1

ANALYSE

Exercice 1.01.

Pour tout réel x, on pose $\varphi(x) = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln t}{1+x^2t^2}\,dt$.

1. Montrer que φ est ainsi bien définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs strictement positives et paire.

2. a) Prouver que pour tout $(x_0, x) \in \mathbb{R}^2$,

$$\big|\varphi(x) - \varphi(x_0)\big| \leqslant \big|x^2 - x_0^2\big| \int_1^{\mathrm{e}} t^2 \ln t\,dt$$

   b) En déduire la continuité de φ sur $\mathbb{R}$.

3. a) Prouver que φ est dérivable en 0 et calculer $\varphi'(0)$.

   b) Démontrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

4. Étudier la monotonie de φ sur $\mathbb{R}^+$.

5. a) Calculer $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln t}{t^2}\,dt$.

   b) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2\varphi(x)$.

Solution

1. La fonction $t \mapsto \dfrac{\ln t}{1+x^2t^2}$ est continue et positive sur $[1, \mathrm{e}]$ pour tout x réel. Ainsi φ est-elle définie sur $\mathbb{R}$ et positive sur $\mathbb{R}$ puisque $1 < \mathrm{e}$. Elle est de manière évidente paire.

2. a) Pour tout x_0 et tout x, on a :

$$\varphi(x)-\varphi(x_0)=\int_1^{\mathrm{e}}\ln(t)\Big(\frac{1}{x^2t^2+1}-\frac{1}{x_0^2t^2+1}\Big)dt$$

$$\varphi(x)-\varphi(x_0)=\int_1^{\mathrm{e}}\frac{\ln(t)(x_0^2-x^2)t^2}{(x^2t^2+1)(x_0^2t^2+1)}dt$$

Comme $t\in[1,\mathrm{e}]$ et $(x^2t^2+1)(x_0^2t^2+1)\geqslant 1$, on déduit :

$$\big|\varphi(x)-\varphi(x_0)\big|=\Big|\int_1^{\mathrm{e}}\frac{(x_0^2-x^2)\ln(t)t^2}{(x^2t^2+1)(x_0^2t^2+1)}\,dt\Big|\leqslant\int_1^{\mathrm{e}}\frac{\big|x_0^2-x^2\big|\ln(t)t^2}{(x^2t^2+1)(x_0^2t^2+1)}\,dt$$

$$\leqslant\big|x^2-x_0^2\big|\int_1^{\mathrm{e}}\ln(t)t^2\,dt$$

D'où : $\forall\,(x_0,x)\in\mathbb{R}^2$: $\big|\varphi(x)-\varphi(x_0)\big|\leqslant\big|x^2-x_0^2\big|\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}}t^2.\ln t\,dt\quad(1)$

b) Par encadrement on déduit que pour tout x_0 : $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)-\varphi(x_0)=0$, ce qui prouve que φ est continue en tout x_0 de $\mathbb{R}$ donc sur $\mathbb{R}$.

3. a) D'après l'inégalité (1), avec $x_0=0$, on a pour tout $x\in\mathbb{R}^*$:

$$\big|\varphi(x)-\varphi(0)\big|\leqslant\big|x^2\big|\int_1^{\mathrm{e}}t^2.\ln t\,dt\implies\Big|\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\Big|\leqslant|x|\int_1^{\mathrm{e}}t^2\ln t dt$$

On en déduit par encadrement que $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}=0$, ce qui prouve que φ est dérivable en 0, et que $\varphi'(0)=0$.

b) Pour tout réel x strictement positif, effectuons le changement de variable affine $u=tx$ dans l'intégrale définissant $\varphi(x)$, on a alors :

$$\varphi(x)=\int_1^{\mathrm{e}}\frac{\ln t}{x^2t^2+1}\,dt=\int_x^{\mathrm{e}x}\frac{\ln(u/x)}{(u^2+1)x}\,du$$

$$\varphi(x)=\frac{1}{x}\int_x^{\mathrm{e}x}\frac{\ln u}{u^2+1}\,du-\frac{\ln x}{x}\int_x^{\mathrm{e}x}\frac{1}{u^2+1}du\quad(2)$$

Sous cette forme φ est clairement dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et étant dérivable en 0 et paire elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

4. $\forall\,x\in\mathbb{R}_+,\forall\,y\in\mathbb{R}_+,\forall\,t\in[1,\mathrm{e}]$:

$$x\leqslant y\implies x^2t^2+1\leqslant y^2t^2+1\implies\frac{\ln t}{y^2t^2+1}\leqslant\frac{\ln t}{x^2t^2+1}$$

$$\implies\int_1^{\mathrm{e}}\frac{\ln t}{y^2t^2+1}dt\leqslant\int_1^{\mathrm{e}}\frac{\ln t}{x^2t^2+1}dt.$$

D'où $\varphi(y)\leqslant\varphi(x)$. Ce qui montre que φ est une fonction décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

