= (\,V+U \quad V+2U \quad \ldots \quad , V+nU\,) = A. \end{aligned}$$

b) Comme A est de rang 2, son noyau est de dimension $n-2$. De plus A est symétrique réelle, donc le noyau de A est l'orthogonal de son image :

$$\text{Ker}\,A = (\text{Vect}(U,V))^{\perp}$$

On peut aussi rechercher directement les équations de $\text{Ker}\,A$:

$$(x_1,\ldots,x_n) \in \text{Ker}\,f \iff \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + \cdots + (1+n)x_n = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + \cdots + (2+n)x_n = 0 \\ \qquad\qquad \cdots \\ (n+1)x_1 + (n+2)x_2 + \cdots + (n+n)x_n = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n = 0 \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0 \end{cases}$$

On retrouve bien le même résultat.

4. a) Soit X un vecteur propre de A associé à une valeur propre λ non nulle. Alors, $AX = \lambda X$ et comme $\lambda \neq 0$, $X = A(\frac{1}{\lambda}X) \in \operatorname{Im} A$.
Comme $\operatorname{Im}(A) = \operatorname{Vect}(U, V)$, on en déduit qu'il existe deux réels a et b tels que $X = aU + bV$.

b) Ainsi, on peut écrire :

$$AX = \lambda X \iff (V{}^tU + U{}^tV)(aU + bV) = \lambda(aU + bV)$$

ce qui donne, après développement :

$$AX = \lambda X \iff \big(a({}^tVU - \lambda) + b{}^tVV\big)U + \big(a{}^tUU + b({}^tUV - \lambda)\big)V = 0$$

Comme (U, V) forme une famille libre, on en déduit le système

$$\begin{cases} a({}^tVU - \lambda) + b{}^tVV = 0 \\ a{}^tUU + b({}^tUV - \lambda) = 0 \end{cases}$$

Ce système linéaire de deux équations en a et b admet une solution non triviale si et seulement si
$\big({}^tVU - \lambda\big)^2 - ({}^tUU{}^tVV) = 0$, soit : $\big(\langle u, v\rangle - \lambda\big)^2 - \|u\|^2\|v\|^2 = 0$
Donc $\lambda = {}^tVU \pm {}^tUU{}^tVV = \langle u, v\rangle \pm \|u\|\|v\|$.
Or : $\langle u, v\rangle = 1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

$$\|u\| = \sqrt{n}, \|v\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} k^2} = \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}.$$

Donc $\lambda = \dfrac{n(n+1)}{2} \pm n\sqrt{\dfrac{(n+1)(2n+1)}{6}}$.
Sans oublier que si $n \geqslant 3$, 0 est aussi valeur propre de A.

c) On connait déjà le sous-espace propre associé à 0 qui est le noyau de A. Reste à trouver les deux autres sous-espaces propres. En reportant l'expression obtenue pour λ dans la première équation du système, on trouve $b\|v\| = \pm a\|u\|$, donc :

• le sous-espace propre associé à $\lambda_1 = \dfrac{n(n+1)}{2} + n\sqrt{\dfrac{(n+1)(2n+1)}{6}}$ est $E_{\lambda_1} = \operatorname{Vect}(\|v\|U + \|u\|V)$.

• le sous-espace propre associé à $\lambda_2 = \dfrac{n(n+1)}{2} - n\sqrt{\dfrac{(n+1)(2n+1)}{6}}$ est $E_{\lambda_2} = \operatorname{Vect}(\|v\|U - \|u\|V)$.

5. Q est la forme quadratique associée à la matrice A. La matrice A ayant une valeur propre strictement positive (λ_1) et une valeur propre strictement négative (λ_2), on peut conclure que Q n'est ni positive ni négative.

Exercice 2.17.

Soit un entier $n \geqslant 2$. On note $\mathcal{E} = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Pour toute application $q : \mathcal{E} \to \mathbb{R}_+$, on considère les quatre propriétés suivantes :

(i) $\forall\, A \in \mathcal{E}, \forall\, \lambda \in \mathbb{C}, q(\lambda A) = |\lambda|\, q(A)$;

(ii) $\forall\, (A, B) \in \mathcal{E}^2, q(A + B) \leqslant q(A) + q(B)$;

(iii) $\forall\, A \in \mathcal{E}, q(A) = 0 \iff A = 0$;

(iv) $\forall\, (A, B) \in \mathcal{E}^2, q(AB) = q(BA)$.

Pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on désigne par $E_{i,j} \in \mathcal{E}$ la matrice dont le coefficient en ligne i et colonne j vaut 1 et dont tous les autres coefficients valent 0. Enfin, on pose :

$$\mathcal{F} = \{A \in \mathcal{E} \ / \ q(A) = 0\}$$

1. Montrer que l'application $f : \mathcal{E} \to \mathbb{R}_+$ définie par $f(A) = |\operatorname{tr}(A)|$ vérifie les propriétés (i), (ii) et (iv).

2. A l'aide des matrices $E_{i,j}$, montrer qu'il n'existe pas d'application $q : \mathcal{E} \to \mathbb{R}_+$ qui vérifie les quatre propriétés (i) à (iv).

3. *Désormais, q désigne une application qui vérifie les propriétés (i), (ii) et (iv)*

a) Pour tout $(A, B) \in \mathcal{E}^2$, montrer que : $|q(A) - q(B)| \leqslant q(A + B)$.

b) Montrer que : $\forall\, (A, B) \in \mathcal{E} \times \mathcal{F}, q(A + B) = q(A)$

L'ensemble $\mathcal{F}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$?

c) Pour toute matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{E}$, montrer que : $q(A) = q\big(\sum_{i=1}^{n} a_{i,i} E_{i,i}\big)$.

d) Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. Calculer en extension (*i.e.* en donnant tous leurs coefficients) les matrices XY et YX lorsque X et Y sont les matrices suivantes :

$$X = \sum_{j=1}^{n} E_{1,j} + \sum_{i=2}^{n} E_{i,i} \text{ et } Y = \sum_{r=1}^{n} \lambda_r E_{r,1}$$

En déduire qu'il existe α tel que $q = \alpha f$.

Solution

1. Comme la trace est linéaire, et d'après l'inégalité triangulaire, on a :

(i) $f(\lambda A) = |\operatorname{tr}(\lambda A)| = |\lambda \operatorname{tr}(A)| = |\lambda| f(A)$;

(ii) $f(A + B) = |\operatorname{tr}(A + B)| = |\operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)| \leqslant |\operatorname{tr}(A)| + |\operatorname{tr}(B)|$
$\leqslant f(A) + f(B)$;

(iv) $f(AB) = |\operatorname{tr}(AB)| = |\operatorname{tr}(BA)| = f(BA)$, car on sait que $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

2. Par l'absurde si l'application q vérifie (iii), alors en choisissant par exemple $A = E_{1,1}$ et $B = E_{1,2}$, on a $AB = E_{1,2} \neq 0$ tandis que $BA = 0$, donc $q(AB) \neq 0$ et $q(BA) = 0$. D'où la contradiction.

3. a) On remarque, avec (i) en prenant $\lambda = -1$, que : $q(-A) = |-1|q(A) = q(A)$.

D'après la propriété (ii) , on a :

$q(A) = q\big((A+B) - B\big) \leqslant q(A+B) + q(-B) = q(A+B) + q(B)$, donc $q(A) - q(B) \leqslant q(A+B)$.

En échangeant les rôles de A et B, on obtient : $q(B) - q(A) \leqslant q(A+B)$.

La conjonction de ces deux inégalités donne bien : $\big|q(A) - q(B)\big| \leqslant q(A+B)$.

b) Si $q(B) = 0$, d'après la question précédente et (ii), on a :

$$q(A) \leqslant |q(A)| = |q(A) - q(B)| \leqslant q(A+B) \leqslant q(A) + q(B) = q(A)$$

donc $q(A+B) = q(A)$.

L'ensemble $\mathcal{F}$ est bien un sous-espace vectoriel car :

$\rightarrow$ la matrice nulle appartient à $\mathcal{F}$ d'après (i) en prenant $\lambda = 0$;

$\rightarrow$ l'ensemble $\mathcal{F}$ est stable par multiplication par un scalaire d'après (i) ;

$\rightarrow$ l'ensemble $\mathcal{F}$ est stable pour l'addition d'après la propriété que l'on vient de montrer.

c) D'après (iv), si $i \neq j$, alors $q(E_{i,j}) = q(E_{i,i}E_{i,j}) = q(E_{i,j}E_{i,i}) = q(0) = 0$. Si on pose $B = \sum\limits_{i \neq j} -a_{i,j}E_{i,j}$, la question précédente donne $q(B) = 0$, donc :

$$q(A) = q(A+B) = q\Big(\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}E_{i,i}\Big)$$

d) Par les règles de multiplication des matrices élémentaires :

$$\begin{aligned} XY &= \Big(\sum_{j=1}^{n} E_{1,j} + \sum_{i=2}^{n} E_{i,i}\Big)\Big(\sum_{r=1}^{n} \lambda_r E_{r,1}\Big) \\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{r=1}^{n} \lambda_r E_{1,j}E_{r,1} + \sum_{i=2}^{n}\sum_{r=1}^{n} \lambda_r E_{i,i}E_{r,1} \\ &= \sum_{r=1}^{n} \lambda_r E_{1,1} + \sum_{i=2}^{n} \lambda_i E_{i,1} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda_2 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$YX = \big(\sum_{r=1}^{n} \lambda_r E_{r,1}\big)\big(\sum_{j=1}^{n} E_{1,j} + \sum_{i=2}^{n} E_{i,i}\big)$$
$$= \sum_{r=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_r E_{r,1}E_{1,j} + \sum_{r=1}^{n}\sum_{i=2}^{n} \lambda_r E_{r,1}E_{i,i}$$
$$YX = \sum_{r=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_r E_{r,j} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1 \\ \lambda_2 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_n & \lambda_n & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Or la question précédente montre que deux matrices qui ont les mêmes coefficients diagonaux ont la même image par q. En prenant $\lambda_i = a_{i,i}$, pour tout i, on a donc $q(A) = q(YX)$, ainsi $q(A) = q(XY)$ et par le résultat c) :

$$q(A) = q((\sum_{i=1}^{n} \lambda_i)E_{1,1}) = \Big|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\Big|q(E_{1,1}) = \Big|\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}\Big|q(E_{1,1})$$

En posant $\alpha = q(E_{1,1})$, on a bien $q = \alpha f$.

Exercice 2.18.

Dans cet exercice, $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est l'espace vectoriel des matrices carrées de taille $n \geqslant 2$ à coefficients réels, et $(E_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ désigne la base canonique de E.

On note $\mathrm{tr}(M)$ la trace d'une matrice carrée M.

1. Dans cette question, $n = 2$ et Φ est l'endomorphisme de E défini par :

$$\Phi(M) = \mathrm{tr}(M)I_2 - M$$

où I_2 est la matrice identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Montrer que Φ vérifie la propriété :

$$\forall\,(A,B) \in E^2, \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}\left(\Phi(A)\Phi(B)\right)$$

b) L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable ?

c) On suppose que $M \in E$ admet deux valeurs propres λ et μ. Montrer que $\Phi(M)$ a les mêmes valeurs propres.

On revient maintenant au cas général $n \geqslant 2$.

2. **a)** Calculer pour tout $A \in E$ et pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $AE_{i,j}$ puis la trace $\mathrm{tr}(AE_{i,j})$.

b) Soit $A \in E$ telle que pour tout $M \in E$, $\mathrm{tr}(AM) = 0$. Montrer que $A = 0$.

Dans la suite de cet exercice, Φ désigne une application (a priori non linéaire) de E dans lui-même, telle que l'on ait la propriété :

pour tout couple $(A,B) \in E^2$, les matrices AB et $\Phi(A)\Phi(B)$ ont la même trace. (*)

3. Exemple. Soit P une matrice inversible. Montrer que les deux applications définies par :

$$\Phi_1(M) = PMP^{-1} \text{ et } \Phi_2(M) = P^tMP^{-1}$$

vérifient la propriété $(*)$.

4. **a)** Montrer que $\operatorname{tr}\big(\Phi(A)\Phi(B)\big) = \operatorname{tr}\big(\Phi(B)\Phi(A)\big)$ pour tout couple $(A, B) \in E^2$.

b) Calculer $\operatorname{tr}\big(\Phi(E_{i,j})\Phi(E_{k,\ell})\big)$ pour tout $(i, j, k, \ell) \in [\![1, n]\!]^4$.

c) En déduire que la famille $\big(\Phi(E_{i,j})\big)_{1\leq i,j\leq n}$ est une base de E.

Solution

1. a) On a :

$\Phi(A)\Phi(B) = (\operatorname{tr}(A)I_2 - A))(\operatorname{tr}(B)I_2 - B)$

$= \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B)I_2 - \operatorname{tr}(A)B - \operatorname{tr}(B)A + AB$, d'où :

$$\operatorname{tr}(\Phi(A)\Phi(B)) = 2\operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B) - 2\operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B) + \operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(AB)$$

b) $\star$ Si $\operatorname{tr}(M) = 0$, alors $\Phi(M) = -M$. Ainsi -1 est valeur propre de Φ et le sous-espace propre associé est un hyperplan (donc de dimension $n^2 - 1 = 3$).

$\star$ $\Phi(I_2) = 2I_2 - I_2 = I_2$, donc 1 est aussi valeur propre et le sous-espace propre associé est, comme toujours, de dimension au moins égale à 1.

Comme $\dim E = 4$, le compte est bon et Φ est diagonalisable. (On aurait aussi pu montrer que $\Phi^2 = id_E$)

c) λ, μ sont les valeurs propres de M. On sait que $\operatorname{tr}(M) = \lambda + \mu$.

Soit X une matrice colonne propre pour M associée, par exemple, à la valeur propre λ. On a $MX = \lambda X$, d'où :

$$\Phi(M)X = (\operatorname{tr}(M)I_2 - M)X = \operatorname{tr}(M)X - \lambda X = (\operatorname{tr}(M) - \lambda)X = \mu X$$

Ainsi μ et λ sont les valeurs propres de $\Phi(M)$ (et les vecteurs colonnes propres sont échangés).

2. a) On écrit $A = \sum_{p,q} a_{p,q}E_{p,q}$ et $AE_{i,j} = \sum_{p,q} a_{p,q}E_{p,q}E_{i,j} = \sum_p a_{p,i}E_{p,j}$.

D'où $\operatorname{tr}(AE_{i,j}) = \sum_p a_{p,i}\operatorname{tr}(E_{p,j}) = a_{j,i}$.

b) Si, pour toute matrice M, $\operatorname{tr}(AM) = 0$, en particulier $\operatorname{tr}(AE_{i,j}) = 0$ pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, ce qui entraîne que $a_{j,i} = 0$, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ et donc que $A = 0$.

3. On remarque que, pour toutes matrices :

$\Phi_1(A)\Phi_1(B) = PAP^{-1}PBP^{-1} = P(AB)P^{-1}$.

$\Phi_2(A)\Phi_2(B) = P^tAP^{-1}P^tBP^{-1} = P^tA^tBBP^{-1} = P^t(BA)P^{-1}$.

Par conséquent :

$$\mathrm{tr}(\Phi_1(A)\Phi_1(B)) = \mathrm{tr}(P(AB)P^{-1}) = \mathrm{tr}(AB)$$
$$\mathrm{tr}(\Phi_2(A)\Phi_2(B)) = \mathrm{tr}(P^t(BA)P^{-1}) = \mathrm{tr}({}^t(BA))\,\mathrm{tr}(BA) = \mathrm{tr}(AB)$$

4. a) La réponse est claire, puisque $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

b) On a $\mathrm{tr}(\Phi(E_{i,j})\Phi(E_{k,\ell})) = \mathrm{tr}(E_{i,j}E_{k,\ell}) = \delta_{j,k}\,\mathrm{tr}(E_{i,\ell}) = \delta_{j,k}\delta_{i,\ell}$.

c) La famille $(\Phi(E_{i,j})_{1\leq i,j\leq n})$ est de cardinal n^2. Il suffit de montrer qu'elle est libre.

Considérons donc une famille de scalaires telle que $\sum_{i,j}\alpha_{i,j}\Phi(E_{i,j}) = 0$.

Ainsi, pour tous indices k et ℓ :
$\sum_{i,j}\alpha_{i,j}\Phi(E_{i,j})\Phi(E_{k,\ell}) = 0$, puis par linéarité de l'application trace :

$$\sum_{i,j}\alpha_{i,j}\,\mathrm{tr}(\Phi(E_{i,j})\Phi(E_{k,\ell})) = \sum_{i,j}\alpha_{i,j}\delta_{j,k}\delta_{i,\ell} = 0$$

Il reste $\alpha_{\ell,k} = 0$, ce qui termine la question.

Exercice 2.19.

On considère l'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ des matrices carrées d'ordre n ($n \geqslant 2$) à coefficients complexes.
Si $A = (a_{k,\ell}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on définit la matrice adjointe $B = (b_{k,\ell}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de A par :

$$\forall\,(k,\ell) \in [\![1,n]\!], b_{k,\ell} = \overline{a_{\ell,k}}$$

On note alors $B = A^*$.

1. Soient A et B deux matrices appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

a) Vérifier que $(A^*)^* = A$.

b) Montrer que $(AB)^* = B^*A^*$.

c) Montrer que pour tous complexes α et β, $(\alpha A + \beta B)^* = \overline{\alpha}A^* + \overline{\beta}B^*$.

On dit que A est auto-adjointe si $A = A^*$. On dit que A est normale si $AA^* = A^*A$.

d) Donner un exemple de matrice autoadjointe.

2. a) Montrer que toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ peut s'écrire de façon unique sous la forme $A = X + iY$, où X et Y sont deux matrices autoadjointes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (on pourra penser à examiner les matrices $A + A^*$ et $A - A^*$). En déduire que A est normale si et seulement si X et Y commutent.

b) La matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ donnée par $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ est-elle normale ? Que remarquez-vous ?

c) La matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ donnée par $A = \begin{pmatrix} i & 2-i & 1 \\ 2-i & i & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle normale ?