5. Pour tout $x>0$, on a :

$$\Big|\varphi(x)-\int_1^{\mathrm{e}}\frac{\ln t}{x^2t^2}\,dt\Big|=\Big|\int_1^{\mathrm{e}}\Big(\frac{\ln t}{x^2t^2+1}-\frac{\ln t}{x^2t^2}\Big)\,dt\Big|$$

$$= \left| \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln t}{(x^2t^2(x^2t^2+1)} dt \right| \leqslant \frac{1}{x^4} \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln t}{t^4}\, dt$$

D'où : $\left| x^2\varphi(x) - \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln t}{t^2}\, dt \right| \leqslant \frac{1}{x^2} \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln t}{t^4}\, dt$

On déduit par encadrement et limite que : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\varphi(x) - \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln t}{t^2}\, dt = 0 \quad (3)$

La relation (3) entraîne $\varphi(x) \underset{(+\infty)}{\sim} \dfrac{1}{x^2} \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln t}{t^2} dt.$

Une intégration par parties donne : $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln t}{t^2}\, dt = \frac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}}$ et on conclut :

$$\varphi(x) \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}} \times \frac{1}{x^2}$$

Exercice 1.02.

Soit r un réel positif. On s'intéresse aux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la relation de récurrence : $u_{n+2} = u_{n+1} + r^n\, u_n$.

1. Que dire de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quand $r = 0$?

2. Dans cette question, on suppose $r = 1$.

   a) Expliciter u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   b) On suppose $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   c) Existe-t-il des valeurs de u_0 et u_1 telles que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ?

3. Dans cette question, on suppose $r \geqslant 1$ et $u_0 > 0$, $u_1 > 0$. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4. Dans cette question, on suppose $0 < r < 1$ et $u_0 > 0$, $u_1 > 0$. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $v_1 = u_1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} = \left(1 + r^{n-1}\right) v_n$.

   a) Étudier la convergence de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

   b) Comparer u_n et v_n pour $n \in \mathbb{N}^*$ et en déduire la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

5. Dans cette question, on fait varier r dans l'intervalle $[0, 1[$ et on note $\big(u_n(r)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_0(r) = 1, u_1(r) = 1, \text{ et } \forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+2}(r) = u_{n+1}(r) + r^n\, u_n(r).$$

On note $L(r)$ la limite de la suite $\big(u_n(r)\big)_{n\in\mathbb{N}}$.

   a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $r \mapsto u_n(r)$ est croissante sur $[0, 1[$.

   b) En déduire que la fonction L est croissante sur $[0, 1[$.

c) Pour $r \in [0,1[$, justifier la convergence de la série de terme général $r^k u_k(r)$, et exprimer sa somme en fonction de $L(r)$.

d) Déterminer la limite de $L(r)$ quand r tend vers 1.

Solution

1. Si $r = 0$ alors $(u_n)_{n\geq 1}$ est constante.

2. a) L'équation caractéristique de cette relation de récurrence est $x^2 - x - 1 = 0$ dont les racines sont $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.
Donc u_n est de la forme :

$$u_n = \lambda\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n + \mu\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n$$

Les conditions initiales donnent : $\begin{cases} u_0 = \lambda + \mu \\ u_1 = \lambda\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \mu\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \end{cases}$, d'où :

$$\begin{cases} \lambda = \dfrac{(\sqrt{5}-1)\,u_0 + 2u_1}{2\sqrt{5}} \\ \mu = \dfrac{(\sqrt{5}+1)\,u_0 - 2u_1}{2\sqrt{5}} \end{cases}$$

b) Pour $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$, il vient :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

Car $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} > 1$ et $|\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}| < 1$.

c) La suite (u_n) converge si et seulement si $\lambda = 0$, donc si et seulement si $(\sqrt{5}-1)\,u_0 + 2u_1 = 0$; et alors (u_n) converge vers 0.

3. Par récurrence $u_n > 0$ et $u_n \geq (n-1)u_1$ pour $n \geq 1$, donc u_n tend vers $+\infty$.

4. a) Par récurrence, $v_{n+2} = v_1 \prod_{k=0}^{n} \big(1 + r^k\big)$ pour $n \geqslant 2$.
Comme $0 < r < 1$, on a $r^k \to 0$, donc $\ln(1+r^k) \sim r^k > 0$, et la série $\sum_{k\geq 0} \ln(1+r^k)$ converge de somme notée L. Alors :

$$v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} v_1 \mathrm{e}^L = V$$

b) $u_n > 0$ est clair, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Puis :

$$u_{n+2} = u_{n+1} + r^n u_n \leqslant (1+r^n)u_{n+1} \leqslant u_1 \prod_{k=0}^{n} (1+r^k) = v_{n+2} \leqslant V$$

car $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée croissante, donc convergente.