3. On considère l'application Φ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{R}_+$ définie par $\Phi(M) = \text{tr}(M^*.M)$ pour toute matrice M.

a) Montrer que $\Phi(M) = 0$ si et seulement si $M = 0$.

b) Soit A une matrice normale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et X une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, prouver l'égalité :

$$\Phi(AX - XA) = \Phi(A^*X - XA^*).$$

(On pourra utiliser sans la justifier la propriété $\text{tr}(M_1M_2) = \text{tr}(M_2M_1)$ qui est valable pour toutes matrices).

c) En déduire que si une matrice M commute avec une matrice normale A, alors elle commute aussi avec sa matrice adjointe.

Solution

1. a) Par définition, on a $(A^*)^* = {}^t\overline{A^*} = {}^t\overline{({}^t\overline{A})} = {}^t({}^tA) = A$.

b) Les formules relatives aux coefficients du produit de deux matrices donnent immédiatement $\overline{AB} = \overline{A}.\overline{B}$. Par suite, il vient :

$$(AB)^* = {}^t\overline{AB} = {}^t\left(\overline{A}.\overline{B}\right) = \left({}^t\overline{B}\right)\left({}^t\overline{A}\right) = B^*A^*.$$

c) On a :
$(\alpha A + \beta B)^* = {}^t\overline{(\alpha A + \beta B)} = {}^t\left(\overline{\alpha}\ \overline{A} + \overline{\beta}\ \overline{B}\right) = \overline{\alpha}\ {}^t\overline{A} + \overline{\beta}{}^t\overline{B} = \overline{\alpha}A^* + \overline{\beta}B^*$.

d) Toutes les matrices symétriques et à coefficient réels conviennent.

2. a) Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ peut s'écrire sous la forme $A = X + iY$, où X et Y sont deux matrices autoadjointes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a nécessairement d'après 1.
c) $A^* = X^* - iY^* = X - iY$, d'où :

$$X = \frac{1}{2}(A + A^*) \text{ et } Y = \frac{1}{2i}(A - A^*).$$

Il suffit alors de vérifier que X et Y sont autoadjointes pour répondre à la question.

Comme $A^*A = (X - iY)(X + iY)$ et $AA^* = (X + iY)(X - iY)$, on a $AA^* = A^*A \iff XY = YX$, ce qui prouve la caractérisation demandée.

b) On décompose A sous la forme $A = X + iY$ avec ici $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(X et Y sont bien autoadjointes) et un calcul simple montre que $XY \neq YX$, on voit donc d'après la question précédente que la matrice A n'est pas normale. On observe qu'une matrice symétrique n'est pas forcément normale si ses coefficients ne sont pas tous réels.

c) Cette fois, on trouve $X = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et

$$XY = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = YX$$

La matrice M est donc normale (une matrice symétrique à coefficients non tous réels peut donc être normale !).

3. a) Le calcul des coefficients diagonaux de la matrice M^*M conduit immédiatement à l'égalité $\Phi(M) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} |m_{i,j}|^2$. La propriété demandée en découle trivialement.

b) Soit A une matrice normale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et X une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. D'une part on a

$$\begin{aligned} \Phi(AX - XA) &= \mathrm{tr}((AX - XA)^* (AX - XA)) \\ &= \mathrm{tr}((X^*A^* - A^*X^*)(AX - XA)) \\ &= \mathrm{tr}(X^*A^*AX) - \mathrm{tr}(A^*X^*AX) - \mathrm{tr}(X^*A^*XA) + \mathrm{tr}(A^*X^*XA) \\ &= \mathrm{tr}(X^*A^*AX) - \mathrm{tr}(A^*X^*AX) - \mathrm{tr}(X^*A^*XA) + \mathrm{tr}(X^*XAA^*) \end{aligned}$$

Calculer $\Phi(A^*X - XA^*)$ revient à remplacer A par A^* (et donc A^* par $A^{**} = A$). Ainsi :

$\Phi(A^*X - XA^*) = \mathrm{tr}(X^*AA^*X) - \mathrm{tr}(X^*A^*XA) - \mathrm{tr}(A^*X^*AX) + \mathrm{tr}(X^*XA^*A)$.

Comme A est normale, on a $A^*A = AA^*$ et on voit que les deux quantités précédentes sont égales.

c) Si M commute avec une matrice normale A, avec la question précédente on voit que :

$$0 = \Phi(AM - MA) = \Phi(A^*M - MA^*)$$

et la question 3. a) implique alors que $A^*M = MA^*$.

Exercice 2.20.

Soit $n \in \mathbb{N}$, tel que $n \geq 2$, et g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ a tous ses coefficients égaux à 1.
On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On considère l'équation $(E) : M^2 + M = A$, d'inconnue $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ de matrice M dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

1. a) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de g. L'endomorphisme g est-il diagonalisable ?

b) Montrer que $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(g) \oplus \mathrm{Im}(g)$.

2. Dans cette question, on suppose $n = 2$.

a) Montrer que, si M est solution de (E), alors soit M, soit $M + I_2$ n'est pas inversible.

b) Dans cette question, on suppose M non inversible. Montrer que f et g ont même image et même noyau.
En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $M = \lambda A$.

c) Résoudre l'équation (E).

3. Dans le cas $n > 2$, montrer qu'il y a des solutions M de (E) telles que ni f ni $f + id$ n'ait même noyau et même image que g.

Solution

1. $\star$ $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Ker}\big(g - n\,id\big) = \mathrm{Vect}(u)$, où $u = (1, \dots, 1)$.

$\star$ $\mathrm{Ker}(g) = (\mathrm{Im}\, g)^\perp$ a pour équation $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$.

$\star$ g est diagonalisable car $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ ou parceque $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(g) \oplus \mathrm{Ker}(g - n\,id)$.

2. a) Si M et $M + I_2$ sont inversibles, alors $A = M\,(M + I_2)$ aussi, ce qui contredit $\mathrm{rg}(A) = 1$.

b) $\star$ $g = (f + id) \circ f \implies \{0\} \neq \mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$ de dim. 1, donc $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(g)$.

$\star$ $g = f \circ (f + id) \implies \mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Im}(f)$.
L'égalité des noyaux et une inclusion des images donne l'égalité par le théorème du rang.

$\star$ $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(g) = \mathrm{Vect}(u)$ qui est stable par f. Donc
$\exists\, \alpha \in \mathbb{R}, f(u) = \alpha\, u = \dfrac{\alpha}{2}\, g(u)$.
Alors $\lambda = \alpha/2$ convient sur $\mathrm{Im}(g)$, et aussi banalement sur $\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Ker}(f)$ (restrictions nulles), donc $f = \lambda\, g$ sur $\mathbb{R}^2$.

c) $\star$ Si M est non inversible, $M = \lambda\, A$ dans (E) donne, avec $A^2 = 2\, A$,
$\lambda^2\, A^2 + \lambda\, A = A \iff (2\lambda^2 + \lambda - 1)\, A = 0 \iff \lambda \in \big\{-1, 1/2\big\}$.

$\star$ Si $N = M + I_2$ est non inversible, on a $(N - I_2)\, N = A$, et le raisonnement précédent s'applique à N, donc on a $\exists\, \mu \in \mathbb{R}, N = \mu\, A$; alors (E) donne
$\mu^2\, A^2 - \mu\, A = A \iff (2\mu^2 - \mu - 1)\, A = 0 \iff \mu \in \big\{-1/2, 1\big\}$.
Après vérification,

$$\mathrm{Sol} = \{-A, \tfrac{1}{2}\, A, A - I_2, -\tfrac{1}{2}\, A - I_2\}$$

3. On a A semblable à $\mathrm{diag}(0, \dots, 0, n)$; via le même changement de base, les matrices suivantes conviennent :

$M = P\,\mathrm{diag}(0,\dots,0,-1,\lambda)P^{-1}$, où $\lambda^2+\lambda-n=0$, soit $\lambda = \dfrac{-1\pm\sqrt{4n+1}}{2}$.

Exercice 2.21.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. Soit E un espace euclidien de dimension n et $\|.\|$ la norme associée au produit scalaire noté $\langle .,. \rangle$.

Soit u un endomorphisme de E.

On note $S = \{x \in E / \|x\| = 1\}$ et $B = \{x \in E / \|x\| \leq 1\}$.

On admet que u est bornée sur S et on note $N(u) = \sup\limits_{\|x\|=1} \|u(x)\|$.

1. Montrer que u est bornée sur B et que $\sup\limits_{\|x\|\leq 1} \|u(x)\| = N(u)$.

2. Montrer que : $\forall\, x \in E, \|u(x)\| \leq N(u)\times\|x\|$.

3. Montrer que : $\sup\limits_{\|x\|=1} |\langle u(x), x\rangle| \leq N(u)$. L'inégalité peut-elle être stricte ?

4 Montrer que : $\sup\limits_{\|x\|=\|y\|=1} |\langle u(x), y\rangle| = N(u)$.

5. On suppose maintenant que u est symétrique.

   a) Exprimer $\langle u(x), y\rangle$ en fonction de $\langle u(x+y), x+y\rangle$ et de $\langle u(x-y), x-y\rangle$.

   b) En déduire que $\sup\limits_{\|x\|=1} |\langle u(x), x\rangle| = N(u)$.

Solution

1. Soit $x \in B$.
Si $x = 0$ alors $u(x) = 0$ et $\|u(x)\| = 0$.
Si $x \neq 0$ alors $\dfrac{x}{\|x\|} \in S$, donc $\|u(\dfrac{x}{\|x\|})\| \leq N(u)$, soit $\dfrac{1}{\|x\|}\|u(x)\| \leq N(u)$ et

$$\|u(x)\| \leq N(u)\times\|x\| \leq N(u) \text{ et : } \sup_{\|x\|\leq 1} \|u(x)\| \leq N(u).$$

Par ailleurs $S \subset B$ donc $\sup\limits_{x\in S} \|u(x)\| \leq \sup\limits_{x\in B} \|u(x)\|$, donc $N(u) \leq \sup\limits_{\|x\|\leq 1} \|u(x)\|$.
D'où l'égalité.

2. Ceci a quasiment été vu au cours de la première question :
$\forall\, x \neq 0, \dfrac{x}{\|x\|} \in S$, donc $\|u(\dfrac{x}{\|x\|})\| \leq N(u)$ soit $\|u(x)\| \leq N(u)\times\|x\|$. Vrai encore pour $x = 0$.

3. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$\forall x \in S, |\langle u(x), x\rangle| \leq \|u(x)\|\times\|x\| \leq N(u)\times\|x\|^2 = N(u)$$

Donc $\sup\limits_{\|x\|=1} |\langle u(x), x\rangle| \leq N(u)$.

Oui, l'inégalité peut être stricte (car $n \geqslant 2$!). Pour s'en convaincre il suffit de prendre un endomorphisme non nul tel que $u(x)$ soit toujours orthogonal à x : on choisit un endomorphisme non nul dont la matrice canoniquement associée est antisymétrique ...

4. Posons $M = \sup_{\|x\|=\|y\|=1} |\langle u(x), y\rangle|$

$\rightarrow$ Pour tout x et y de S, $|\langle u(x), y\rangle| \leq \|u(x)\| \times \|y\| \leq N(u) \times \|x\| \times \|y\| = N(u)$. Donc $M \leqslant N(u)$.

$\rightarrow$ Réciproquement, soit x dans S tel que $u(x) \neq 0$ (si ce n'est pas possible c'est que $u = 0$ et le résultat demandé est banal) et prenons $y = \dfrac{1}{\|u(x)\|}\, u(x)$. Alors y est aussi dans S et : $\langle u(x), y\rangle = \dfrac{1}{\|u(x)\|}\|u(x)\|^2 = \|u(x)\| \leqslant M$ et en passant à la borne supérieure : $N(u) \leq M$. D'où $N(u) = M$

5. On a :

$\langle u(x+y), x+y\rangle = \langle u(x)+u(y), x+y\rangle = \langle u(x), x\rangle + \langle u(y), y\rangle + 2\langle u(x), y\rangle$, car u est symétrique

Pour la même raison :

$\langle u(x-y), x-y\rangle = \langle u(x)-u(y), x-y\rangle = \langle u(x), x\rangle + \langle u(y), y\rangle - 2\langle u(x), y\rangle$

Par conséquent : $\langle u(x), y\rangle = \dfrac{1}{4}(\langle u(x+y), x+y\rangle - \langle u(x-y), x-y\rangle)$

b) $\star$ Evidemment $\sup_{\|z\|=1} |\langle u(z), z\rangle| \leqslant \sup_{\|x\|=\|y\|=1} |\langle u(x), y\rangle|$

$\star$ Si $z \neq 0$, $|\langle u(z), z\rangle| = \|z\|^2 \left|\langle u(\frac{z}{\|z\|}), \frac{z}{\|z\|}\rangle\right| \leqslant \|z\|^2 \sup_{\|x\|=1} |\langle u(x), x\rangle|$ (résultat qui reste vrai pour $z = 0$)

Alors, pour x et y de norme 1 :

$$\begin{aligned}
|\langle u(x), y\rangle| &\leq \frac{1}{4}(|\langle u(x+y), x+y\rangle| + |\langle u(x-y), x-y\rangle|) \\
&\leq \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2) \times \sup_{\|z\|=1} |\langle u(z), z\rangle| \\
&\leqslant \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2) \sup_{\|z\|=1} |\langle u(z), z\rangle| \leqslant \sup_{\|z\|=1} |\langle u(z), z\rangle|
\end{aligned}$$

En passant au sup à gauche, on a donc l'inégalité contraire souhaitée, ce qui montre l'égalité.

Exercice 2.22.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit H_1 et H_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{L}(E)$ tels que :

$$\forall\, (f, g) \in H_1 \times H_2, g \circ f = -f \circ g$$

1. a) Montrer qu'il existe un unique couple $(p_1, p_2) \in H_1 \times H_2$ tel que $p_2 = id_E - p_1$.

b) Montrer que p_1 et p_2 sont des projecteurs de E.

2. Soit $f \in H_2$.

a) Montrer que $\mathrm{Ker}(p_1)$ est stable par f.

b) Montrer que la restriction de f à $\mathrm{Im}(p_1)$ est l'application nulle.

c) En déduire que $\dim H_2 \leq (\dim \mathrm{Ker}\, p_1)^2$.

d) Montrer que l'on a également $\dim H_1 \leq (\dim \mathrm{Ker}\, p_2)^2$.

3. a) Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq p \leq n$. Résoudre l'inéquation $n^2 \leq (n-p)^2 + p^2$.

b) En déduire que $H_1 = \{0\}$ et $H_2 = \mathcal{L}(E)$, ou $H_1 = \mathcal{L}(E)$ et $H_2 = \{0\}$.

Solution

1. a) On a $id_E \in \mathcal{L}(E)$, donc comme H_1 et H_2 sont des sous-espaces supplémentaires de $\mathcal{L}(E)$:

$$\exists\,!(p_1, p_2) \in H_1 \times H_2, id_E = p_1 + p_2$$

b) Par propriété de H_1 et H_2 : $p_1 \circ p_2 = -p_2 \circ p_1$. C'est-à-dire : $p_1 \circ (id_E - p_1) = -(id - p_1) \circ p_1$, soit : $p_1 - p_1^2 = -p_1 + p_1^2$ ou encore $2p_1^2 = 2p_1$ et $p_1^2 = p_1$.

Ainsi p_1 est un projecteur de E.
On procède de même pour p_2 ou on remarque que p_2 est le projecteur conjugué du projecteur p_1.

2. a) Comme $p_1 \in H_1$ et $f \in H_2$, on a $p_1 \circ f = -f \circ p_1$.
Avec $x \in \mathrm{Ker}(p_1)$, il vient $p_1(f(x)) = -f(p_1(x)) = 0$ et $f(x) \in \mathrm{Ker}\, p_1$.

$$\mathrm{Ker}(p_1) \text{ est stable par } f$$

b) Soit $x \in \mathrm{Im}\, p_1$, on a $p_1(x) = x$ et $f(x) = f(p_1(x)) = -p_1(f(x))$, donc $f(x) = 0$ (sinon -1 serait valeur propre de p_1, ce qui n'est pas raisonnable pour un projecteur) :

$$f_{\mathrm{Im}(p_1)} = 0$$

c) Comme $\mathrm{Im}(p_1)$ et $\mathrm{Ker}(p_1)$ sont supplémentaires, f est parfaitement déterminée par le couple $(f_{\mathrm{Ker}(p_1)}, f_{\mathrm{Im}(p_1)})$, donc par l'endomorphisme de $\mathrm{Ker}(p_1)$ défini par la restriction de f à cet espace (on peut aussi voir cela de façon matricielle) :

$$\dim H_2 \leqslant \dim \mathcal{L}(\mathrm{Ker}\, p_1) = (\dim \mathrm{Ker}\, p_1)^2$$

d) En échangeant les rôles de H_1 et H_2, on a de même $\dim H_1 \leqslant (\dim \mathrm{Ker}\, p_2)^2$.

3. Notons r le rang de p_2.
Le rang de p_1 est alors $n-r$ et $\dim \operatorname{Ker} p_1 = r$, $\dim \operatorname{Ker} p_2 = n-r$
Ainsi : $\dim H_2 \leqslant r^2$, $\dim H_1 \leqslant (n-r)^2$.
Comme H_1 et H_2 sont supplémentaires dans $\mathcal{L}(E)$, on a donc :

$$n^2 = \dim H_1 + \dim H_2 \leqslant (n-r)^2 + r^2 = n^2 - 2r(n-r)$$

Soit : $r(n-r) \leqslant 0$ et ainsi $r(n-r) = 0$ et $r = 0$ ou $r = n$.

Si $r = 0$, on a donc $\dim H_2 \leqslant 0$, soit $H_2 = \{0\}$ et donc $H_1 = \mathcal{L}(E)$.

Si $r = n$, on a donc $\dim H_1 \leqslant 0$, soit $H_1 = \{0\}$ et $H_2 = \mathcal{L}(E)$.

3

PROBABILITÉS

Exercice 3.01.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n.

1. On effectue des tirages successifs et sans remise d'une boule de cette urne jusqu'à obtenir la boule numérotée n. On note X_1 le nombre de tirages ainsi effectués.
Déterminer la loi de X_1 et son espérance.

Les deux questions suivantes étudient deux prolongements possibles de l'expérience à l'issue de cette première série de tirages.