5. a) Par récurrence on montre que la fonction u_n est positive croissante : c'est clair pour u_0 et u_1 et si on suppose le résultat acquis aux rangs n et $n+1$, on en déduit que u_{n+2} est positive croissante comme somme et produit de fonctions positives croissantes.

b) Ainsi la fonction L est croissante par passage à la limite.

c) On utilise une somme « télescopique » :

$u_{n+2}(r) - u_1(r) = \sum_{k=0}^{n} (u_{k+2}(r) - u_{k+1}(r)) = \sum_{k=0}^{n} r^k u_k(r)$, d'où :

$$L(r) - 1 = \sum_{k=0}^{\infty} r^k \, u_k(r)$$

(la série écrite est bien convergente puisque $(u_n(r))_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc est bornée.)

d) On a $\forall\, n, u_n(r) \geq 1$ par croissance de $\big(u_n(r)\big)_{n\in\mathbb{N}}$; donc

$$L(r) = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} r^k u_k(r) \geqslant 1 + \sum_{k=0}^{\infty} r^k = 1 + \frac{1}{1-r} \underset{r\to 1^-}{\longrightarrow} +\infty$$

Exercice 1.03.

On note E l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\geq 1}$ telles que la série de terme général $n^2u_n^2$ converge et on note F le sous-ensemble de E formé des suites $(u_n)_{n\geq 1}$ pour lesquelles on a $\sum_{n=1}^{\infty} n^2u_n^2 \leqslant 1$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = \frac{1}{n^2}$ appartient à E. Appartient-elle à F ?

2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = \frac{1}{n\sqrt{n(n+1)}}$ appartient à E et à F.

3. Soit X une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre $1/2$.

a) Rappeler les valeurs de $E(X)$ et $V(X)$.

b) Soit $v = (v_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $v_n = \frac{1}{2^{n/2}}$. Étudier l'appartenance de v à E et à F.

c) Construire, à partir de la suite v précédente, une suite w appartenant à F.

4. a) Montrer que, si u et v sont deux suites de E, alors la série de terme général $n^2u_nv_n$ est absolument convergente.

b) En déduire que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

5. F est-il un sous-espace vectoriel de E ?

6. Montrer que F est convexe, c'est-à-dire que si $u, v \in F$ et $\lambda \in [0,1]$, alors $\lambda u + (1-\lambda)v \in F$.

Solution

1. On a $n^2 u_n^2 = \dfrac{1}{n^2}$, ce qui prouve que (u_n) appartient à E. En revanche, on a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \cdots > 1$.

2. On a $n^2 u_n^2 = \dfrac{1}{n(n+1)}$ et, pour tout entier naturel N supérieur ou égal à 1, on a aussi :

$$\sum_{n=1}^{N} n^2 u_n^2 = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{N+1} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 1$$

Ceci prouve que la suite (u_n) appartient à E et à F.

3. a) D'après le cours, on a $E(X) = V(X) = 2$.

b) On a $n^2 v_n^2 = \dfrac{n^2}{2^n}$, ce qui permet de constater que la série de terme général $n^2 v_n^2$ converge (c'est le moment d'ordre 2 de la variable X) et sa somme vaut $E(X^2) = 6$. La suite v appartient à E et pas à F.

c) En posant $w = \dfrac{v}{\sqrt{6}}$, la suite w appartient à F.

4. a) Par identité remarquable, on a : $|u_n v_n| \leqslant \dfrac{u_n^2 + v_n^2}{2}$ et on en déduit aisément que la série de terme général $n^2|u_n v_n|$ est convergente.

b) $\star$ E est une partie non vide de l'espace des suites réelles.
$\star$ Soit u et v deux suites de E et λ réel. On a :

$$n^2(u_n + \lambda v_n)^2 = n^2 u_n^2 + \lambda^2 n^2 v_n^2 + 2\lambda n^2 u_n v_n$$

On termine avec la question précédente.
Conclusion : E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

5. En reprenant la suite w de la question 3. c) qui est dans F, la suite $2w$ n'appartient pas à F, donc F n'est pas un sous-espace vectoriel de E.

6. Soit $\lambda \in [0,1]$ et u et v deux suites de F. Il faut montrer que $\lambda u + (1-\lambda)v \in F$.
Après avoir remarqué la convergence des séries en jeu, il vient :

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2(\lambda u + (1-\lambda)v)^2 = \lambda^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 u_n^2 + (1-\lambda)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 v_n^2 + 2\lambda(1-\lambda) \sum_{n=1}^{\infty} n^2 u_n v_n$$

et :

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2(\lambda u + (1-\lambda)v)^2 \leqslant \lambda^2 + (1-\lambda)^2 + 2\lambda(1-\lambda) = 1$$

D'où la conclusion.

Exercice 1.04.

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle. On définit la suite $(s_n)_{n\geq 0}$ en posant :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, s_n = \frac{u_0 + \cdots + u_n}{n+1}.$$

1. On suppose dans cette question que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante et tend vers $\ell \in \mathbb{R}$.

a) Si $x \in \mathbb{R}$, on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x. Vérifier que la suite $\left(\frac{n - \lfloor \sqrt{n} \rfloor}{n+1}\right)_{n\geq 0}$ converge vers 1 lorsque n tend vers l'infini.

b) Montrer que

$$\ell \leqslant s_n \leqslant \frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor + 1}{n+1} u_0 + \frac{n - \lfloor \sqrt{n} \rfloor}{n+1} u_{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}.$$

c) Montrer que la suite $(s_n)_{n\geq 0}$ converge vers ℓ.

d) Réciproquement, on suppose que la suite $(s_n)_{n\geq 0}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. Montrer alors que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge aussi vers ℓ (on pourra raisonner par l'absurde).

2. Dans cette question, on suppose que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0.

a) Vérifier que $v_n = \sup\{|u_k|; k \geqslant n\}$ est bien défini.

b) Montrer que la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est décroîssante de limite nulle.

c) En déduire que la suite $(s_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0.

3. On suppose maintenant que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. Montrer que la suite des moyennes $(s_n)_{n\geq 0}$ converge aussi vers ℓ. Donner un exemple simple prouvant que la réciproque est fausse.

4. On considère la suite $(w_n)_{n\geq 0}$ définie par récurrence en posant :

$w_0 = 1$ et $w_{n+1} = w_n + \mathrm{e}^{-w_n}$.

a) Étudier la suite $(w_n)_{n\geq 0}$.

b) Prouver que : $\lim\limits_{n\to\infty} (\mathrm{e}^{w_{n+1}} - \mathrm{e}^{w_n}) = 1$.

c) En déduire un équivalent de w_n, lorsque n tend vers l'infini.

Solution

1. a) Comme $\sqrt{n} \leqslant \lfloor \sqrt{n} \rfloor < \sqrt{n} + 1$, il vient

$$\frac{n - \sqrt{n} - 1}{n+1} < \frac{n - \lfloor \sqrt{n} \rfloor}{n+1} \leqslant \frac{n - \sqrt{n}}{n+1}$$

Les membres de gauche et de droite de cette inégalité tendant vers 1, on aboutit donc bien au résultat demandé.

b) En utilisant la décroissance vers ℓ de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$, on obtient :

$$\ell \leqslant s_n = \frac{u_0 + \ldots + u_{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n+1} + \frac{u_{\lfloor\sqrt{n}\rfloor+1} + \ldots + u_n}{n+1} \leqslant \frac{\lfloor\sqrt{n}\rfloor + 1}{n+1} u_0 + \frac{n - \lfloor\sqrt{n}\rfloor}{n+1} u_{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}.$$

c) En revenant à la définition, on vérifie facilement que la suite $(u_{\lfloor\sqrt{n}\rfloor})_{n\geq 0}$ converge aussi vers ℓ.
Il suffit alors de passer à la limite dans l'inégalité précédente en utilisant la question 1. a) pour voir que la suite $(s_n)_{n\geq 0}$ converge vers ℓ.

d) Réciproquement supposons que la suite $(s_n)_{n\geq 0}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. Si la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ ne converge pas vers une limite finie, alors elle tend vers $-\infty$ (puisqu'elle est décroissante). Il en est de même de la suite $(u_{\lfloor\sqrt{n}\rfloor})_{n\geq 0}$. L'inégalité de droite qui a été établie en 1. b) reste valable et le membre de droite tend vers $-\infty$. On en déduit alors que la suite $(s_n)_{n\geq 0}$ tend nécessairement vers $-\infty$ et on aboutit à une contradiction.
La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge donc vers une limite finie ℓ' et en appliquant 1. c) on trouve que $\ell' = \ell$.

2. a) Comme la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge, elle est bornée et par suite l'ensemble $\{|u_k|; k \geqslant n\}$ est non vide et majoré. D'après le cours, il admet donc une borne supérieure et v_n est bien défini.

b) Comme $\{|u_k|; k \geqslant n+1\} \subseteq \{|u_k|; k \geqslant n\}$, on a bien $v_{n+1} \leqslant v_n$.
Si $I =]-a, a[$ est un intervalle ouvert contenant 0, il n'y a qu'un nombre fini de u_n qui ne sont pas contenus dans l'intervalle $]-a/2, a/2[$, car la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0, et par suite il n'y a qu'un nombre fini de termes de la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ en dehors de I. Avec la définition donnée en cours, on constate donc que v_n converge vers 0.

c) Par construction, on a de manière évidente $|u_n| \leqslant v_n$. Il suffit alors d'utiliser les inégalités :

$$|s_n| \leqslant \frac{|u_0| + \cdots + |u_n|}{n+1} \leqslant \frac{v_0 + \cdots + v_n}{n+1}$$

et les questions 2. b) et 1. c).

3. Il suffit d'appliquer 2. c) à la suite $(u_n - \ell)_{n\geq 0}$.

4. a) Comme $w_{n+1} - w_n = \mathrm{e}^{-w_n} > 0$, on voit que la suite $(w_n)_{n\geq 0}$ est croissante.
Si elle convergeait vers une limite finie ℓ, on aurait $\ell = \ell + \mathrm{e}^{\ell}$, ce qui est absurde, elle tend donc vers $+\infty$.

b) On a $\mathrm{e}^{w_{n+1}} - \mathrm{e}^{w_n} = \mathrm{e}^{w_n}\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-w_n}} - \mathrm{e}^{w_n} = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-w_n}} - 1}{\mathrm{e}^{-w_n}}$.