2. Après cette première série de tirages, on continue de sortir les boules de l'urne jusqu'à obtenir la boule de plus grand numéro parmi les numéros restants. On note X_2 le nombre de nouveaux tirages ainsi effectués (si à l'issue de la première série de tirages l'urne est vide, on décide que X_2 prend alors la valeur 0).

a) Déterminer la loi de X_2 et vérifier que $\sum_{j=0}^{n-1} P(X_2 = j) = 1$.

b) Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

c) Calculer l'espérance de X_2.

3. Après cette première série de tirages, s'il reste au moins une boule dans l'urne, on tire une boule au hasard et on note X_3 le numéro obtenu (si l'urne est vide on convient que X_3 prend la valeur 0).

a) Déterminer la loi du couple (X_1, X_3).

b) Déterminer la loi de X_3.

Solution

1. La variable X_1 prend ses valeurs dans $[\![1, n]\!]$ et, pour tout k de $[\![1, n]\!]$, on a :

$$P(X_1 = k) = \frac{\binom{n-1}{k-1}}{\binom{n}{k-1}} \times \frac{1}{n-k+1} = \frac{1}{n}$$

puisqu'il faut piocher $k-1$ boules autres que celle portant le numéro n pendant les $k-1$ premiers tirages, puis enfin piocher la boule numérotée n au $n^{\text{ème}}$ tirage. (on peut aussi dire qu'il y a $n!$ façons de vider l'urne et $(n-1)!$ façons d'avoir une boule donnée en position donnée)
Conclusion : la variable X_1 suit la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$ et on a : $E(X_1) = \frac{n+1}{2}$.

2. a) Pour tout k de $[\![1, n-1]\!]$, sachant que $(X_1 = k)$ est réalisé, la variable X_2 prend alors ses valeurs dans $[\![1, n-k]\!]$ puisqu'il ne reste que $n-k$ boules dans l'urne. De plus, le processus est le même que pour la variable X_1, mais avec une urne contenant au départ $n-k$ boules et on cherche toujours à obtenir celle qui porte le plus grand numéro. On a donc :

$$P_{(X_1=k)}(X_2 = j) = \frac{1}{n-k}, \text{ pour } 1 \leqslant j \leqslant n-k$$

La formule des probabilités totales associée au système complet d'événements $(X_1 = k)_{k \in [\![1,n]\!]}$ s'écrit :

$$\forall\, j \in [\![1, n-1]\!], P(X_2 = j) = \sum_{k=1}^{n} P(X_1 = k) P_{(X_1=k)}(X_2 = j)$$
$$= \sum_{k=1}^{n-j} P(X_1 = k) P_{(X_1=k)}(X_2 = j) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-j} \frac{1}{n-k}$$
$$\forall\, j \in [\![1, n-1]\!], P(X_2 = j) = \frac{1}{n} \sum_{k=j}^{n-1} \frac{1}{k}$$

Tandis que $P(X_2 = 0) = P(X_1 = n) = \frac{1}{n}$.
On a donc :

$$\sum_{j=0}^{n-1} P(X_2 = j) = \frac{1}{n}(1 + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=j}^{n-1} \frac{1}{k}) = \frac{1}{n}(1 + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{k}) = \frac{1}{n}(1 + \sum_{k-1}^{n-1} 1) = 1.$$

b) Les variables X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes puisque, par exemple, on a :

$$P((X_1 = 2) \cap (X_2 = n-1)) = 0 \neq P(X_1 = 2) P(X_2 = n-1)$$

c) X_2 est une variable finie donc elle possède une espérance et on a :

$$E(X_2) = \sum_{j=0}^{n-1} jP(X_2 = j) = \sum_{j=1}^{n-1} jP(X_2 = j) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=j}^{n-1}\frac{j}{k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{k}\frac{j}{k}$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k+1}{2} = \frac{1}{2n}\sum_{k=2}^{n} k = \frac{1}{2n}\Big(\frac{n(n+1)}{2} - 1\Big) = \frac{(n-1)(n+2)}{4n}$$

3. Soit j un entier de $[\![1, n-1]\!]$. En notant $A_{j,k-1}$ l'événement : « on n'a obtenu ni la boule numérotée j, ni la boule numérotée n lors des $k-1$ premiers tirages », ($A_{j,0}$ désignant l'événement certain), et en notant Z_k la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée au $k^{\text{ème}}$ tirage, on peut écrire :

$$(X_1 = k) \cap (X_3 = j) = A_{j,k-1} \cap (Z_k = n) \cap (X_3 = j)$$

On a $P(A_{j,k-1}) = \dfrac{\binom{n-2}{k-1}}{\binom{n}{k-1}} = \dfrac{(n-k)(n-k+1)}{n(n-1)}$ et, avec la formule des probabilités composées, on trouve :

$$P((X_1 = k) \cap (X_3 = j)) = \frac{(n-k)(n-k+1)}{n(n-1)} \times \frac{1}{n-k+1} \times \frac{1}{n-k} = \frac{1}{n(n-1)}$$

Le seul cas qui a échappé à cette écriture est le cas $(X_3 = 0)$ qui coincide avec $(X_1 = n)$ et

$$P((X_1 = n) \cap (X_3 = 0)) = P(X_1 = n) = P(X_3 = 0) = \frac{1}{n}$$

b) Par marginalité : pour tout j de $[\![1, n-1]\!]$, on a :

$P(X_3 = j) = \sum_{k=1}^{n-1} \dfrac{1}{n(n-1)} = \dfrac{1}{n}$, ce qui permet de retrouver $P(X_3 = 0) = \dfrac{1}{n}$.

$$X_1 \text{ et } X_3 \text{ ont même loi } \mathcal{U}([\![0, n-1]\!])$$

.

Exercice 3.02.

1. On admet que $\forall\, x \in [0,1[, \ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$.

Calculer pour $x \in [0,1[$, $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{n+1}}{n\,(n+1)}$.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes et suivant la même loi exponentielle de paramètre $\alpha > 0$.

2. Dans cette question, m désigne un entier naturel non nul fixé. Pour tout $\omega \in \Omega$, on range les nombres $X_0(\omega)$, $X_1(\omega)$, …, $X_m(\omega)$ par ordre *décroissant*, pour obtenir une nouvelle séquence notée $Y_0(\omega)$, $Y_1(\omega), \ldots, Y_m(\omega)$. Ainsi, on a en particulier :

$$Y_0 = \sup\{X_k, 0 \leqslant k \leqslant m\} \text{ et } Y_m = \inf\{X_k, 0 \leqslant k \leqslant m\}$$

a) Déterminer la fonction de répartition Φ_0 et une densité φ_0 de Y_0.

b) Déterminer la fonction de répartition Φ_m et une densité φ_m de Y_m.

3. Soit X et Y deux variables aléatoires à densité, définies sur l'espace probabilisé précédent, indépendantes de densités respectives f et g, de fonctions de répartition respectives F et G.

a) Déterminer une densité de $-Y$.

b) On admet que, si $h : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ est une fonction de deux variables, on a :

$$\int_0^{+\infty} \Big[\int_{-\infty}^{+\infty} h(x,t)\,dt\Big]\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \Big[\int_0^{+\infty} h(x,t)\,dx\Big]\,dt$$

sous réserve que toutes les intégrales écrites convergent.

Montrer que $P(Y \leqslant X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} G(x)\,f(x)\,dx$.

4. On considère la variable aléatoire N, à valeurs dans $\mathbb{N}$, définie par : $\forall\,\omega \in \Omega$,

$N(\omega) = \begin{cases} \text{le plus petit des indices } k \text{ tels que } X_k(\omega) > X_0(\omega), \text{ si ce nombre existe} \\ 0 \quad \text{, si ce nombre n'existe pas} \end{cases}$

a) Déterminer la loi de N et vérifier que $P(N=0) = 0$. La variable aléatoire N admet-elle une espérance ?

On définit la variable aléatoire X_N par : $\forall\,\omega \in \Omega, X_N(\omega) = X_{N(\omega)}(\omega)$

b) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $P_{(N=n)}(X_N \leqslant x)$.

c) Déterminer la fonction de répartition Ψ et une densité ψ de X_N.

d) Montrer que X_N admet une espérance et calculer sa valeur.

Solution

1. Avec $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$, il vient, toujours pour $x \in [0,1[$ (ce qui permet de casser les sommations)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

Ce qui donne : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = (1-x)\ln(1-x) + x$.

2. a) Par indépendance, puis par dérivation sur $\mathbb{R}_+$:

$\Phi_0(y) = \displaystyle\prod_{k=0}^{m} P(X_k \leqslant y) = \left(1 - \mathrm{e}^{-\alpha\,y}\right)^{m+1}$ et

$\varphi_0(y) = (m+1)\,\alpha\,\mathrm{e}^{-\alpha\,y}\left(1 - \mathrm{e}^{-\alpha\,y}\right)^m$

b) De même, sur $\mathbb{R}_+$,

$\Phi_m(y) = 1 - \prod_{k=0}^{m} P(X_k \geq y) = 1 - \mathrm{e}^{-\alpha\,(m+1)\,y}$ et

$\varphi_m(y) = (m+1)\,\alpha\,\mathrm{e}^{-\alpha\,(m+1)\,y}$

3. a) $\forall\, y, P(-Y \leqslant y) = P(Y \geq -y)$, donc $F_{-Y}(y) = 1 - F_Y(-y)$ et donc $f_{-Y}(y) = f_Y(-y)$.

b) Par convolution et indépendance,

$$P(Y \leqslant X) = P(X - Y \geq 0) = \int_0^{+\infty} f_{X-Y}(z)\,dz$$
$$= \int_0^{+\infty} \Big[\int_{-\infty}^{+\infty} f_{-Y}(z-x)\,f_X(x)\,dx\Big]dz$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \Big[\int_0^{+\infty} f_{-Y}(z-x)\,dz\Big]\,f_X(x)\,dx$$
$$P(Y \leqslant X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Big[\int_{-\infty}^{x} f_Y(y)\,dy\Big]\,f_X(x)\,dx$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} G(y)\,f(x)\,dx$$

4. a) $\star$ Avec les résultats précédents :

$$P\big(\bigcap_{k=1}^{n}(X_i \leqslant X_0)\big) = P(\sup(X_1,\ldots,X_n) \leqslant X_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_0(x) f_{X_0}(x)\,dx$$
$$= \int_0^{+\infty} \alpha \mathrm{e}^{-\alpha x}(1-\mathrm{e}^{-\alpha x})^n\,dx = \frac{1}{n+1}$$

Ainsi par disjonction de cas :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, P(N=n) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Par télescopage, $\sum_{n=1}^{\infty} P(N=n) = 1$ et $P(N=0) = 0$.

$\star$ On a $nP(N=n) = n \times \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n+1}$, terme général d'une série divergente et N n'a pas d'espérance.

b) Par indépendance, pour $x \geq 0$,

$$P_{(N=n)}(X_N \leqslant x) = P(\bigcap_{k=0}^{n}(X_k \leqslant x)) = (1-\mathrm{e}^{-\alpha\,x})^{n+1}.$$

c) D'après la formule des probabilités totales et 1., sur $\mathbb{R}_+$,

$\Psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\left(1-\mathrm{e}^{-\alpha\,x}\right)^{n+1}}{n\,(n+1)} = 1 - (1+\alpha\,x)\,\mathrm{e}^{-\alpha\,x}$, d'où $\psi(x) = \alpha^2\,x\,\mathrm{e}^{-\alpha\,x}$.

d) On a : $E(X_N) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (\alpha\, x)^2\, \mathrm{e}^{-\alpha\, x}\, dx = \frac{1}{\alpha} \int_0^{+\infty} u^2\, \mathrm{e}^{-u}\, du = \frac{\Gamma(3)}{\alpha} = \frac{2}{\alpha}$.

Exercice 3.03.

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

A toute suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dont les propriétés varieront en fonction des questions, on associe la suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies pour tout entier naturel non nul n par $Y_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} X_k$.

1. Dans cette question, $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Déterminer $Y_n(\Omega)$.

b) Déterminer la loi de Y_n.

c) Les variables aléatoires Y_n et Y_{n+1} sont-elles indépendantes ?

d) Montrer que la suite $(Y_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire Y dont on précisera la loi.

2. Dans cette question, $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi définie par $P(X_i = 1) = p \in]0,1[$ et $P(X_i = -1) = 1 - p$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Déterminer $Y_n(\Omega)$.

b) Déterminer l'espérance de Y_n.

c) Déterminer la loi de Y_n.

d) Les variables aléatoires Y_n et Y_{n+1} sont-elles indépendantes ?

e) Montrer que $(Y_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire Y dont on précisera la loi.

3. On note X_0 la variable aléatoire certaine égale à 1 et $(Z_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $X_n = Z_n X_{n-1}$ et on définit, comme précédemment, $Y_n = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} X_i$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Les variables aléatoires X_n et X_{n+1} sont-elles indépendantes ?

b) Déterminer les lois de X_n et de Y_n.

c) Montrer que la suite $(Y_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire Y dont on précisera la loi.

Solution

1. a) et b) $Y_n(\Omega) = \{0, 1\}$. D'après la définition de Y_n et l'indépendance des (X_i) :

$P(Y_n = 1) = P(\bigcap_{i=1}^{n}(X_i = 1)) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = 1) = p^n$: Y_n suit la loi de Bernoulli de paramètre p^n.

c) Comme $Y_{n+1} = X_{n+1}Y_n$, alors :

$P((Y_{n+1} = 1) \cap (Y_n = 0)) = 0 \neq p^{n+1}(1 - p^n) = P(Y_{n+1} = 1)P(Y_n = 0)$

Ainsi, Y_n et Y_{n+1} ne sont pas indépendantes.

d) D'après la question précédente, comme $p \neq 1$, $\lim_{n\to\infty} P(Y_n = 1) = 0$ et $\lim_{n\to\infty} P(Y_n = 0) = 1$. Ainsi, (Y_n) converge en loi vers une variable aléatoire Y presque sûrement égale à 0.

2. a) D'après la définition, $Y_n(\Omega) = \{-1, 1\}$.

b) D'après l'indépendance des (X_i), $E(Y_n) = \prod_{i=1}^{n} E(X_i) = (2p - 1)^n$.

c) Notons $p_n = P(Y_n = 1) = 1 - P(Y_n = -1)$. Alors, $E(Y_n) = 2p_n - 1$. Ainsi :

$$P(Y_n = 1) = 1 - P(Y_n = -1) = \frac{(2p - 1)^n + 1}{2}$$

d) Supposons Y_n et Y_{n+1} indépendantes.

Alors, par exemple : $P(Y_{n+1} = 1)P(Y_n = 1) = P((Y_{n+1} = 1) \cap (Y_n = 1))$, donc :

$P(Y_{n+1} = 1)P(Y_n = 1) = P((X_{n+1} = 1) \cap (Y_n = 1))$

$P(Y_{n+1} = 1)P(Y_n = 1) = P(X_{n+1} = 1)P(Y_n = 1)$

(la dernière égalité provient du fait que Y_n ne dépend que de $X_1, \ldots, X_n$)

Donc $P(Y_{n+1} = 1) = P(X_{n+1} = 1)$, soit $\frac{(2p - 1)^{n+1} + 1}{2} = p$

ou encore $(2p - 1)^{n+1} = 2p - 1$ et comme $(2p - 1)^n = 1$ n'est pas raisonnable, on a $p = \frac{1}{2}$.

Comme on sait que si A et B sont indépendants, alors il en est de même de $\overline{A}$ et B, de $\overline{A}$ et $\overline{B}$, ... si $p = \frac{1}{2}$ Y_n et Y_{n+1} sont indépendantes.

e) D'après les calculs précédents, $\lim_{m\to\infty} P(Y_m = 1) = \frac{1}{2}$. Ainsi, $(Y_m)_m$ converge en loi vers une variable aléatoire Y telle que $P(Y = 1) = P(Y = -1) = \frac{1}{2}$.

3. a) On remarque que $X_n = \prod_{i=1}^{n} Z_i$. Ainsi, d'après la question 1. c), les variables aléatoires X_n et X_{n+1} ne sont pas indépendantes.

b) D'après la question 1. b), X_n suit la loi de Bernoulli de paramètre p^n. De manière analogue, $Y_n(\Omega) = \{0, 1\}$ et, d'après l'indépendance des (Z_i), $P(Y_n = 1) = P(\forall\, i \in [\![1, n]\!], Z_i = 1) = p^n$.
Ainsi, Y_n suit aussi la loi de Bernoulli de paramètre p^n.

c) Comme à la question 1. d), on montre que (Y_n) converge en loi vers une variable aléatoire presque sûrement égale à 0.

Exercice 3.04.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-2x} & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Déterminer $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que λf soit une densité de probabilité.

Soit X une variable aléatoire de densité λf.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que $1 - X$ admet un moment d'ordre n, noté
$$M_n = E\big((1 - X)^n\big).$$
Calculer M_0 et M_1.

3. **a)** Étudier la monotonie de la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b) Montrer que la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
En déduire que : $\forall\, \varepsilon > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} P\big((1 - X)^n \geq \varepsilon\big) = 0$.

c) Trouver une relation entre M_{n+1} et M_n. En déduire la limite de nM_n quand n tend vers l'infini.

4. Pour tout $k \in \{0, 1, 2\}$, déterminer un polynôme P_k de degré au plus k tel que :
$$M_n = P_k\big(\tfrac{1}{n}\big) + o\big(\tfrac{1}{n^k}\big)$$
lorsque n tend vers l'infini.

Solution

1. Comme f est positive et continue sur $\mathbb{R} - \{0, 1\}$ il suffit que $\int_{\mathbb{R}} f = 1$.

Or : $\int_0^1 \mathrm{e}^{-2x}\, dx = \Big[\frac{e^{-2x}}{-2}\Big]_0^1 = \frac{1}{2}(1 - \mathrm{e}^{-2})$, donc $\lambda = \dfrac{2}{1 - \mathrm{e}^{-2}}$.

2. Les intégrales $M_n = \int_0^1 (1 - x)^n \lambda \mathrm{e}^{-2x}\, dx$ convergent puisqu'on intègre une fonction continue sur le segment $[0, 1]$; donc, par le théorème de transfert, les moments M_n existent.