D'où : $\lim\limits_{n\to\infty}(\mathrm{e}^{w_{n+1}}-\mathrm{e}^{w_n})=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}=1.$

c) On utilise la question 3. en posant $u_n=\mathrm{e}^{w_{n+1}}-\mathrm{e}^{w_n}$ et on obtient :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{w_n}}{n}=1$$

Par suite, $\lim\limits_{n\to\infty}(w_n-\ln n)=0$ et par conséquent $w_n \underset{(\infty)}{\sim} \ln n$.

Exercice 1.05.

On considère une fonction f continue, décroissante et strictement positive sur l'intervalle $[1,+\infty[$. On pose pour tout entier $n\geqslant 1$:

$$u_n=\int_1^n f(t)\,dt \text{ et } v_n=\sum_{k=1}^{n} f(k).$$

1. Montrer que la suite $(w_n)_{n\geq 1}$, définie par $w_n=v_n-u_n$, est décroissante et à termes positifs.

2. On suppose que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ est divergente. Justifier l'inégalité $u_n>0$ pour tout entier $n\geqslant 2$.
Déterminer la limite de la suite $\left(\dfrac{v_n}{u_n}\right)_{n\geq 2}$.

3. Dans cette question, on suppose que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.

a) Que peut-on dire de la série de terme général $f(k)$?

b) Donner, à l'aide d'une intégrale, un équivalent du reste $R_n=\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k)$ lorsque

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{\int_n^{+\infty} f(t)\,dt}=0.$$

4. Applications :

a) Donner un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ lorsque n tend vers l'infini.

b) Donner un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{1+k^2}$ lorsque n tend vers l'infini.

Solution

1. Comme f est décroissante, on a pour tout $k\in\mathbb{N}^*$

$$f(k+1)\leqslant\int_k^{k+1} f(t)\,dt\leqslant f(k).$$

Soit $n\geqslant 2$, en sommant de 1 à $n-1$, on obtient :

$$v_n - f(1) \leqslant u_n = \int_1^n f(t)\,dt \leqslant v_n - f(n) \leqslant v_n$$

On a donc $w_n \geqslant 0$.
On en déduit également que :

$$w_{n+1} - w_n = v_{n+1} - v_n - (u_{n+1} - u_n) = f(n+1) - \int_n^{n+1} f(t)dt \leqslant 0$$

La suite $(w_n)_{n\geq 1}$ est donc bien décroissante.

2. Soit $n \geqslant 2$, la continuité et la stricte positivité de f assurent que $u_n > 0$. Avec les inégalités trouvées en 1, on voit que
$1 \leqslant \dfrac{v_n}{u_n} \leqslant 1 + \dfrac{f(1)}{u_n}$. Comme l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ est divergente, la suite (u_n) tend vers $+\infty$ et par suite :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{v_n}{u_n} = 1$$

3. a) La série de terme général $f(k)$ est de même nature que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$, elle est donc convergente.

b) Le reste $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} f(k)$ est bien défini puisque la série converge.

Comme f est positive et $f(k+1) \leqslant f(t) \leqslant f(k)$ pour $x \in [k, k+1]$, on en déduit que :

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(t)\,dt \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k) = R_n \leqslant \int_n^{+\infty} f(t)\,dt$$

Or $\displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\,dt \leqslant f(n)$, il s'ensuit que

$$\int_n^{+\infty} f(t)\,dt - f(n) \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k) = R_n \leqslant \int_n^{+\infty} f(t)\,dt$$

Il résulte alors de l'hypothèse que $R_n \underset{(\infty)}{\sim} \displaystyle\int_n^{+\infty} f(t)\,dt$.

4. Comme l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$ est divergente, en utilisant 2. on voit que dans ce cas

$$u_n \underset{(\infty)}{\sim} \int_1^n \frac{dt}{t} = \ln n$$

L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt$ converge, on sait d'après 3. b) que le reste R_n est équivalent à

$$\int_n^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2} - \arctan(n) = \arctan\frac{1}{n} \underset{(\infty)}{\sim} \frac{1}{n}$$

Exercice 1.06.

1. Soit $\sum_{n\geq 0} a_n$ une série à termes strictement positifs telle que la suite $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)_n$ converge vers un réel ℓ tel que $\ell < 1$.
Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge.

On considère la suite (f_n) définie par : $f_0 = 1, f_1 = 1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}, f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$.

2. Montrer que la suite (f_n) est à valeurs strictement positives.

3. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{f_{n+1}}{f_n}$.

a) Expliciter une fonction rationnelle φ telle que pour tout n de $\mathbb{N}^*, u_{n+1} = \varphi(u_n)$.

b) Déterminer le sens de variation de φ sur $\mathbb{R}_+^*$.

4. a) Montrer que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones et convergentes. Déterminer leurs limites respectives.

b) En déduire que (u_n) converge vers $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

5. Pour tout réel x, pour lequel la série de terme général $f_n x^n$ converge, on pose $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$. On pose $R = \frac{1}{\Phi}$.

a) Montrer que pour tout x de $]-R, R[$, la série définissant $A(x)$ est absolument convergente.

b) On pose, pour tout x de $]-R, R[$:

$$A_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^{n+2}, A_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1} x^{n+2}, A_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+2} x^{n+2}.$$

Exprimer $A_0(x), A_1(x)$ et $A_2(x)$ en fonction de $A(x)$ pour tout x de $]-R, R[$.

c) En déduire $A(x)$ en fonction de x pour tout x de $]-R, R[$.

Solution

1. Soit $\delta > 0$ tel que $\ell + \delta < 1$. Comme $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$, il existe n_0 tel que pour $n \geqslant n_0$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \ell + \delta = \alpha$.
Soit $n > n_0$. On écrit :

$$a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \times \frac{a_{n_1}}{a_{n-2}} \times \cdots \times \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} \times a_{n_0} \leqslant C\alpha^{n-n_0}$$

La série de terme général α^k est géométrique de raison $0 < \alpha < 1$ et donc convergente. On termine grâce au théorème de comparaison pour les séries à termes positifs.

2. La suite $(f_n)_n$ est manifestement positive pour $n \geqslant 1$ car croissante par récurrence.

3. a) On a $u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n}$. La fonction φ est définie par $\varphi(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$ décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ car de dérivée négative.

b) La fonction φ est décroissante et $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi$ est croissante. Ainsi, par récurrence immédiate $u_2 > u_4$ entraîne que la suite (u_{2n}) est décroissante et $u_3 < u_5$ entraîne que la suite (u_{2n+1}) est croissante.

4. a) On montre ensuite par récurrence et par croissance de φ^2, que pour tout n :

$$0 < u_{2n-1} < u_{2n+1} < u_{2n+2} < u_{2n}$$

b) Ainsi la suite (u_{2n}) est décroissante et minorée par u_1, alors que la suite (u_{2n+1}) est croissante et majorée par u_2. Ces deux suites convergent vers un point fixe sur $\mathbb{R}_+^*$ de φ^2, soit $\varphi^2(x) = x$ ou $x^2 + x - 1 = 0$ qui n'a que $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ comme racine positive.
Les deux sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) étant convergentes vers la même limite, par exhaustion la suite (u_n) converge également vers cette limite $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

5. a) Soit $x \neq 0$: $\left|\dfrac{f_{n+1}x^{n+1}}{f_n x^n}\right| = \dfrac{f_{n+1}}{f_n}|x| = u_n|x| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Phi|x|$.
Par le préliminaire, la série $\sum f_n x^n$ converge absolument pour tout $x \in]-R, R[$.

b) Pour tout $x \in]-R, R[$, les séries définissant A_0, A_1 et A_2 sont absolument convergentes. On a $A_0(x) = x^2 A(x)$, $A_1(x) = xA(x) - x$ et $A_2(x) = A(x) - 1 - x$.

c) Soit $|x| < R$. On a :
$A_2(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (f_n + f_{n+1})x^{n+2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n x^{n+2} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_{n+1}x^{n+2}$. Ainsi :

$$A(x) - 1 - x = A_0(x) + A_1(x) \text{ et } A(x) = -\frac{1}{x^2 + x - 1}$$

Exercice 1.07.

On note E l'ensemble des applications u continues sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} u^2(x)\mathrm{e}^{-x^2}\,dx$ converge.

1. a) Montrer que pour a et b réels, on a $|ab| \leqslant \frac{1}{2}(a^2+b^2)$.

b) Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et que l'application $\langle\ ,\ \rangle$ définie sur $E \times E$ par :

$$(u,v) \mapsto \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x)v(x)\mathrm{e}^{-x^2}dx$$

est un produit scalaire sur E.
On notera $||.||$ la norme associée à ce produit scalaire.
On pose, pour tout réel a et tout réel x, $\varphi_a(x) = \mathrm{e}^{ax}$.

2. Montrer que $\varphi_a \in E$ et calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_a^2(x)\mathrm{e}^{-x^2}dx$.

3. Montrer que $\forall\,(a,b) \in \mathbb{R}, \langle \varphi_a, \varphi_b \rangle = \mathrm{e}^{\frac{(a+b)^2}{4}}$.

4. Déterminer, selon les valeurs du paramètre réel α, la nature de la série de terme général $v_n = ||\varphi_{\sqrt{\ln(n)}}||^\alpha$, pour $n \geqslant 1$.

5. Déterminer, selon les valeurs du paramètre réel β, la nature de la série de terme général $w_n = ||\varphi_{\sqrt{n}}||^\beta$, pour $n \geqslant 1$ et calculer sa somme S_β lorsqu'elle existe.

6. Dans le cas de la convergence de la série de la question précédente, on considère une variable aléatoire X_β à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ dont la loi est définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, P(X_\beta = n) = \frac{w_n}{S_\beta}$$

a) Montrer que l'on définit ainsi une loi de probabilité.

b) Calculer l'espérance E_β et la variance V_β de X_β.

c) Déterminer les limites respectives de E_β et V_β lorsque β tend vers $-\infty$.

Solution

1. L'application φ_a est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ comme composée de telles fonctions, et :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \big(\varphi_a(x)\big)^2\mathrm{e}^{-x^2} = \mathrm{e}^{2ax-x^2} = \mathrm{e}^{a^2}\mathrm{e}^{-(x-a)^2}$$

Or :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(x-a)^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \sqrt{\pi}$$

Donc φ_a est bien un élément de E, et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_a^2(x)\mathrm{e}^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}\mathrm{e}^{a^2}$.