On a $M_0 = E(1) = 1$ et par intégration par parties :

$$M_1 = \lambda\Big(\Big[(1-x)\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{-2}\Big]_0^1 - \int_0^1 -\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{-2}\,dx\Big) = \lambda(\frac{\mathrm{e}^{-2}}{4} + \frac{1}{4}).$$

3. a) Pour tout $x \in [0,1]$, on a $(1-x)^{n+1} \leqslant (1-x)^n$, donc par conservation des inégalités par intégration, lorsque les bornes sont dans l'ordre croissant : (M_n) décroît.

b) La suite est décroissante et clairement positive donc elle converge.

Pour tout $x \in [0,1]$ on a : $\mathrm{e}^{-2} \leqslant \mathrm{e}^{-2x} \leqslant 1$, donc en intégrant :

$$\lambda\frac{\mathrm{e}^{-2}}{n+1} \leqslant M_n \leqslant \lambda\frac{1}{n+1}$$

Donc, par théorème d'encadrement, on a : $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = 0$.

Comme $1 - X \geqslant 0$ l'inégalité de Markov donne :

$$P(|(1-X)^n - 0| \geqslant \epsilon) \leqslant \frac{M_n}{\epsilon} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc la suite $((1-X)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire certraine nulle.

c) Par intégration par parties :

$$M_{n+1} = \lambda\Big(\Big[(1-x)^{n+1}\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{-2}\Big]_0^1 - \int_0^1 -(n+1)(1-x)^n\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{-2}\,dx\Big) = \frac{\lambda - (n+1)M_n}{2}$$

Ainsi $nM_n = n\dfrac{\lambda - 2M_{n+1}}{n+1} \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{\lambda n}{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda$.

4. $\star$ On a : $M_n = 0 + o(1)$ donc $P_0 = 0$ convient.

$\star$ On vient de voir que $nM_n = \lambda + o(1)$, donc $M_n = \dfrac{\lambda}{n} + o(1/n)$, donc $P_1 = \lambda X$ convient.

$\star$ Comme $nM_n = (\lambda - 2M_{n+1}) \times \dfrac{n}{n+1}$ on a :

$$\begin{aligned} n(nM_n - \lambda) &= n\big(-\lambda\frac{1}{n+1} - 2M_{n+1}(\frac{n}{n+1})\big) \\ &= -\lambda\frac{n}{n+1} - \underbrace{2(n+1)M_{n+1}}_{\to 2\lambda}\big(\frac{n}{n+1}\big)^2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\lambda - 2\lambda = -3\lambda. \end{aligned}$$

Donc $M_n = \dfrac{\lambda}{n} - \dfrac{3\lambda}{n^2} + o(1/n^2)$, et $P_2 = \lambda X - 3\lambda X^2$ convient.

Exercice 3.05.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une urne U_n contenant n boules numérotées de 1 à n. On tire au hasard une boule de U_n.
Soit k le numéro de la boule tirée.
$\to$ Si $k = 1$, on arrête les tirages.

$\rightarrow$ Sinon, on retire de l'urne toutes les boules numérotées de k à n, et on effectue un nouveau tirage.

On répète ces tirages jusqu'à l'obtention de la boule numéro 1.

Soit X_n la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués jusqu'à l'obtention de la boule 1.

Soit Y_n la variable aléatoire égale à la somme des numéros tirés et I_n la variable aléatoire égale au numéro de la première boule tirée dans l'urne U_n.

1. a) Quelle est la loi de la variable aléatoire I_n ?

b) Quelle est la loi conditionnelle de la variable aléatoire X_n conditionnée par la réalisation de l'événement $(I_n = 1)$?

c) Pour tout $n \geq 2$, montrer que :
$\forall\, j \in \mathbb{N}^*, \forall\, k \in [\![2, n]\!], P_{(I_n=k)}(X_n = j) = P(X_{k-1} = j - 1)$.

2. a) Quelle est la loi de la variable aléatoire X_1 ?

b) Quelle est la loi de X_2 ? Calculer $E(X_2)$.

3. a) Déterminer $X_n(\Omega)$.

b) Calculer $P(X_n = 1)$ et $P(X_n = n)$.

c) Montrer que : $\forall\, n \geq 2, \forall\, j \geq 2, P(X_n = j) = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} P(X_k = j - 1)$.

d) Pour tout $n \geq 2$ et tout $j \geq 2$, calculer $nP(X_n = j) - (n-1)P(X_{n-1} = j)$.

En déduire que pour tout $n \geq 2$ et tout $j \geq 1$:
$$P(X_n = j) = \frac{n-1}{n} P(X_{n-1} = j) + \frac{1}{n} P(X_{n-1} = j - 1).$$

4. Montrer que : $\forall n \geq 2, E(X_n) = E(X_{n-1}) + \dfrac{1}{n}$. En déduire $E(X_n)$ ainsi qu'un équivalent simple de cette espérance quand n tend vers l'infini.

Solution

1. a) $I_n(\Omega) = [\![1, n]\!]$ et $\forall\, k \in [\![1, n]\!], P(I_n = k) = \dfrac{1}{n}$.

b) Quand $I_n = 1$ est réalisé, on réalise $(X_n = 1)$, soit : $P_{(I_n=1)}(X_n = 1) = 1$.

c) Si on réalise $(I_n = k)$, avec $k \geq 2$, il ne reste dans l'urne, pour continuer l'expérience, que les boules de numéros allant de 1 à $k - 1$. Obtenir alors 1 au $j$ème tirage, c'est obtenir la boule 1 en $j - 1$ tirages (après le premier !) mais avec une urne contenant « initialement » $(k - 1)$ boules. Donc
$$P_{(I_n=k)}(X_n = j) = P(X_{k-1} = j - 1)$$

2. a) On a : $X_1(\Omega) = \{1\}$ et $P(X_1 = 1) = 1$.

b) $\star$ $(X_2 = 1)$ = «on obtient la boule 1 au premier tirage avec une urne contenant initialement 2 boules». Donc $P(X_2 = 1) = P(I_2 = 1) = \frac{1}{2}$.

$\star$ Si on n'a pas la boule 1 au premier tirage (ce qui se produit avec la probabilité $\frac{1}{2}$), on a obtenu la boule 2, on la retire et il ne reste plus que la boule 1 et on conclut au coup suivant. Bref :

$$X_2(\Omega) = \{1; 2\} \text{ et } P(X_2 = 1) = P(X_2 = 2) = \frac{1}{2} \text{ et } E(X_2) = \frac{3}{2}$$

3. a) $X_n(\Omega) = \{1, \ldots, n\}$ (tous les cas sont possibles).

b) $\star$ $P(X_n = 1) = \dfrac{1}{n}$

$\star$ Réaliser $(X_n = n)$, c'est prendre son temps : au premier tirage on obtient la boule n que l'on ôte, au deuxième on obtient la boule $n-1$, que l'on ôte, and so on. Ainsi par la formule des probabilités composées :

$$P(X_n = n) = \frac{1}{n} \times \frac{1}{n-1} \times \cdots \times \frac{1}{1} = \frac{1}{n!}$$

c) $(I_n = k)_{k \in [\![1,n]\!]}$ forme un système complet d'événements. Donc, d'après la formule des probabilités totales et pour $j \geqslant 2$:

$$\begin{aligned} P(X_n = j) &= \sum_{k=1}^{n} P(I_n = k) P_{(I_n=k)}(X_n = j) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} P_{(I_n=k)}(X_n = j) = \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n} P(X_{k-1} = j-1) \\ &\qquad \text{(on a } P_{(I_n=1)}(X_n = j) = 0) \end{aligned}$$

Soit : $P(X_n = j) = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} P(X_k = j-1)$

d) Si $j \geq 2$, et $n \geq 3$ alors $n - 1 \geq 2$, et on peut utiliser le c) et :

$$\begin{aligned} nP(X_n = j) - (n-1)P(X_{n-1} = j) &= \sum_{k=1}^{n-1} P(X_k = j-1) - \sum_{k=1}^{n-2} P(X_k = j-1) \\ &= P(X_{n-1} = j-1) \end{aligned}$$

et donc :

$$P(X_n = j) = \frac{n-1}{n} P(X_{n-1} = j) + \frac{1}{n} P(X_{n-1} = j-1)$$

Compte tenu des calculs précédents, on vérifie sans problème que cette relation est encore vraie au rang $j = 1$ et également au rang $n = 2$.

4. Soit $n \geq 3$. On a $X_n(\Omega) = [\![1, n]\!]$.

$$\begin{aligned} E(X_n) &= \sum_{j=1}^{n} jP(X_n = j) = \sum_{j=1}^{n} j\left(\frac{n-1}{n} P(X_{n-1} = j)\right) + \frac{j}{n} P(X_{n-1} = j-1) \\ &= \frac{n-1}{n} \sum_{j=1}^{n} jP(X_{n-1} = j) + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} jP(X_{n-1} = j-1) \\ &= \frac{n-1}{n} E(X_{n-1}) + \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (j+1) P(X_{n-1} = j) \end{aligned}$$

$$E(X_n) = E(X_{n-1}) - \frac{1}{n}E(X_{n-1}) + \frac{1}{n}E(X_{n-1}) + \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} P(X_{n-1} = j)$$

$$= E(X_{n-1}) + \frac{1}{n}.$$

(Car $P(X_{n-1} = n) = P(X_{n-1} = 0) = 0$). Relation encore vraie pour $n = 2$.

On en déduit $E(X_n) = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} + E(X_1) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$; et on sait que $E(X_n) \sim \ln n$.

Exercice 3.06.

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de densité f continue sur $\mathbb{R}$, nulle sur $\mathbb{R}_-$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$.

On suppose également que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f^2(t)\,dt$ est convergente.

1. Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt$ converge. On pose alors :

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

2. Montrer que la fonction h vérifie les propriétés d'une densité.

3. Soit U une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ indépendante de X et suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$. On pose : $Y = XU$ et $Z = X - Y$.

a) Déterminer les lois respectives de $\ln X$ et de $\ln U$.

b) En déduire la loi de Y et celle de Z.

Solution

1. $\star$ La fonction $t \mapsto \frac{f(t)}{t}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\star$ Au voisinage de 0, comme la fonction f est nulle en 0, dérivable à droite en 0, on a $\lim\limits_{t\to 0} \frac{f(t)}{t} = f'(0)$ et l'intégrale est faussement impropre en sa borne inférieure.

$\star$ Avec $\frac{f(t)}{t} \leqslant \frac{1}{2}(f^2(t) + \frac{1}{t^2})$, l'hypothèse faite sur f et la règle de Riemann donnent la convergence de l'intégrale pour la borne infinie.

Ce qui montre l'existence de h.

2. La fonction f étant une densité continue, la fonction h est continue (même de classe C^1) sur $\mathbb{R}^+$, nulle sur $\mathbb{R}^-$ et positive.

Pour tout $A > 0$, une intégration par parties donne :

$$\int_0^A h(t)\,dt = \big[t.h(t)\big]_0^A - \int_0^A t.h'(t)dt = Ah(A) + \int_0^A f(t)\,dt$$

Or, $0 \leqslant A.h(A) = A\displaystyle\int_A^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt \leqslant \int_A^{+\infty} f(t)\,dt \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc

$\displaystyle\int_0^A h(t)\,dt \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ ce qui termine la question.

3. a) L'événement $(X \leqslant 0)$ étant quasi-impossible, on peut considérer que X prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, donc $(\ln X)(\Omega) = \mathbb{R}$ et classiquement, pour tout x réel

$$P(\ln X \leqslant x) = P(X \leqslant \mathrm{e}^x) = F_X(\mathrm{e}^x)$$

Par dérivation, on peut donc prendre : $f_{\ln X}(x) = \mathrm{e}^x f_X(\mathrm{e}^x)$.

De même, on peut considérer que U prend ses valeurs dans $]0,1]$, et $(\ln U)(\Omega) = \mathbb{R}_-$ et, pour $x < 0$, $P(\ln U \leqslant x) = P(U \leqslant \mathrm{e}^x) = F_U(\mathrm{e}^x) = \mathrm{e}^x$ et donc on peut prendre :

$$f_{\ln U}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geqslant 0 \\ \mathrm{e}^x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

b) XU prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et pour $x > 0$:

$[XU \leqslant x] = [\ln X + \ln U \leqslant \ln x]$. Donc $F_{XU}(x) = F_{\ln X + \ln U}(\ln x)$ et par dérivation :

$$f_{XU}(x) = \frac{1}{x} f_{\ln X + \ln U}(\ln x)$$

Par indépendance de X et U, donc de $\ln X$ et $\ln U$, il vient, pour tout $y \geqslant 0$ et par convolution :

$$\begin{aligned} f_{\ln X+\ln U}(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\ln X}(t) f_{\ln U}(y-t)dt = \int_y^{+\infty} \mathrm{e}^t f(\mathrm{e}^t)\mathrm{e}^{y-t}dt \\ &= \mathrm{e}^y \int_y^{+\infty} f(\mathrm{e}^t)dt \end{aligned}$$

et donc $f_{XU}(x) = \dfrac{1}{x}\,\mathrm{e}^{\ln x}\displaystyle\int_{\ln x}^{+\infty} f(\mathrm{e}^t)\,dt = \int_x^{+\infty} \frac{f(z)}{z}\,dz = h(x)$ (on a fait le changement de variable $z = \mathrm{e}^t$).

Pour montrer que $Z = X(1-U)$ suit la même loi que XU, il suffit de remarquer que $1-U$ suit aussi la loi uniforme sur $[0,1]$ et qu'elle est indépendante de X.

Exercice 3.07.

Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On y effectue une succession de tirages d'une boule selon le protocole suivant :

• si à un rang quelconque on obtient une boule blanche, on la remplace par une boule noire avant le tirage suivant ;

• si à un rang quelconque on tire une boule noire, on la remplace par une boule noire avec la probabilité p et on la remplace par une boule blanche avec la probabilité $q = 1 - p$ (on suppose que $0 < p < 1$) et on effectue alors le tirage suivant.

L'expérience est modélisée dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n la variable aléatoire représentant le nombre de boules noires contenues dans l'urne à l'issue du $n^{\text{ème}}$ tirage (c'est-à-dire juste avant le tirage de rang $n+1$).

1. Donner la loi de X_1.

2. **a)** Donner les valeurs prises par la variable aléatoire X_n.

b) Déterminer pour tout $j \in [\![0, 2]\!]$, la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant que $(X_n = j)$ est réalisé.

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \end{pmatrix}$.

a) Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_{n+1} = AU_n$.

b) Déterminer les éléments propres de A.

c) Déterminer la limite en loi de la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Solution

1. L'état initial de l'urne est 1 boule noire et 1 boule blanche. Aussi :

$\rightarrow$ réaliser $[X_1 = 0]$ c'est tirer la boule noire et la remplacer par une blanche. Ainsi $P(X_1 = 0) = \frac{1}{2} \times q$,

$\rightarrow$ réaliser $[X_1 = 1]$ c'est tirer la boule noire et la remplacer par une noire. Ainsi $P(X_1 = 1) = \frac{1}{2} \times p$,

$\rightarrow$ réaliser $[X_1 = 2]$ c'est tirer la boule blanche . Ainsi $P(X_1 = 2) = \frac{1}{2}$.

(la somme fait bien 1 !)

2. a) La variable aléatoire X_n est à valeurs dans $\{0, 1, 2\}$.

b) $\star$ Si $[X_n = 0]$ est réalisé, l'urne contient deux boules blanches juste avant le tirage de rang $n+1$. Donc :

$P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 0) = 0$, $P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 1) = 1$, $P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 2) = 0$

$\star$ Si $[X_n = 1]$ est réalisé, l'état de l'urne avant le tirage suivant est $\{B, N\}$. Ainsi :

$P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=0)=\frac{q}{2}$ (on tire la boule noire et on la remplace par une blanche).

$P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1)=\frac{p}{2}$ (on tire la boule noire qui est remplacée par une noire)

$P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=2)=\frac{1}{2}$ (on tire la boule blanche)

$\star$ Si $[X_n=2]$ est réalisé, l'urne contient deux boules noires juste avant le tirage suivant et on est sûr de tirer une boule noire, que l'on remplace par une boule noire ou une boule blanche. Ainsi

$P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=0)=0$.

$P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=1)=q$ (on tire une boule noire qui est remplacée par une blanche)

$P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=2)=p$ (on tire une boule noire qui est remplacée par une noire).

3. a) En utilisant la formule des probabilités totales, les résultats obtenus précédemment donnent sans problème :

$$A=\begin{pmatrix}0 & q/2 & 0\\ 1 & p/2 & q\\ 0 & 1/2 & p\end{pmatrix}$$

b) On obtient :

$\star$ 1 est valeur propre de A (on le savait) , le sous-espace propre associé est engendré par ${}^t(\,q^2 \quad 2q \quad 1\,)$;

$\star$ $-q$ est valeur propre de A, le sous-espace propre associé est engendré par ${}^t(\,1 \quad -2 \quad 1\,)$;

$\star$ $\frac{p}{2}$ est valeur propre de A, le sous-espace propre associé est engendré par ${}^t(\,-q \quad -p \quad 1\,)$

c) La matrice A est diagonalisable et semblable à la matrice $D=\mathrm{diag}(1,-q,\frac{p}{2})$ de matrice de passage diagonalisante $P=\begin{pmatrix}q^2 & 1 & -q\\ 2q & -2 & -p\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

On a : $U_n=A^nU_0=PD^nP^{-1}U_0 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} P\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}P^{-1}U_0$.

On trouve (sans calcul) : $\lim\limits_{n\to\infty}U_n=\dfrac{1}{(q+1)^2}\begin{pmatrix}q^2\\ 2q\\ 1\end{pmatrix}$

(ceci s'obtient bien sans calculs, car la formule prouve que la limite existe, on voit alors directement qu'elle est invariante par A, *i.e.* propre pour la valeur propre 1, et la somme de ses coefficients vaut 1)

Exercice 3.08.

1. Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et suivant la loi normale centrée réduite. Soit $Y = X^2$.

a) Montrer que Y est une variable aléatoire à densité dont on donnera une densité.

b) Montrer que Y admet une espérance et une variance et déterminer ces deux moments.

c) Quelle est la loi de $\frac{1}{2}Y$?

2. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Montrer que f est un projecteur orthogonal dont on précisera les éléments caractéristiques.

3. Un point M, extrémité d'un vecteur V, est placé de façon aléatoire dans l'espace $\mathbb{R}^3$ rapport., muni de sa structure euclidienne canonique (on note $\|.\|$ la norme).

On suppose que les coordonnées (X_1, X_2, X_3) du point M sont des variables aléatoires indépendantes qui suivent chacune la loi normale centrée réduite.

a) Déterminer la loi de la variable aléatoire $\frac{1}{2}\|V\|^2 = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{OM}\|^2$.

b) Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $x + y + z = 0$. On note D la variable aléatoire égale à la distance de M au plan $\mathcal{P}$. Montrer que D est une variable aléatoire à densité et en donner une densité.

c) Quelle est la distance moyenne du point M au plan $\mathcal{P}$?

Solution

1. a) On a $Y(\Omega) = [0, +\infty[$. Soit F_Y la fonction de répartition de Y. Cette fonction est nulle sur $\mathbb{R}_-^*$, et pour tout $x \geqslant 0$:

$$F_Y(x) = P(-\sqrt{x} \leqslant X \leqslant \sqrt{x}) = \Phi(\sqrt{x}) - \Phi(-\sqrt{x}) = 2\Phi(\sqrt{x}) - 1,$$

en notant Φ la fonction de répartition de $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.
On remarque que F_Y est continue sur $\mathbb{R}$ (notamment en 0) et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$. Y est ainsi une variable aléatoire à densité dont une densité est donnée par dérivation :

$$f_Y(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \mathrm{e}^{-x/2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

b) $E(Y) = E(X^2) = 1$ (variance de X) et $E(Y^2) = E(X^4) = 3$, d'où $V(Y) = 2$ (soit en faisant une intégration par parties dans l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^3 \times t\varphi(t)\, dt$, soit en revenant à l'intégrale de $t^2 f_Y(t)$ et à la fonction Γ, soit parce que l'on se souvient de la notion d'aplatissement (ou kurtosis) pour une loi normale !)

c) Soit $Z = \frac{1}{2}Y$ qui est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

Pour tout $z \geqslant 0$: $P(Z \leqslant z) = P(Y \leqslant 2z) = F_Y(2z)$.

Par dérivation, une densité sur $\mathbb{R}^+$ de Z est : $f_Z(z) = 2f_Y(2z) = \frac{1}{\sqrt{\pi z}} \mathrm{e}^{-z}$ et on reconnaît : Z suit la loi $\gamma(1/2)$.

2. On vérifie que $A^2 = A$. Ainsi, $f \circ f = f$ et f est un projecteur. Comme la matrice A est symétrique réelle f est un projecteur orthogonal.

On vérifie que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(1,1,1)$. On a alors :

$\mathrm{Im}(f) = (\mathrm{Ker}(f))^\perp = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x+y+z = 0\}$

$= \mathrm{Vect}((1,-1,0),(0,1,-1)\}$.

Ainsi, f est la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}((1,-1,0),(0,1,-1)\})$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(1,1,1)$.

3. a) Soit $V = \overrightarrow{OM} = (X_1, X_2, X_3)$. On a alors :

$\frac{1}{2}\|V\|^2 = \frac{1}{2}X_1^2 + \frac{1}{2}X_2^2 + \frac{1}{2}X_3^3 \hookrightarrow \gamma(3/2)$ (stabilité de la loi gamma).

b) Par définition : $D = d(V, \mathcal{P}) = \|f(V) - V\| = \|(id - f)(V)\|$.

Comme $(I_3 - A)V = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} X_1+X_2+X_3 \\ X_1+X_2+X_3 \\ X_1+X_2+X_3 \end{pmatrix}$, on a :

$D^2 = 3 \times \frac{1}{9}(X_1+X_2+X_3)^2 = \frac{1}{3}(X_1+X_2+X_3)^2$ et $D = \frac{1}{\sqrt{3}}|X_1+X_2+X_3|$.

On a donc $D(\Omega) = \mathbb{R}^+$. Soit F_D la fonction de répartition de D.

• Pour $x < 0$, $F_D(x) = 0$.

• Pour $x \geqslant 0$, par indépendance des X_i et stabilité , $X_1 + X_2 + X_3 \hookrightarrow \mathcal{N}(0,3)$ et

$\frac{1}{\sqrt{3}}(X_1 + X_2 + X_3) \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

Donc : $F_D(x) = P(-x \leqslant \frac{X_1+X_2+X_3}{\sqrt{3}} \leqslant x) = 2\Phi(x) - 1$

F_D est continue sur $\mathbb{R}$ (notamment en 0) et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$. Ainsi D est une variable aléatoire à densité dont une densité est donnée par :

$$f_D(t) = 2\varphi(t) \text{ si } t \geqslant 0 \text{ et } 0 \text{ sinon.}$$

c) La distance moyenne du point M au plan $\mathcal{P}$ est donnée par l'espérance de D. la convergence de l'intégrale est sans problème et :

$$\int_0^{+\infty} t f_D(t)\,dt = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t^2/2}\,dt = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \big[-\mathrm{e}^{-t^2/2} \big]_0^{\to+\infty} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

Exercice 3.09.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Soit X une variable aléatoire définie sur cet espace, discrète à valeurs strictement positives qui admet une espérance et une variance. L'image de X est notée $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$.

1. Soit $A \in \mathcal{A}$. On note $\mathbf{1}_A$ la variable aléatoire qui vaut 1 si $\omega \in A$ et 0 sinon.

a) Pour tout $x_n \in X(\Omega)$, comparer $P(\mathbf{1}_A \times X = x_n)$ et $P(X = x_n)$.

b) Montrer que la variable aléatoire $\mathbf{1}_A \times X$ admet une espérance.

On pose désormais : $P_X(A) = \dfrac{E(\mathbf{1}_A \times X)}{E(X)}$.

2. Dans cette question seulement, on suppose que X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Soit l'évènement $A = (X \in 2\mathbb{N})$. Calculer $P(A)$ et $P_X(A)$.

3. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements incompatibles. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $B_n = \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i$.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que : $\big(E(\mathbf{1}_{B_n} \times X)\big)^2 \leqslant E(X^2) \sum_{i=n}^{\infty} P(A_i)$.

b) En déduire que P_X est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Solution

1. a) Comme X est à valeurs strictement positives, tous les x_i sont non nuls donc :
$P(\mathbf{1}_A X = x_i) = P(A \cap (X = x_i))$. Or $A \cap (X = x_i) \subset (X = x_i)$. Par croissance de P on a donc : $P(\mathbf{1}_A X = x_i) \leqslant P(X = x_i)$.

b) Comme $(\mathbf{1}_A X)(\Omega) \subset \{0\} \cup X(\Omega)$, quitte à enlever un terme nul, il suffit de montrer la convergence absolue de la série $\sum_n x_n P(\mathbf{1}_A X = x_n)$.
Cette convergence découle du théorème de comparaison pour les séries car l'inégalité de la question précédente et la positivité des x_n donnent :

$$0 \leqslant x_n P(\mathbf{1}_A X = x_n) \leqslant x_n P(X = x_n),$$

et la série $\sum_n x_n P(X = x_n)$ converge puisque X a une espérance.

2. On a : $P(A) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X = 2k) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!}$.

De plus $E(X) = \lambda$ et comme $P(\mathbf{1}_A X = n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ impair} \\ P(X = n) & n \text{ pair} \end{cases}$,

par définition de l'espérance on a :

$$P_X(A) = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} (2k)\mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^{2k-1}}{(2k-1)!}.$$

D'après la formule de sommation de la série exponentielle, on remarque que :

$$P(A) + P_X(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = 1 \text{ et } P(A) - P_X(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{(-\lambda)^n}{n!} \mathrm{e}^{-2\lambda}$$

Donc $P(A) = \frac{1}{2}(1 + \mathrm{e}^{-2\lambda})$ et $P_X(A) = \frac{1}{2}(1 - \mathrm{e}^{-2\lambda})$.

3. a) Comme X admet un moment d'ordre2, et qu'il en est de même pour la fonction caractéristique $\mathbf{1}_{B_n}$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$\begin{aligned} E^2(X\mathbf{1}_{B_n}) &\leqslant E(X^2)E(\mathbf{1}_{B_n}^2) = E(X^2)E(\mathbf{1}_{B_n}) = E(X^2)P(B_n) \\ &\leqslant E(X^2) \sum_{i=n}^{\infty} P(A_i). \end{aligned}$$

b) $\star$ La positivité de P_X est claire car les variables aléatoires dont on prend les espérances sont positives.

$\star$ Comme $\mathbf{1}_\Omega X = X$, on a bien $P_X(\Omega) = 1$.

$\star$ Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements incompatibles. D'après les questions précédentes, on a :

$$\Big|\sum_{i=0}^{n} P_X(A_i) - P_X\big(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i\big)\Big| = \Big|\frac{1}{E(X)} E\big[X(\sum_{i=0}^{n} \mathbf{1}_{A_i} - \mathbf{1}_{B_0})\big]\Big| \text{ (définition de } P_X)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{E(X)} E(X\mathbf{1}_{B_{n+1}}) \\ &\leqslant \frac{1}{E(X)} \sqrt{E(X^2) \sum_{i=n+1}^{\infty} P(A_i)} \\ &\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

(le reste d'une série convergente tend toujours vers 0 !)

On en déduit que $\sum_{i=0}^{\infty} P_X(A_i) = P_X\big(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i\big)$ *i.e.* P_X est σ-additive donc additive.

Exercice 3.10.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$.
Une urne contient N boules numérotées de 1 à N et on extrait ces N boules une à une sans remise. Pour $i \in [\![1, N]\!]$, le numéro i est dit bien placé si ce numéro apparait lors du $i^{\text{ème}}$ tirage. On considère les événements :
⋆ B_i : « le numéro i est bien placé ».
⋆ $E_{N,k}$: « au cours de l'expérience exactement k numéros sont bien placés ».
L'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. Les événements B_1 et B_2 sont-ils indépendants ?

2. Pour $1 \leqslant j \leqslant N$ et $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_j \leqslant N$, calculer la probabilité de l'événement :

$$A_{i_1,i_2,\cdots,i_j} = \text{« les numéros } i_1, i_2 \cdots i_j \text{ sont tous bien placés »}$$

On admet que $\boldsymbol{P(E_{N,0}) = 1 - \sum_{j=1}^{N} (-1)^{j-1} \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_j \in [\![1,N]\!] \text{ tels que } 1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_j \leqslant N} P(A_{i_1,i_2,\cdots,i_j})}$

3. En déduire que $P(E_{N,0}) = \sum_{j=0}^{N} \frac{(-1)^j}{j!}$

4. Montrer la relation : $P(E_{N,k}) = \frac{1}{k!} P(E_{N-k,0})$.

5. Pour k fixé, montrer que la suite $(P(E_{N,k}))_{N \geq 0}$ est convergente. On note p_k sa limite. Montrer que la suite $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définit une probabilité sur $\mathbb{N}$ et reconnaitre la loi correspondante.

6. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $S_n = \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!}$. Montrer pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$S_{2p+1} \leqslant S_{2p+3} \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}} \leqslant S_{2p+2} \leqslant S_{2p}$$

En déduire, pour tout $n \in \{0, \cdots, N\}$:

$$\sum_{j=0}^{n} |P(E_{N,j}) - p_j| \leqslant \frac{\mathrm{e}}{(N+1-n)!}$$

Solution

1. $P(B_1) = P(B_2) = \frac{(N-1)!}{N!} = \frac{1}{N}$ et
$P(B_1 \cap B_2) = \frac{(N-2)!}{N!} = \frac{1}{N(N-1)} \neq \frac{1}{N^2}$: les événements B_1 et B_2 ne sont donc pas indépendants.

2. Soit $j \leqslant N$ et $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots i_j \leqslant N$, on a :

$P(A_{i_1,i_2,\ldots,i_j}) = P(B_{i_1} \cap \cdots B_{i_j}) = \dfrac{(N-j)!}{N!}$ (il reste à placer les autres !)

3. Si j est fixé, il y a $\binom{N}{j}$ façons de choisir les j éléments $i_1, \ldots, i_j$ de la formule admise et la probabilité précédente ne dépend que de j, mais pas des éléments choisis. Ainsi :

$$P(E_{N,0}) = 1 - \sum_{j=1}^{N} (-1)^{j-1} \binom{N}{j} \times \frac{(N-j)!}{N!} = 1 - \sum_{j=1}^{N} (-1)^{j-1} \frac{1}{j!} = \sum_{j=0}^{N} \frac{(-1)^j}{j!}$$

4. On a $\mathrm{Card}(E_{N,k}) = \binom{N}{k} \mathrm{Card}(E_{N-k,0})$ (on choisit les k éléments que l'on fixe et on « dérange » tous les $N-k$ autres). Donc :

$$\begin{aligned} P(E_{N,k}) &= \frac{\mathrm{Card}(E_{N,k})}{N!} = \binom{N}{k} \frac{\mathrm{Card}(E_{N-k,0})}{N!} \\ &= \binom{N}{k} \frac{(N-k)! P(E_{N-k}=0)}{N!} = \frac{1}{k!} P(E_{N-k,0}) \end{aligned}$$

5. $P(E_{N,k}) = \dfrac{1}{k!} \displaystyle\sum_{j=0}^{N-k} \frac{(-1)^j}{j!} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{k!} \mathrm{e}^{-1} = p_k.$

On reconnaît dans la famille $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la liste des probabilités afférentes à une loi de Poisson de paramètre 1.

6. On est en présence d'une série alternée dont le terme général décroît en valeur absolue et de somme 1/e. On a classiquement :

$$S_{2p+1} \leqslant S_{2p+3} \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}} \leqslant S_{2p+2} \leqslant S_{2p}$$

On a alors, si on note : $R_n = \dfrac{1}{\mathrm{e}} - S_n$: $|R_n| \leqslant |S_n - S_{n+1}| = \dfrac{1}{(n+1)!}$

D'où : $|P(E_{N,j}) - p_j| = |\dfrac{1}{j!}(\dfrac{1}{\mathrm{e}} - S_{N-j})| = |\dfrac{1}{j!} R_{N-j}| \leqslant \dfrac{1}{j!(N-j+1)!}$

et en sommant :

$$\sum_{j=0}^{n} |P(E_{N,j}) - p_j| \leqslant \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!(N-j+1)!} \leqslant \frac{1}{(N-n+1)!} \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} \leqslant \frac{\mathrm{e}}{(N-n+1)!}$$

Exercice 3.11.

1. Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \lambda\, \mathrm{e}^x \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{e}^x}$, avec $\lambda > 0$ fixé.

a) Prouver que f est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

b) Soit U une variable aléatoire à densité définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de densité f et $V = \exp(U)$. Déterminer la loi de V.

c) Soit T une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de loi uniforme sur $]0,1[$. Démontrer que la variable aléatoire $W = \ln\big(-\dfrac{\ln T}{\lambda}\big)$ a même loi que U.

2. Soient X , Y et Z trois variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mutuellement indépendantes, de même loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$. ($\lambda > 0$ fixé).

a) Rappeler les valeurs de l'espérance et de la variance de X.

b) La variable $X + Y$ peut-elle suivre une loi exponentielle ?

c) Soit $S = X + Y + Z$. Montrer que S admet une densité et déterminer une densité de S.

3. Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice relativement à cette base :

$$M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{pmatrix}, (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$$

on note $s = a + b + c$.

a) Déterminer $\mathrm{Ker}(u)$ et sa dimension.

b) A quelle condition sur (a, b, c) la matrice $M(a, b, c)$ est-elle celle d'un projecteur ?

c) Démontrer que si $s = 0$, alors $M(a, b, c)$ admet 0 pour seule valeur propre. Est-elle diagonalisable ?

d) Démontrer que si $s \neq 0$, $M(a, b, c)$ est diagonalisable.

4. Soient X , Y et Z trois variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mutuellement indépendantes, de même loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$.

a) Déterminer la probabilité que la matrice $M(X, Y, Z)$ ne soit pas diagonalisable (M est définie dans la question précédente).

b) Calculer la probabilité que $M(X, Y, Z)$ ait une valeur propre supérieure à 1.

Solution

1. a) La fonction f est continue, positive et par intégration « à vue » :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[-\mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{e}^x} \right]_a^b = \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{e}^a} - \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{e}^b}$$

Avec $\lim\limits_{x \to 0} \mathrm{e}^x = 1$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$, il vient : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge et vaut 1.
Ce qui prouve que f est bien une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$ et on obtient au passage :

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{e}^b}$$

b) La variable aléatoire $V = \exp(U)$ admet $\mathbb{R}_+^*$ pour support, soit F_V sa fonction de répartition. On a :

$$\forall\, v > 0, F_V(v) = P(V \leqslant v) = P(\exp(U) \leqslant v) = P(U \leqslant \ln v) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{e}^{\ln v}}$$
$$= 1 - \mathrm{e}^{-\lambda v}.$$

Ainsi V suit la loi exponentielle de paramètre λ.

c) Pour tout réel w, on a :

$$P(W \leqslant w) = P(\ln\big(-\frac{\ln T}{\lambda}\big) \leqslant w) = P(-\frac{\ln T}{\lambda} \leqslant \mathrm{e}^w) = P(\ln T \geq -\lambda \mathrm{e}^w)$$
$$= P(T \geq \mathrm{e}^{-\lambda e^w}) = 1 - e^{-\lambda e^w} \text{ (car } T \text{ suit la loi } \mathcal{U}_{]0,1[}).$$

Les deux variables aléatoires W et U ont même fonction de répartition, elles ont donc même loi.