2. On écrit $\forall\, x \in \mathbb{R}, \varphi_a(x)\varphi_b(x) = \mathrm{e}^{(a+b)(x)} = \big(\mathrm{e}^{\frac{a+b}{2}x}\big)^2$, d'où :

$\langle \varphi_a, \varphi_b \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{a+b}(x) \mathrm{e}^{-x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\varphi_{\frac{a+b}{2}}(x)\right)^2 \mathrm{e}^{-x^2} dx = \mathrm{e}^{(\frac{a+b}{2})^2}$
d'après le résultat de la question précédente.

3. $v_n = \langle \varphi_{\sqrt{\ln n}}, \varphi_{\sqrt{\ln n}} \rangle^{\frac{\alpha}{2}} = \left(\mathrm{e}^{(\frac{a+b}{2})^2}\right)^{\frac{\alpha}{2}}$, pour $a = b = \sqrt{\ln n}$, d'où :

$$\frac{a+b}{2} = \sqrt{\ln n}$$

Soit finalement $v_n = n^{\frac{\alpha}{2}}$. La série de terme général v_n est une série de Riemann et converge si et seulement si $\frac{\alpha}{2} < -1$ soit $\alpha < -2$.

4. De même, $w_n = \langle \varphi_{\sqrt{n}}, \varphi_{\sqrt{n}} \rangle^{\frac{\beta}{2}} = (\mathrm{e}^{(\frac{a+b}{2})^2})^{\frac{\beta}{2}}$.

pour $a = b = \sqrt{n}$, d'où $\frac{a+b}{2} = \sqrt{n}$. Soit finalement $w_n = \left(\mathrm{e}^n\right)^{\frac{\beta}{2}} = \left(\mathrm{e}^{\frac{\beta}{2}}\right)^n$.

(w_n) est une suite géométrique de raison $\mathrm{e}^{\frac{\beta}{2}}$ positive, donc la série de terme général w_n converge si et seulement si $\mathrm{e}^{\frac{\beta}{2}} < 1$, *i.e.* $\beta < 0$.

Sa somme est alors $S_\beta = \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{\beta}{2}}}{1 - \mathrm{e}^{\frac{\beta}{2}}}$.

5. Dans cette question, on suppose que la série de terme général w_n converge, donc on suppose $\beta < 0$.

a) Pour $n \geqslant 1$, $P(X = n) = \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{n\beta}{2}}}{\mathrm{e}^{\frac{\beta}{2}}}(1 - \mathrm{e}^{\frac{\beta}{2}}) = \left(\mathrm{e}^{\frac{\beta}{2}}\right)^{n-1}(1 - \mathrm{e}^{\frac{\beta}{2}})$.

b) On reconnaît une loi géométrique de paramètre $p = \mathrm{e}^{\frac{\beta}{2}} \in]0, 1[$ et donc :

$$E_\beta = \frac{1}{p} = \mathrm{e}^{-\frac{\beta}{2}}, V_\beta = \frac{1-p}{p^2} = (1 - \mathrm{e}^{\frac{\beta}{2}})\mathrm{e}^{-\beta}$$

c) L'espérance E_β et la variance V_β tendent tous les deux vers $+\infty$ lorsque β tend vers $-\infty$.

Exercice 1.08.

Dans cet exercice, on s'intéresse aux fonctions f appartenant à l'ensemble $\mathcal{A}$ suivant :
$\mathcal{A}$ est l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifient les conditions suivantes :

- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) + f(x-y) = 2f(x).f(y) \qquad (1)$
- f n'est pas la fonction nulle.
- f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

1. a) Montrer que $\mathcal{A}$ n'est pas vide et que toute fonction f de $\mathcal{A}$ vérifie $f(0) = 1$ et est paire.

2. On note $B = \{x \geqslant 0, f(x) = 0\}$.

a) Montrer que B admet une borne inférieure notée a vérifiant $f(a) = 0$ et $a > 0$.

b) En déduire que : $\forall\, x \in [0, a[, f(x) > 0$.

3. Dans cette question, on pose pour $r \in \mathbb{R}^+$, $\lambda(r) = \displaystyle\int_0^r f(u)\, du$.

a) Montrer successivement que :

i) il existe un réel $r > 0$ tel que $\lambda(r) > 0$

ii) $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{2\lambda(r)}\Big[\displaystyle\int_x^{x+r} f(u)\, du + \int_{x-r}^{x} f(v)\, dv\Big]$.

b) En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

c) Prouver l'existence d'une constante réelle c telle que : $\forall\, x \in \mathbb{R}, f''(x) = cf(x)$.

Solution

1. $\star$ L'ensemble $\mathcal{A}$ n'est pas vide puisque la fonction cos appartient à $\mathcal{A}$.

$\star$ Pour $x = y = 0$ on obtient $f(0) \in \{0, 1\}$. L'hypothèse $f(0) = 0$ entraîne pour $y = 0$ dans (1) : $\forall\, x \in \mathbb{R}, 2f(x) = 2f(x).f(0) = 0$ soit f identiquement nulle, ce qui est exclu. Donc nécessairement $f(0) = 1$.