2. a) Comme $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, on a : $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ et $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.

b) Par linéarité de l'espérance $E(X+Y) = \frac{2}{\lambda}$ et par indépendance de X et Y, on a $V(X+Y) = \frac{2}{\lambda^2}$. Si $X+Y$ suivait une loi exponentielle, son paramètre serait $\mu = \frac{\lambda}{2}$ car $E(X+Y) = \frac{2}{\lambda}$ et sa variance serait alors $\frac{4}{\lambda^2}$, ce qui n'est pas le cas, donc $X+Y$ ne suit pas une loi exponentielle.

c) La variable aléatoire λX suit la loi $\mathcal{E}(1)$, donc la loi $\gamma(1)$. Par stabilité des lois gamma, on sait que $\lambda(X+Y+Z)$ est une variable aléatoire à densité suivant la loi $\gamma(3)$. Une densité f_S de S est donc :

$$f_S(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \lambda^3 \frac{x^2}{2} \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

3. a) Si $(a,b,c) = (0,0,0)$ alors $\operatorname{Ker} u = \mathbb{R}^3$ et sinon $\operatorname{Ker} u$ est le plan d'équation $x+y+z=0$.

b) On a $[M(a,b,c)]^2 = (a+b+c)M(a,b,c)$, donc $M(a,b,c)$ est la matrice d'un projecteur si et seulement si $a+b+c=1$.

c) Si $s=0$, on a $M^2 = 0$ et 0 est la seule valeur propre possible de M. Comme M n'est pas inversible, 0 est effectivement valeur propre et M n'est diagonalisable que si $M=0$, donc si $a=b=c=0$.

d) Si $s \neq 0$, le vecteur $w=(a,b,c)$ est non nul et est vecteur propre de u associé à la valeur propre non nulle $s = a+b+c$, car $u(w) = sw$.

D'autre part, le plan d'équation $x+y+z=0$ est le sous-espace propre associé à la valeur propre 0, donc la somme des dimensions des sous-espaces propres est ad hoc et u (ou M) est diagonalisable.

4. a) $M(X,Y,Z)$ diagonalisable $\iff (X,Y,Z) = (0,0,0)$ ou $X+Y+Z \neq 0$. Or $P((X,Y,Z) = (0,0,0)) = 0$ et $P(X+Y+Z \neq 0) = 1$ puisque la variable $S = X+Y+Z$ est à densité continue donc ne charge pas les points. On en déduit que M est quasi-certainement diagonalisable.

b) La valeur propre non nulle de $M(X,Y,Z)$ est $S = X+Y+Z$ lorsque S est non nul.
La probabilité que cette valeur propre soit supérieure à 1 est $\displaystyle\int_1^{+\infty} \lambda^3 \frac{x^2}{2} \mathrm{e}^{-\lambda x} dx$
et à l'aide d'intégrations par parties successives, cette probabilité vaut :

$$\big(\frac{\lambda^2}{2} + \lambda + 1\big)\mathrm{e}^{-\lambda}$$

Exercice 3.12.

Toutes les variables aléatoires permettant de modéliser cet exercice sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dispose d'un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6.
Un joueur A lance le dé $6n$ fois. On dit qu'il gagne s'il obtient au moins n fois la face 6. Un joueur B lance le dé $6(n+1)$ fois. On dit qu'il gagne s'il obtient au moins $(n+1)$ fois la face 6.
Le but de l'exercice est de déterminer qui a le plus de chances de gagner.

On note X_n le nombre de fois où B obtient la face 6 au cours des $6n$ premiers lancers, Y le nombre de fois où il obtient la face 6 au cours des 6 derniers lancers et on pose $X_{n+1} = X_n + Y$.

1. Quelle est la loi de Y ?

2. Montrer que

$$P(X_{n+1} \geqslant n+1) = P(X_n \geqslant n) + \sum_{r=0}^{6} [P(X_n \geqslant n+1-r) - P(X_n \geqslant n)] P(Y = r).$$

3. a) Montrer que pour $k \in [\![0,4]\!]$, $P(X_n = n-k-1) \leqslant P(X_n = n-k)$.
   b) Montrer que $\forall\, r \in [\![0,6]\!]$,
   $P(X_n \geqslant n+1-r) - P(X_n \geqslant n) \leqslant (r-1) P(X_n = n)$

4. Conclure.

Solution

1. $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(6, 1/6)$.

2. On a :

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} \geqslant n+1) &= \sum_{r=0}^{6} P(Y=r) P_{(Y=r)}(X_{n+1} \geqslant n+1) \\ &= \sum_{r=0}^{6} P(Y=r) P(X_n \geqslant n+1-r) \end{aligned}$$

et on fait apparaître l'expression demandée :

$P(X_{n+1} \geqslant n+1)$

$$= \sum_{\boldsymbol{r}=0}^{6} P(Y=r)(P(X_{\boldsymbol{n}} \geqslant n+1-r) - P(X_{\boldsymbol{n}} \geqslant n)) + \sum_{\boldsymbol{r}=0}^{6} P(Y=r)P(X_{\boldsymbol{n}} \geqslant n)$$

$$= \sum_{r=0}^{6} P(Y=r)(P(X_n \geqslant n+1-r) - P(X_n \geqslant n)) + P(X_n \geqslant n)$$

3. a) $\star$ Si $n-k-1<0$, le résultat demandé est banal.

$\star$ Si $n-k-1 \geqslant 0$, a fortiori $n-k \geqslant 0$.

Or on a, pour $i \in [\![0, 6n]\!]$: $P(X_n = i) = \binom{6n}{i}\left(\frac{1}{6}\right)^i\left(\frac{5}{6}\right)^{6n-i}$,

Donc pour k compris entre 0 et 4 tel que $n-k-1 \geqslant 0$, il vient :

$$\frac{P(X_n = n-k)}{P(X_n = n-k-1)} = \frac{\binom{6n}{n-k}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-k}\left(\frac{5}{6}\right)^{5n+k}}{\binom{6n}{n-k-1}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-k-1}\left(\frac{5}{6}\right)^{5n+k+1}}$$

$$= \frac{(6n)!}{(n-k)!(5n+k)!} \times \frac{(n-k-1)!(5n+k+1)!}{(6n)!} \times \frac{1}{6} \times \frac{6}{5}$$

$$= \frac{5n+k+1}{5(n-k)} \geqslant 1$$

Ce qu'il fallait :

$$P(X_n = n-k-1) \leqslant P(X_n = n-k)$$

b) $\star$ Pour $r=0$: $P(X_n \geqslant n+1) - P(X_n \geqslant n) = -P(X_n = n)$.

$\star$ Pour $r=1$: $P(X_n \geqslant n) - P(X_n \geqslant n) = 0$.

$\star$ Pour $r=2$: $P(X_n \geqslant n-1) - P(X_n \geqslant n) = P(X_n = n-1) \leqslant P(X_n = n)$

Les inégalités demandées sont donc banales.

Pour $r \in [\![3, 6]\!]$, on écrit :

$$P(X_n \geqslant n+1-r) - P(X_n \geqslant n)$$

$$= P(X_n = n-1) + P(x_n = n-2) + \cdots + P(X_n = n+1-r)$$

et cette somme comporte $r-1$ termes tous majorés par $P(X_n = n-1)$ (par itération de l'inégalité vue en 3. a)), donc *a fortiori* par $P(X_n = n)$

Finalement, pour tout $r \in [\![0, 6]\!]$:

$$P(X_n \geqslant n+1-r) - P(X_n \geqslant n) \leqslant (r-1)P(X_n = n)$$

4. On a donc :

$$P(X_{\boldsymbol{n}+1} \geqslant n+1) - P(X_{\boldsymbol{n}} \geqslant n) = \sum_{\boldsymbol{r}=0}^{6} P(Y=r)(P(X_{\boldsymbol{n}} \geqslant n+1-r) - P(X_{\boldsymbol{n}} \geqslant n))$$

$$\leqslant \sum_{r=0}^{6} P(Y=r)(r-1)P(X_n = n) = P(X_n = n)E(Y-1)$$

Or $E(Y) = 1$ et donc $P(X_{n+1} \geqslant n+1) \leqslant P(X_n \geqslant n)$: c'est celui qui lance le moins de dés qui a le plus de chances de gagner.

Exercice 3.13.

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes, de même loi exponentielle de paramètre 1.

On définit la suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\geq 1}$ par $Y_1 = X_1$ et pour tout entier $n \geq 1$:

$$Y_{n+1} = Y_n + \frac{1}{n+1}X_{n+1}$$

1. Quelle est la loi de la variable aléatoire $\frac{1}{n}X_n$?

2. **a)** Déterminer une densité f_2 de Y_2.

   b) Les variables alétoires Y_n et $\frac{1}{n+1}X_{n+1}$ sont elles indépendantes ?

   c) Déterminer une densité de la variable aléatoire Y_n.

3. En déduire que Y_n et $Z_n = \sup(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ suivent la même loi.

4. Déterminer la limite en probabilité de la suite $\left(\frac{Y_n}{n}\right)_{n\geq 1}$.

Solution

1. La variable aléatoire $\frac{1}{n}X_n$ suit la loi exponentielle de paramètre n.

2. a) On pose $f_1(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et $g(x) = \begin{cases} 2\mathrm{e}^{-2x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$,

alors la variable aléatoire $Y_2 = Y_1 + \frac{1}{2}X_2 = X_1 + \frac{1}{2}X_2$ est une variable à densité, de densité notée h, avec pour $x \geq 0$:

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x-t)g(t)dt = \int_0^x \mathrm{e}^{-(x-t)}2\mathrm{e}^{-2t}dt = 2\mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-x})$$

Ainsi : $h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2\mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-x}) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

b) On a : $Y_n = \sum_{k=1}^{n-1}(Y_{k+1} - Y_k) + Y_1 = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}X_k$. Donc Y_n et $\frac{1}{n+1}X_{n+1}$ sont indépendants (lemme des coalitions).

c) On montre par récurrence que Y_n est de densité

$$h_n(x) = \begin{cases} n\mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-x})^{n-1} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

En effet :

→ La propriété est vraie aux rangs 0 et 1.

→ Si la propriété est vraie au rang n, alors comme $Y_{n+1} = \frac{1}{n+1}X_{n+1} + Y_n$, au rang suivant :
pour $x \geqslant 0$:

$$\begin{aligned} h_{n+1}(x) &= \int_0^x (n+1)\mathrm{e}^{-(n+1)(x-t)} n\mathrm{e}^{-t}(1-\mathrm{e}^{-t})^{n-1}\,dt \\ &= (n+1)\mathrm{e}^{-(n+1)x}\int_0^x n\mathrm{e}^{nt}(1-\mathrm{e}^{-t})^{n-1}\,dt \\ &= (n+1)\mathrm{e}^{-(n+1)x}\int_0^x n\mathrm{e}^{t}(\mathrm{e}^{t}-1)^{n-1}\,dt \\ &= (n+1)\mathrm{e}^{-(n+1)x}(\mathrm{e}^{x}-1)^n = (n+1)\mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-x})^n \end{aligned}$$

Ce qui montre que la propriété est héréditaire et on conclut par le principe de récurrence.

3. Déterminons la loi de Z_n.

Pour x réel : $P(Z_n \leqslant x) = P(\bigcap_{i=1}^{n}[X_i \leqslant x]) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leqslant x) = \big(F(x)\big)^n$

Une densité de Z_n s'obtient alors par dérivation et :

$$f_{Z_n}(x) = \begin{cases} n\mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-x})^{n-1} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

D'où le résultat.

4. On a $\frac{Y_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{X_k}{k}$. Ainsi :

$$E\big(\frac{Y_n}{n}\big) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \sim \frac{\ln n}{n} \text{ et } V\big(\frac{Y_n}{n}\big) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \sim \frac{C}{n^2}$$

(il est inutile de connaitre la valeur de C, mais on peut savoir qu'elle vaut $\pi^2/6$)

L'inégalité de Tchebicheff permet d'écrire, pour $\delta > 0$ donné :

$\lim_{n\to+\infty} P(|Y_n/n - E(Y_n/n)| > \delta) = 0$. De plus $\lim_{n\to+\infty} E(Y_n/n) = 0$.

Soit $\varepsilon > 0$ donné. Alors :

Il existe N_1 tel que pour $n \geq N_1$, $P(|Y_n/n - E(Y_n/n)| > \delta) < \varepsilon/2$ et il existe N_2 tel que pour $n \geq N_2$ $E(Y_n/n) < \varepsilon/2$.

Par l'inégalité triangulaire, on a l'inclusion :

$\{\omega \in \Omega/|Y_n/n - E(Y_n/n)| < \delta/2\} \cup \{\omega \in \Omega/|E(Y_n/n)| < \delta/2\} \subset \{\omega \in \Omega/|Y_n/n| < \delta\}$

on conclut en passant aux complémentaires que $\frac{Y_n}{n}$ tend en probabilité vers 0.

Exercice 3.14.

1. Étudier les variations de la fonction $\eta : x \mapsto -x \ln x$ sur $]0, 1/\mathrm{e}[$.

On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des variables aléatoires X à densité définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, admettant un moment d'ordre 2 et telles qu'une densité f de X soit continue strictement positive et vérifie : $x \mapsto x^2 f(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$. On pose, alors :

$$H(X) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \ln\big(f(x)\big)\, dx$$

2. Soit $X \in \mathcal{E}$. Montrer que $H(X)$ existe.

3. Soit $Y_{\mu,\sigma}$ une variable aléatoire de loi normale d'espérance μ et de variance σ^2. Soit $g_{\mu,\sigma}$ une densité de $Y_{\mu,\sigma}$.
Vérifier que $Y_{\mu,\sigma}$ appartient à $\mathcal{E}$ et calculer $H(Y_{\mu,\sigma})$.

4. Soit $X \in \mathcal{E}$ de densité f. Pour tous réels $\sigma > 0$ et $\mu > 0$, on pose

$$K_{\mu,\sigma}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \ln\big(\frac{f(x)}{g_{\mu,\sigma}(x)}\big)\, dx.$$

a) Montrer que cette quantité est bien définie.

b) Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, on a $-\ln a \geqslant 1 - a$; en déduire que $K_{\mu,\sigma}(X) \geqslant 0$.

c) En déduire que $H(X) \leqslant H(Y_{m,s})$, où $m = E(X)$ et $s^2 = V(X)$.

Solution

1. η est continue sur $]0, 1/\mathrm{e}]$, dérivable sur $]0, 1/\mathrm{e}[$, de dérivée $\eta'(x) = -\ln x - 1 > 0$, donc η est strictement croissante sur $]0, 1/\mathrm{e}]$ d'image $]0, 1/\mathrm{e}]$.

2. On pose $M = \sup_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|$. Pour $|x| \geqslant \sqrt{M}\mathrm{e}$, on a : $|f(x)| \leqslant \dfrac{M}{x^2} \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ et par la question précédente :

$$|f(x) \ln f(x)| \leqslant \frac{M}{x^2} \big|\ln\big(\frac{M}{x^2}\big)\big| \underset{(\pm\infty)}{=} o\big(\frac{1}{|x|^{3/2}}\big)$$

Ainsi l'intégrale de $f \ln f$ converge tant pour la borne $-\infty$ que pour la borne $+\infty$. Comme il n'y a pas de problème intermédiaire ($f \ln f$ est continue sur $\mathbb{R}$), on conclut à l'existence de $H(X)$.

3. On prend : $g_{\mu,\sigma}(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$.
On sait que $\lim_{|x|\to+\infty} x^p g_{\mu,\sigma}(x) = 0$ pour tout p. Puis connaissant l'intégrale d'une densité et l'intégrale définissant une variance, il vient :

$$H(Y_{\mu,\sigma}) = -\int_{-\infty}^{+\infty} g_{\mu,\sigma}(x)\big(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} - \ln\sigma\sqrt{2\pi}\big)dx = \frac{1}{2} + \ln\sigma\sqrt{2\pi}$$

4. a) On a : $f\ln\big(\frac{f}{g_{\mu,\sigma}}\big) = f\ln f - f\times\big(\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} - \ln(\sigma\sqrt{2\pi})\big)$, qui est donc combinaison de fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$.

b) On sait que $\ln(1+x) \leqslant x$, donc $-\ln a \geqslant 1-a$ et pour $a = \dfrac{g_{\mu,\sigma}(x)}{f(x)}$, il vient :

$$-f(x)\frac{g_{\mu,\sigma}(x)}{f(x)} \geqslant f(x) - g_{\mu,\sigma}(x)$$

En intégrant sur $\mathbb{R}$, on obtient :

$$K_{\mu,\sigma}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ln\big(\frac{f(x)}{g_{\sigma,\mu}(x)}\big)dx \geqslant \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx - \int_{-\infty}^{+\infty} g_{\mu,\sigma}(x)\,dx = 0$$

c) Pour $\mu = m$ et $\sigma = s$, il vient

$$H(X) \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\big(\frac{(x-m)^2}{2s^2} + \ln(s\sqrt{2\pi})\big)dx \leqslant \frac{1}{2} + \ln s\sqrt{2\pi} \leqslant H(Y_{m,s})$$

Exercice 3.15.

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$.

La roue d'une loterie est représentée par un disque de rayon 1, dont le centre O est pris pour origine d'un repère orthonormé. Cette roue est lancée dans le sens trigonométrique, l'angle (exprimé en radians) dont elle tourne avant de s'arrêter est une variable aléatoire, notée U. On suppose que U suit la loi exponentielle de paramètre a.

La roue porte une marque M, qui, au départ, est située au point de coordonnées $(1,0)$ et qui, après l'arrêt de la roue, se trouve au point de coordonnées aléatoires $X = \cos U$, $Y = \sin U$.

1. Soient $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-au}\cos u\,du$, $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-au}\sin u\,du$.

a) Montrer que les intégrales I et J sont convergentes.

b) A l'aide d'intégrations par parties, que l'on justifiera, établir deux relations liant I et J. En déduire les valeurs de I et J.

c) Calculer les espérances des variables aléatoires X et Y.

2. Un joueur gagne à cette loterie si, à l'arrêt de la roue, l'ordonnée de M vérifie la relation : $Y \geqslant \dfrac{1}{2}$.

a) Calculer la probabilité, notée $p(a)$, que le joueur gagne.

b) Déterminer $\lim_{a\to 0} p(a)$.

Solution

1. a) Montrons que les intégrales I et J sont absolument convergentes. On effet, on peut écrire :

$$|\cos u.\mathrm{e}^{-au}| \leqslant \mathrm{e}^{-au}, \quad |\sin u.\mathrm{e}^{-au}| \leqslant \mathrm{e}^{-au}$$

et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-au}\,du$ existe.

b) En utilisant $A > 0$ et des intégrations par parties sur $[0, A]$, intervalle où les fonctions sinus, cosinus et exponentielle sont de classe C^∞, il vient :

$$I(A) = \int_0^A \cos u.\mathrm{e}^{-au}\,du = \sin A.\mathrm{e}^{-aA} + a(1 - \cos A.\mathrm{e}^{-aA}) - a^2 I(A)$$

$$J(A) = \int_0^A \sin u.\mathrm{e}^{-au}\,du = -a\sin A.\mathrm{e}^{-aA} + 1 - \cos A.\mathrm{e}^{-aA} - a^2 J(A)$$

En prenant la limite lorsque A tend vers l'infini, les fonctions sin et cos étant bornées sur $\mathbb{R}$, il vient :

$$I = a - a^2 I, \qquad J = 1 - a^2 J$$

Donc

$$I = \frac{a}{1+a^2}, \qquad J = \frac{1}{1+a^2}$$

c) Par le théorème du transfert :

$$E(X) = E(\cos U) = \int_a^{+\infty} \cos u.a\mathrm{e}^{-au}\,du = aI = \frac{a^2}{1+a^2}$$

$$E(Y) = E(\sin U) = \int_a^{+\infty} \sin u.a\mathrm{e}^{-au}\,du = aJ = \frac{a}{1+a^2}$$

2. a) Le joueur gagne si et seulement si $\sin U \geqslant 1/2$ soit si et seulement si $U \in [\pi/6, 5\pi/6] \pmod{2\pi}$. Donc :

$$p(a) = \sum_{k=0}^{\infty} P\big(\tfrac{\pi}{6} + 2k\pi \leqslant U \leqslant \tfrac{5\pi}{6} + 2k\pi\big) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\pi/6+2k\pi}^{5\pi/6+2k\pi} a.\mathrm{e}^{-at}\,dt$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \big(\mathrm{e}^{(-\pi/6-2k\pi)a} - \mathrm{e}^{(-5\pi/6-2k\pi)a}\big) = \frac{\mathrm{e}^{-a\pi/6} - \mathrm{e}^{-a5\pi/6}}{1 - \mathrm{e}^{-2\pi a}}$$

$$= \mathrm{e}^{-a\pi/6}\,\frac{1 - \mathrm{e}^{-2a\pi/3}}{1 - \mathrm{e}^{-2\pi a}}$$

b) Lorsque $a \to 0$, comme $\mathrm{e}^{-ax} = 1 - ax + o(x)$ au voisinage de 0, il vient :

$$\lim_{a\to 0} p(a) = \frac{1}{3}$$

Exercice 3.16.

Soit $p \in]0,1[\setminus \{1/2\}$. On pose $q = 1-p$. On considère une pièce biaisée pour laquelle la probabilité d'obtenir Face est p et celle d'obtenir Pile est q. Lors d'une succession de lancers, une *excursion* est une séquence de lancers consécutifs qui renvoient le même résultat (et encadrée par deux lancers donnant le résultat contraire sauf pour la première et la dernière excursion).

Par exemple, dans la séquence « $FFFPPFPPFF$ » représentant les résultats successifs d'une série des 10 premiers lancers , il y a 5 excursions, la première « FFF » est de longueur 3, la deuxième « PP » est de longueur 2, la troisième « F » est de longueur 1, la quatrième « PP » de longueur 2 et enfin la dernière est de longueur 2.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note R_n le nombre aléatoire d'excursions présentes au cours des n premiers lancers.

Pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, on note I_j la variable aléatoire qui vaut 1 si le résultat du $(j+1)^{\text{ème}}$ lancer est différent de celui du $j^{\text{ème}}$ et qui vaut 0 sinon.

1. Exprimer R_n en fonction des variables aléatoires (I_j).

2. Déterminer l'espérance $E(R_n)$.

3. a) Calculer l'espérance de $I_1 I_2$.

b) Les variables aléatoires I_j et I_{j+1} sont-elles indépendantes ?

c) Donner une condition nécessaire et suffisante sur le couple $(j,\ell) \in (\mathbb{N}^*)^2$ pour que I_j et I_ℓ soient indépendantes.

4. Calculer la variance de R_n.

5. En déduire que la suite $\left(\frac{R_n - 1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers un réel à préciser.

Solution

1. En remarquant que le premier lancer détermine la nature de la première excursion, on obtient : $R_n = 1 + \sum_{j=1}^{n-1} I_j$.

2. Avec des notations évidentes et par incompatibilité et indépendance :

$$P(I_j = 1) = P(F_j P_{j+1} \cup P_j F_{j+1}) = 2pq$$

Donc $E(I_j) = 2pq$ et par linéarité de l'opérateur espérance :

$$E(R_n) = 1 + 2(n-1)pq$$

3. a) $I_1 I_2$ est le produit de deux variables de Bernoulli, donc est aussi une variable aléatoire de Bernoulli et :

$E(I_1I_2) = P(I_1I_2 = 1) = P((I_1 = 1) \cap I_2 = 1)) = P(P_1F_2P_3 \cup F_1P_2F_3)$
$= pqp + qpq$

$$E(I_1I_2) = pq(p+q) = pq$$

En fait, pour tout j, on a de même $E(I_jI_{j+1}) = pq$

b) D'autre part $E(I_j) = P(I_j = 1) = 2pq$.

Les variables de Bernoulli I_j et I_{j+1} sont indépendantes si et seulement si :

$$P((I_j = 1) \cap (I_{j+1} = 1)) = P(I_j = 1)P(I_{j+1} = 1)$$

Ce qui équivaut à $pq = (2pq)^2$ ou encore à $p \in \{0, 1/2, 1\}$, ce qui a été exclu par hypothèse.

$$I_j \text{ et } I_{j+1} \text{ ne sont pas indépendantes.}$$

c) Les variables aléatoires I_j et I_ℓ sont indépendantes si et seulement si $|j - \ell| \geqslant 2$.

En effet, la condition est nécessaire (question précédente) et elle est suffisante car I_j est fonction de X_j et de X_{j+1} et I_ℓ est fonction de X_ℓ et $X_{\ell+1}$, donc le résultat est une conséquence du lemme des coalitions.

4. En utilisant les questions précédentes et en regroupant les espérances clairement égales :

$E((R_n - 1)^2) = E((\sum_{i=1}^{n-1} I_j)^2)$

$= (n-1)E(I_1^2) + 2(n-2)E(I_1I_2) + ((n-1)^2 - (n-1) - 2(n-2))E(I_1I_3)$

$= (n-1)E(I_1) + 2(n-2)E(I_1I_2) + ((n-1)^2 - (n-1) - 2(n-2))E(I_1)E(I_3)$

$= 2(n-1)pq + 2(n-2)pq + [(n-1)^2 - (n-1) - 2(n-2)](2pq)^2$

$= 2(2n-3)pq + 4((n-1)^2 - 3n + 5)p^2q^2$

Ainsi :

$V(R_n) = V(R_n - 1) = 2(2n-3)pq + 4((n-1)^2 - 3n + 5)p^2q^2 - (2(n-1)pq)^2$

$$V(R_n) = 2(2n-3)pq - 4(3n-5)(pq)^2$$

6. On a $\dfrac{E[R_n - 1]}{n} = 2pq$. De plus, d'après l'inégalité de Tchebychev,

$$P\big(\big|\frac{R_n - 1}{n} - \frac{E[R_n - 1]}{n}\big| \geqslant \varepsilon\big) \leqslant \frac{V(R_n - 1)}{n^2\varepsilon} = \frac{V(R_n)}{n^2\varepsilon} \leqslant \frac{2(2n-3)pq}{n^2\varepsilon^2}$$

Ainsi, $\big(\dfrac{R_n - 1}{n}\big)_n$ converge en probabilité vers $2pq$.

Exercice 3.17.

1. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\,\mathrm{e}^{-x^2/2} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

est une densité de probabilité.

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de densité f.

On pose pour tout u réel, $\Psi(u) = E(\mathrm{e}^{-uX})$, où E désigne l'opérateur espérance.

2. **a)** Montrer que Ψ est bien définie sur $\mathbb{R}$, continue et dérivable sur cet intervalle. Calculer Ψ'.

b) Montrer que $\displaystyle\int_u^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2/2}\,dt \underset{(u\to+\infty)}{\sim} \frac{1}{u}\,\mathrm{e}^{-u^2/2}$.

c) Déterminer les variations de Ψ.

d) Déterminer $\displaystyle\lim_{u\to+\infty} \Psi(u)$ et $\displaystyle\lim_{u\to-\infty} \Psi(u)$.

e) L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \Psi(u)\,du$ est-elle convergente ?

3. Soit $Y = \mathrm{e}^{-X}$. Montrer que Y est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Donner une densité de Y.

Solution

1. La fonction f est positive, continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2/2}dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\times\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2/2}dx = 1$$

2. a) L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ux}\mathrm{e}^{-x^2/2}dx$ est convergente pour tout réel u, car $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2\mathrm{e}^{-ux}\mathrm{e}^{-x^2/2} = 0$. On peut donc appliquer le théorème de transfert et :

$$\begin{aligned} E(\mathrm{e}^{-uX}) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ux-x^2/2}dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\mathrm{e}^{u^2/2}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(x+u)^2/2}dx \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\mathrm{e}^{u^2/2}\int_u^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2/2}dx \end{aligned}$$

La fonction Ψ est bien définie sur $\mathbb{R}$, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions continues et dérivables et :

$$\Psi'(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\Big(u\mathrm{e}^{u^2/2}\int_u^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2/2}dx - 1\Big)$$

b) Pour $u > 0$, on utilise une intégration par parties :

$$\int_u^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2/2}dt = \int_u^{+\infty} te^{-t^2/2}\times\frac{1}{t}\,dt = \frac{\mathrm{e}^{-u^2/2}}{u} - \int_u^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t^2/2}}{t^2}dt$$

et :

$$\int_u^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t^2/2}}{t^2}dt \leqslant \frac{1}{u^2}\int_u^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2/2}dt = o\Big(\int_u^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2/2}dt\Big)$$

Ainsi :

$$\int_u^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2/2}dt \underset{(u\to+\infty)}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{-u^2/2}}{u}$$

c) Pour $u < 0$, on a $\Psi'(u) < 0$ et pour $u > 0$, la question précédente donne :

$$u\mathrm{e}^{u^2/2}\int_u^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2/2}dx - 1 = -u\mathrm{e}^{u^2/2}\int_u^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t^2/2}}{t^2} < 0$$

Ainsi la fonction Ψ est-elle décroissante sur $\mathbb{R}$.

d) Par la question b), au voisinage de $+\infty$, $\Psi(u)$ a un équivalent de la forme $\dfrac{C}{u}$ et $\lim\limits_{u\to+\infty} \Psi(u) = 0$.

Au voisinage de $-\infty$, $\Psi(u)$ a un équivalent de la forme $C\mathrm{e}^{u^2/2}$, donc $\lim\limits_{-\infty} \Psi = +\infty$.

e) L'équivalent trouvé en d) montre que l'intégrale proposée est divergente.

3. Y est une variable aléatoire comme fonction continue d'une variable aléatoire X. On a $Y(\Omega) =]1, +\infty[$ et pour $x \geqslant 1$

$$P(Y \leqslant x) = P(\mathrm{e}^{-X} \leqslant x) = P(X \geqslant -\ln(x)) = 1 - F_X(-\ln x)$$

Une densité de Y est donc : $f_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 1 \\ \dfrac{1}{x} f_X(-\ln x) & \text{si } x > 1 \end{cases}$

$$f_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 1 \\ \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{1}{x}\mathrm{e}^{-\ln^2(x)/2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Exercice 3.18.

On dispose de n variables aléatoires indépendantes ($n \geqslant 2$), notées $X_1, \ldots, X_n$ de même loi de Poisson de paramètre θ inconnu ($\theta \in]0, +\infty[$) et définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On souhaite estimer $\exp(-\theta)$.

On définit pour tout i élément de $[\![1, n]\!]$ la variable aléatoire Y_i par :

$$Y_i(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } X_i(\omega) = 0 \\ 0 & \text{si } X_i(\omega) \neq 0 \end{cases}$$

On pose $\overline{Y_n} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i$.

1. a) Pour tout i élément de $[\![1, n]\!]$, donner la loi de Y_i.

b) Quelle est la loi de $n\overline{Y_n}$? Que vaut l'espérance $E(\overline{Y_n})$?

c) Calculer la variance $V(\overline{Y_n})$. Conclusion ?

2. Pour tout k élément de $[\![1,n]\!]$, on pose $S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$.

a) Pour tout k élément de $[\![1,n]\!]$, rappeler la loi de S_k.

Pour tout entier naturel j, on pose $\varphi(j) = P_{(S_n=j)}(X_1 = 0)$.

b) Montrer que pour tout entier naturel j, on a : $\varphi(j) = \big(1 - \frac{1}{n}\big)^j$.

On peut ainsi définir l'estimateur : $\varphi(S_n) = \big(1 - \frac{1}{n}\big)^{S_n}$.

c) Montrer que $\varphi(S_n)$ admet une espérance et que $E(\varphi(S_n)) = \exp(-\theta)$.

d) Montrer que $\varphi(S_n)$ admet une variance et que
$V(\varphi(S_n)) = \exp(-2\theta)\big(\exp\big(\frac{\theta}{n}\big) - 1\big)$.

Conclusion ?

3. On souhaite ici comparer les « performances » de $\overline{Y_n}$ et $\varphi(S_n)$ en tant qu'estimateurs de $\exp(-\theta)$.

a) On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\exp\big(\frac{\theta}{n}\big) \leqslant \frac{\exp(\theta)}{n} + \frac{n-1}{n}$.
Montrer l'inégalité : $V(\varphi(S_n)) \leqslant V(\overline{Y_n})$.

b) Comparer les risques quadratiques de $\overline{Y_n}$ et $\varphi(S_n)$.

Solution

1. a) Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, Y_i suit une loi de Bernoulli, et on a
$$P(Y_i = 1) = P(X_i = 0) = \exp(-\theta).$$
Donc $Y_i \hookrightarrow \mathcal{B}(\mathrm{e}^{-\theta})$.

b) Comme les X_i sont des variables aléatoires indépendantes, il en est de même des variables aléatoires Y_i, et donc, d'après le cours, on en déduit que
$$n\overline{Y}_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \mathrm{e}^{-\theta}).$$
Ainsi, $E\big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i\big) = \exp(-\theta)$.

c) $V(\overline{Y_n}) = \frac{1}{n^2} V(\sum_{i=1}^{n} Y_i) = \frac{1}{n^2} n\mathrm{e}^{-\theta}(1 - \mathrm{e}^{-\theta}) = \frac{1}{n}\mathrm{e}^{-\theta}(1 - \mathrm{e}^{-\theta})$.

2. a) S_k est une somme de variables aléatoires de Poisson, indépendantes, donc suit aussi une loi de Poisson, de paramètre $k\theta$.

b) Pour tout j entier naturel, on a :
$$\varphi(j) = P_{(S_n=j)}(X_1 = 0) = \frac{P\left((S_n = j) \cap (X_1 = 0)\right)}{P(S_n = j)}$$
Or, $(S_n = j) \cap (X_1 = 0) = (X_1 = 0) \cap \big(\sum_{i=2}^{n} X_i = j\big)$.

Seulement, comme X_1 est indépendant de $\sum_{i=2}^{n} X_i$, qui suit d'ailleurs une loi de Poisson, $\mathcal{P}((n-1)\theta)$, on obtient :

$$P((S_n = j) \cap (X_1 = 0)) = P(X_1 = 0) \times P\Big(\sum_{i=2}^{n} X_i = j\Big)$$
$$= \mathrm{e}^{-\theta} \frac{\mathrm{e}^{-(n-1)\theta}\big((n-1)\theta\big)^j}{j!}.$$

Ainsi, on a bien $\varphi(j) = \big(1 - \frac{1}{n}\big)^j$.

c) D'après le théorème de transfert, $\varphi(S_n)$ a une espérance si et seulement si la série $\sum_{j\geq 0} \big(1 - \frac{1}{n}\big)^j P(S_n = j)$ converge absolument.

Or

$$\sum_{j=0}^{\infty} \big(1 - \frac{1}{n}\big)^j P(S_n = j) = \sum_{j=0}^{\infty} P\big((S_n = j) \cap (X_1 = 0)\big) = P(X_1 = 0)$$
$$= \exp(-\theta).$$

Dopnc : $E(\varphi(S_n)) = \mathrm{e}^{-\theta}$.

d) De même, $\varphi(S_n)^2$ a une espérance si $\sum_{j\geq 0} \big((1 - \frac{1}{n})^j\big)^2 P(S_n = j)$ converge. Ce qui est bien le cas encore une fois, puisque pour $N \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{j=0}^{N} \big(1 - \frac{1}{n}\big)^{2j} \frac{\mathrm{e}^{-n\theta}}{j!} (n\theta)^j = \mathrm{e}^{-n\theta} \sum_{j=0}^{N} \Big[\big(1 - \frac{1}{n}\big)^2 n\theta\Big]^j \frac{1}{j!} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \exp\big(\big(-2 + \frac{1}{n}\big)\theta\big).$$

Donc, $\varphi(S_n)$ admet une variance, qui vaut :

$$V(\varphi(S_n)) = E(\varphi(S_n)^2) - E(\varphi(S_n))^2 = \exp(-2\theta)\big[\exp\big(\tfrac{1}{n}\theta\big) - 1\big]$$

3. a) De $\exp\big(\frac{\theta}{n}\big) \leqslant \frac{\exp(\theta)}{n} + \frac{n-1}{n}$, on déduit :

$$V(\varphi(S_n)) - V(\overline{Y_n}) = \exp(-2\theta)\big[\exp\big(\tfrac{1}{n}\theta\big) - 1 - \frac{\exp(\theta)}{n} + \frac{1}{n}\big] \leqslant 0$$

Donc, on obtient $V(\varphi(S_n)) \leqslant V(\overline{Y_n})$.

b) Puisque $\varphi(S_n)$ et $\overline{Y_n}$ sont sans biais, on en déduit que le risque quadratique est égal à la variance, et donc que le risque quadratique de $\overline{Y_n}$ est plus grand que celui de $\varphi(S_n)$.

Exercice 3.19.

Les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Soit λ et μ deux réels strictement positifs.
Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes, X suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et Y suivant une loi exponentielle de paramètre $\mu > 0$.

On définit les variables aléatoires I et Z par : $I = \inf(X, Y)$ et $Z = |X - Y|$.

1. Reconnaître la loi de I.

2. Montrer que $X - Y$ est une variable aléatoire à densité, dont on déterminera une densité. En déduire que Z est une variable aléatoire à densité et en donner une densité.

3. Montrer que Z admet une espérance et calculer $E(Z)$.

4. Montrer que $E(IZ) - E(I)E(Z) = 0$ (on pourra considérer $S = \sup(X, Y)$ et on remarquera que $Z = S - I$).

Solution

1. Soit x réel, $P(I \leqslant x) = 1 - P(I > x) = 1 - P((X > x) \cap (Y > x))$.

X et Y étant indépendantes, on a : $P(I \leqslant x) = 1 - P(X > x)P(Y > x)$.

On note F_I la fonction de répartition de I.

$\rightarrow \forall x < 0, F_I(x) = 0$.
$\rightarrow \forall x \geq 0, F_I(x) = 1 - (1 - (1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}))(1 - (1 - \mathrm{e}^{-\mu x})) = 1 - \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)x}$.

Ainsi I suit la loi exponentielle de paramètre $(\lambda + \mu)$.

2. X et Y sont indépendantes donc X et $-Y$ aussi. Une densité de X est bornée sur $\mathbb{R}$ donc (produit de convolution), $X - Y$ est une variable aléatoire à densité dont une densité f_{X-Y} est définie par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, f_{X-Y}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x - t) f_{-Y}(t)\, dt$$

où f_X et f_{-Y} sont des densités respectives de X et $-Y$. Comme il est facile de voir que $t \mapsto f_Y(-t)$ est une densité de $-Y$, il vient :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, f_{X-Y}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x - t) f_Y(-t)\, dt$$

$\rightarrow$ On suppose $x < 0$.

$$f_{X-Y}(x) = \int_{-\infty}^{x} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda(x-t)} \mu \mathrm{e}^{\mu t}\, dt = \lambda\mu \mathrm{e}^{-\lambda x} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{(\mu+\lambda)t}\, dt = \frac{\lambda\mu}{\lambda + \mu} \mathrm{e}^{\mu x}$$

$\rightarrow$ On suppose $x \geq 0$.

$$f_{X-Y}(x) = \int_{-\infty}^{0} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda(x-t)} \mu \mathrm{e}^{\mu t}\, dt = \lambda\mu \mathrm{e}^{-\lambda x} \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{(\mu+\lambda)t}\, dt = \frac{\lambda\mu}{\lambda + \mu} \mathrm{e}^{-\lambda x}$$

F_Z désignant la fonction de répartition de Z, il vient :

$\rightarrow \forall\, x < 0, F_Z(x) = 0$
$\rightarrow \forall\, x \geq 0, F_Z(x) = P(-x \leqslant X - Y \leqslant x) = F_{X-Y}(x) - F_{X-Y}(-x)$

(F_{X-Y} désignant la fonction de répartition de $X - Y$)

Comme f_{X-Y} est continue sur $\mathbb{R}$, F_{X-Y} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et F_Z est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
Enfin :

$$\forall\, x > 0, f_Z(x) = f_{X-Y}(x) + f_{X-Y}(-x) = \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}(\mathrm{e}^{-\lambda x} + \mathrm{e}^{-\mu x})$$

et bien entendu on prend $\forall\, x \leqslant 0, f_Z(x) = 0$.

3. Comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-\lambda x}\,dx$ est convergente de valeur $\frac{1}{\lambda^2}$ (soit en intégrant par parties, soit en revenant à l'espérance d'une variable suivant une loi exponentielle), on en déduit que Z admet une espérance, avec :

$$E(Z) = \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}(\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\mu^2})$$

4. On a : $S + I = X + Y$, on remarque que $Z = S - I$ et $XY = IS$, d'où par indépendance de X et Y :

$$\begin{aligned} E(IZ) &= E(IS - I^2) = E(XY) - E(I^2) = E(X)E(Y) - E(I^2) \\ &= E(X)E(Y) - V(I) - E(I)^2. \end{aligned}$$

Soit : $E(IZ) = \frac{1}{\lambda}\times\frac{1}{\mu} - \frac{1}{(\lambda+\mu)^2} - \frac{1}{(\lambda+\mu)^2} = \frac{\lambda^2+\mu^2}{\lambda\mu(\lambda+\mu)^2}$

et comme $E(I) = \frac{1}{\lambda+\mu}$ et $E(Z) = \frac{\lambda^2+\mu^2}{\lambda\mu(\lambda+\mu)}$, il vient $\mathrm{Cov}(I, Z) = 0$.

Exercice 3.20.

On considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ indépendantes et suivant toutes la loi exponentielle de paramètre 1.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

1. Donner la loi de Y_n et préciser son espérance.

2. a) Pour tout réel strictement positif λ, calculer $\varphi(\lambda) = \ln\big(E(\mathrm{e}^{-\lambda(Y_n - E(Y_n))})\big)$.

   b) Montrer que $\forall\,\lambda > 0$, $\varphi(\lambda) \leqslant \frac{n}{2}\lambda^2$.

3. a) Etablir que pour tout réel λ strictement positif et tout réel x strictement positif, on a :

$$P(E(Y_n) - Y_n \geq x) \leqslant \mathrm{e}^{-\lambda x + \varphi(\lambda)}$$

   b) Montrer que $\forall\, x > 0, P\big(E(Y_n) - Y_n \geq x\big) \leqslant \mathrm{e}^{-x^2/2n}$.

4. On considère la commande `scilab` suivante : `n=input('entrez la valeur de n :')`
Ecrire une commande `scilab` à la suite de celle-ci, qui permet de simuler la variable aléatoire Y_n.

Solution

1. Comme la loi exponentielle est la loi $\gamma(1)$, alors, par stabilité de la loi gamma, on sait que Y_n suit la loi $\gamma(n)$ et on a : $E(Y_n) = n$.

2. a) Tout d'abord, on a : $\mathrm{e}^{-\lambda(t-n)}\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{e}^{-t} = \mathrm{e}^{\lambda n}\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{e}^{-(1+\lambda)t}$.

On sait, par croissances comparées ($1+\lambda > 0$) que $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{t^{n+1}}{(n-1)!}\mathrm{e}^{-(1+\lambda)t} = 0$, ce qui prouve que :

$$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{e}^{-(1+\lambda)t} \underset{(t\to+\infty)}{=} o(1/t^2)$$

On en déduit, par la règle de Riemann que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{e}^{-(1+\lambda)t}\,dt$ converge, et par suite, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{e}^{-(1+\lambda)t}\,dt$ est aussi convergente.

Par conséquent, $E(\mathrm{e}^{-\lambda(Y_n-E(Y_n))})$ existe et par le théorème de transfert, on a :

$$E(\mathrm{e}^{-\lambda(Y_n-E(Y_n))}) = \mathrm{e}^{\lambda n}\int_0^{+\infty}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{e}^{-(1+\lambda)t}\,dt$$

Le changement de variable $u = (1+\lambda)t$ donne :

$$E(\mathrm{e}^{-\lambda(Y_n-E(Y_n))}) = \frac{\mathrm{e}^{\lambda n}}{(1+\lambda)^n}\int_0^{+\infty}\frac{u^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{e}^{-u}\,du = \frac{\mathrm{e}^{\lambda n}}{(1+\lambda)^n}$$

Dès lors, on a : $\varphi(\lambda) = \lambda n - n\ln(1+\lambda)$.

b) On pose $h(\lambda) = \varphi(\lambda) - \dfrac{n\lambda^2}{2} = \lambda n - n\ln(1+\lambda) - \dfrac{n\lambda^2}{2}$. La fonction h est dérivable et on a :

$$\forall\,\lambda > 0, h'(\lambda) = n - \frac{n}{1+\lambda} - \lambda n = -\frac{\lambda^2 n}{1+\lambda} < 0$$

Par conséquent h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et comme $h(0) = 0$, on conclut que h est négative, ce qui signifie :

$$\forall\,\lambda > 0, \varphi(\lambda) \leqslant \frac{n\lambda^2}{2}$$

3. a) Comme λ est strictement positif, on a :

$$P(E(Y_n) - Y_n \geqslant x) = P(-\lambda(Y_n - E(Y_n)) \geqslant \lambda x)$$

Comme de plus, la fonction exponentielle est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}_+^*$, on obtient :

$$P(E(Y_n) - Y_n \geqslant x) = P(\mathrm{e}^{\lambda(E(Y_n)-Y_n)} \geqslant \mathrm{e}^{\lambda x})$$

En appliquant alors l'inégalité vue à la première question, on déduit :
$$P(E(Y_n) - Y_n \geqslant x) \leqslant \mathrm{e}^{-\lambda x} E(\mathrm{e}^{\lambda(E(Y_n)-Y_n)})$$
D'après la définition de φ, on a : $P(E(Y_n) - Y_n \geqslant x) \leqslant \mathrm{e}^{-\lambda x+\varphi(\lambda)}$.

En utilisant la question 3. b), on en déduit : $P(E(Y_n) - Y_n \geqslant x) \leqslant \mathrm{e}^{-\lambda x+\frac{n\lambda^2}{2}}$

b) En choisissant $\lambda = \dfrac{x}{n}$ qui est bien strictement positif, on trouve finalement :
$$P(E(Y_n) - Y_n \geqslant x) \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2n}}$$

4. On peut proposer : `y=sum(grand(1,n,'exp',1))`

Exercice 3.21.

On lance indéfiniment une pièce de monnaie pour laquelle la probabilité d'obtenir Pile est $p \in]0,1[$ et celle d'obtenir Face est $q = 1 - p$. Pour $r \in \mathbb{N}^*$, on note X le rang d'apparition du $r^{\text{ème}}$ Pile et Y le nombre de Face obtenues avant l'obtention du $r^{\text{ème}}$ Pile.

1. a) Déterminer la loi de X.

b) Montrer que X admet une espérance et la calculer.

c) Montrer que X admet une variance et la calculer.

2. a) Déterminer la loi de Y. On dit que Y suit la loi $BN(r,p)$.

b) Montrer que Y admet une espérance et une variance que l'on calculera.

3. Calculer $\displaystyle\int_0^x t^{k-1}\,dt$. En déduire que :
$$\forall\, x \in [0,1[,\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$$

4. On suppose que Y suit la loi $BN(2,p)$. Soit $Z = \dfrac{1}{Y+2}$.
Prouver l'existence de l'espérance de Z et calculer sa valeur.

5. On suppose que Y suit la loi $BN(1,p)$. Soit Z une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de Z sachant que $(Y = n)$ est réalisé, est la loi uniforme sur $[\![0,n]\!]$. Montrer que Z admet une espérance et la calculer.

Solution

1. a) On a $X(\Omega) = [\![r,+\infty[\![$. Pour tout $k \geqslant r$, $[X = k]$ est réalisé si et seulement si, au cours des $(k-1)$ premiers lancers, on a obtenu $(r-1)$ piles et on a obtenu le $r^{\text{ème}}$ pile lors du $k^{\text{ème}}$ lancer.

Si l'on note T la variable aléatoire comptant le nombre de piles au cours des $(k-1)$ premiers lancers, alors $T \hookrightarrow \mathcal{B}(k-1,p)$.
Comme les lancers sont indépendants, on en déduit que

$$P(X=k) = P(T=r-1)p = \binom{k-1}{r-1}p^{r-1}q^{k-r}p = \binom{k-1}{r-1}p^r q^{k-r}$$

b) On peut écrire X comme la somme de r variables aléatoires indépendantes X_i suivant chacune une loi géométrique de paramètre p, X_i mesurant le temps d'attente du $i^{\text{ème}}$ pile suite à l'apparition du précédent. On calcule alors $E(X)$ par linéarité de l'espérance : $E(X) = \sum_{i=1}^{r} E(X_i) = r \times \frac{1}{p}$.

[Variante : X admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{k=r}^{\infty} k\binom{k-1}{r-1}p^r q^{k-r}$ est absolument convergente.
Or, $k\binom{k-1}{r-1} = r\binom{k}{r}$. En reconnaissant une série géométrique dérivée convergente, on a donc :

$$\sum_{k=r}^{\infty} k\binom{k-1}{r-1}p^r q^{k-r} = rp^r \sum_{k=r}^{\infty}\binom{k}{r}q^{k-r} = \frac{rp^r}{(1-q)^{r+1}} = \frac{r}{p}]$$

c) De même : $V(X) = \sum_{i=1}^{r} V(X_i) = \frac{rq}{p^2}$. [On pourrait aussi passer par $E(X(X+1))$ en faisant encore apparaître une série géométrique dérivée, mais le calcul est alors plutôt long]

2. a) On constate que $Y = X - r$. D'où, $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$:
$P(Y=k) = P(X=k+r) = \binom{k+r-1}{r-1}p^r q^k$.

b) Comme $Y = X - r$, $E(Y) = E(X-r) = E(X) - r = \frac{rq}{p}$ et

$$V(Y) = V(X-r) = V(X) = \frac{rq}{p^2}.$$

3. Soit $x \in [0,1[$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $\int_0^x t^{k-1}dt = \frac{x^k}{k}$, on a, par linéarité de l'intégration :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k} = \sum_{k=1}^{n}\int_0^x t^{k-1}dt = \int_0^x \sum_{k=1}^{n} t^{k-1}dt = \int_0^x \frac{1-t^n}{1-t}dt$$
$$= -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt$$

Or, pour tout $x \in [0,1[$, $|\int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt| \leqslant \frac{1}{1-x}\int_0^x t^n dt = \frac{1}{1-x}\,\frac{x^{n+1}}{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
En faisant tendre n vers $+\infty$ dans la formule précédente, on en déduit que

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k} = -\ln(1-x).$$

4. D'après la formule de transfert pour l'espérance, Z admet une espérance si et seulement si la série $\sum \frac{1}{k+2}P(Y=k)$ converge absolument.

Or, $\frac{1}{k+2}P(Y=k) = \frac{k+1}{k+2}p^2q^k = p^2q^k - \frac{p^2q^k}{k+2}$.

En utilisant la formule trouvée à la question précédente, on obtient

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+2}P(Y=k) = p^2 \sum_{k=0}^{\infty} q^k - \frac{p^2}{q^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{q^{k+2}}{k+2} = p^2\frac{1}{1-q} - \frac{p^2}{q^2}\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{q^k}{k} - q\Big)$$

D'où : $E(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+2}P(Y=k) = p + \frac{p^2}{q^2}\ln(p) + \frac{p^2}{q} = \frac{p}{q} + \frac{p^2}{q^2}\ln(p)$.

5. On a $Y(\Omega) = \mathbb{N}$. De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(Y=k) = pq^k$. Par hypothèse, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $E(Z \mid Y=n) = \frac{n}{2}$.

On applique alors la formule de l'espérance totale avec le système complet d'événements de probabilités non nulles $([Y=n])_{n\in\mathbb{N}}$.

Ainsi, Z admet une espérance si et seulement si la série $\sum_n E(Z \mid Y=n)P(Y=n)$ est absolument convergente.

Or, $\sum_{n=0}^{\infty} E(Z \mid Y=n)P(Y=n) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{2}P(Y=n) = \frac{E(Y)}{2} = \frac{q}{2p}$.

Ainsi, Z admet une espérance qui vaut $E(Z) = \frac{q}{2p}$.

5

QUESTIONS COURTES

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, Id l'endomorphisme identité, a et b deux réels distincts et f un endomorphisme de E tel que

$$\big(f - aId\big)^2 \circ \big(f - bId\big) \neq 0 \text{ et} \big(f - aId\big)^3 \circ \big(f - bId\big) = 0$$

L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Soit X une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, dont la variance σ^2 existe et est non nulle. On suppose que X est symétrique, c'est-à-dire que X et $-X$ ont même loi de probabilité.

1. Calculer l'espérance de X.

2. On définit les variables U, V, et Y par les conditions

$$U(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } X(\omega) \geq 0 \\ 0 & \text{si } X(\omega) < 0 \end{cases} \quad V(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } X(\omega) \leqslant 0 \\ 0 & \text{si } X(\omega) > 0 \end{cases} \quad \text{et } Y = U - V.$$

a) Montrer que la variable Y est symétrique.

b) On suppose que $P(X = 0) = 0$ et on note $|X|$ la valeur absolue de X. Montrer que les variables Y et $|X|$ sont indépendantes.

Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un échantillon de variables aléatoires indépendantes de même loi avec $E(X_1) = \mu$ et $V(X_1) = \sigma^2$. On dispose de deux estimateurs de μ :

$$T_1(X_1, \ldots, X_n) = \frac{X_1 + X_2}{2} \quad \text{et} \quad T_2(X_1, \ldots, X_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{X_1 - X_2}{2}.$$

Quel est le meilleur de ces deux estimateurs ?

Soit $a \in]-1, 1[$.

1. Pour tout $x > 0$, montrer l'existence de : $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{x+n}$.

2. Montrer que : $\lim_{x \to +\infty} xS(x) = \frac{1}{1-a}$.

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $(X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$.

1. Montrer que $AX = 0$ si et seulement si ${}^tAAX = 0$.

2. En déduire que $\text{rg}(A) = \text{rg}({}^tA)$.

Vous rentrez en voiture, et cherchez une place de parking en faisant le tour du quartier ; au n-ième tour, vous avez une probabilité de $\frac{n}{n+1}$ de trouver une place. On note X la variable aléatoire égale au(x) nombre(s) de tours nécessaires pour se garer.
Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(X > n)$. En déduire le nombre moyen de tours nécessaires pour vous garer.

Déterminer tous les polynômes P à coefficients réels vérifiant
$(X + 3)P(X) = XP(X + 1)$.

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tAA = A{}^tA$.
On suppose que A est nilpotente, *i.e.* qu'il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0$
Montrer que $A = 0$.

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ et que $P(Y = 1) = p, P(Y = -1) = 1 - p$, où $p \in]0, 1[$.

1. On pose $Z = XY$. Déterminer la loi de Z.

2. On suppose que $p \neq \frac{1}{2}$. Les variables X et Z sont-elles indépendantes ?

Soit $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n^2}$, n^2 matrices symétriques réelles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que la famille $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n^2}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si la matrice $G \in \mathcal{M}_{n^2}(\mathbb{R})$ de terme général $(\text{tr}(A_iA_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n^2}$ est inversible.