$\star$ Pour $x = 0$ on obtient : $\forall\, y \in \mathbb{R}, f(y) + f(-y) = 2f(y)$ donc f est paire.

2. a) La fonction f s'annule sur $\mathbb{R}^*$ et f est paire donc B est non vide. Ainsi B est une partie non vide de $\mathbb{R}$ minorée par 0, elle admet donc une borne inférieure $a \geqslant 0$. Comme $f(0) = 1$ on n'a pas $a = 0$ et $a > 0$.

Par définition de la borne inférieure : $\forall\, n > 0, \exists\, u_n \in B, a < u_n < a + \dfrac{1}{n}$.
On a $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$ et f étant continue : $f(a) = \lim\limits_{n\to\infty} f(u_n) = 0$.

b) Par l'absurde : s'il existe b dans $]0; a[$ avec $f(b) \leqslant 0$, alors le théorème des valeurs intermédiaires (f est continue) nous dit qu'il existe c dans $]0, a[$ avec $f(c) = 0$. Alors c serait un élément de B tel que $c < a$, en contradiction avec la définition de la borne inférieure.

3. a) Comme f est continue, et que $f(0) = 1$, il existe $r > 0$ tel que, pour $x \in [0, r], f(x) > \dfrac{1}{2}$. Alors :

$$\int_0^r f(u)du > \frac{r}{2} > 0 \implies \lambda(r) > 0$$

Les fonctions étant continues sur $\mathbb{R}$, on peut intégrer (1) entre 0 et r, par rapport à la variable y :

$$2f(x)\int_0^r f(y)\,dy = \int_0^r f(x+y)\,dy + \int_0^r f(x-y)\,dy$$

avec les changements de variable : $u = x+y$ et $v = x-y$, on obtient :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2\lambda(r)}\Big[\int_x^{x+r} f(u)\,du + \int_{x-r}^{x} f(v)\,dv\Big] \qquad (2)$$

b) Les fonctions $x \mapsto \displaystyle\int_x^{x+r} f(u)\,du$ et $x \mapsto \displaystyle\int_{x-r}^{x} f(v)\,dv$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, il en est de même pour f.
Si on suppose que f est de classe $\mathcal{C}^n$, la formule (2) montre alors que f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, donc par récurrence : f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

c) On dérive (2) : $f'(x) = \dfrac{1}{2\lambda(r)}(f(x+r) - f(x-r))$.

On dérive à nouveau : $f''(x) = \dfrac{1}{2\lambda(r)}(f'(x+r) + f'(x-r))$, et on remplace :

$$\begin{cases} f'(x+r) = \dfrac{1}{2\lambda(r)}(f(x+2r) - f(x)) \\ f'(x-r) = \dfrac{1}{2\lambda(r)}(f(x) - f(x-2r)) \end{cases}$$

Donc :
$f''(x) = \dfrac{1}{4\lambda^2(r)}[f(x+2r) + f(x-2r) - 2f(x)] = \dfrac{1}{4\lambda^2(r)}[2f(x)f(2r) - 2f(x)]$
ce qui entraîne :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, f''(x) = \frac{2f(2r)-2}{\lambda^2(r)}\, f(x) = c.f(x)$$

Exercice 1.09.

1. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n^2}$ converge pour tout $x \in [-1,1]$. On note alors :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

2. a) Montrer que pour tout $x \leqslant 1$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u}{\mathrm{e}^u - x}\,du$ est convergente.
On note alors $K(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u}{\mathrm{e}^u - x}du$.

b) Montrer que pour $|x| < 1$ et $u \geqslant 0$, on a : $\dfrac{1}{\mathrm{e}^u - x} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} x^k \mathrm{e}^{-(k+1)u}$.

c) En déduire que pour tout $x \in\,]-1,1[$, on a $xK(x) = f(x)$.

3. a) Montrer que la fonction K est continue en 0.

b) La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

Solution

1. Pour $|x| \leqslant 1$, on a $\dfrac{|x^n|}{n^2} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$, ce qui donne la convergence de la série proposée.

2. a) Pour $x \leqslant 1$, $\varphi : u \to \dfrac{u}{\mathrm{e}^u - x}$ est continue et positive sur $]0, +\infty[$.

• pour $x < 1$, $\lim\limits_0 \varphi = 0$.

• pour $x = 1$, $\lim\limits_0 \varphi = 1$. Ainsi φ admet un prolongement par continuité en 0.

• au voisinage de $+\infty$, $\varphi(u) \sim u\mathrm{e}^{-u}$ et $\lim\limits_{u\to+\infty} u^2\varphi(u) = 0$, ce qui montre l'existence de l'intégrale proposée.

b) On écrit, pour $u > 0$: $\dfrac{1}{\mathrm{e}^u - x} = \dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{1 - x\mathrm{e}^{-u}} = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} x^k \mathrm{e}^{-(k+1)u}$.

car $|x\mathrm{e}^{-u}| < 1$ pour tout $u > 0$.

c) En écrivant plutôt une somme partielle :

$$\forall\, N \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{\mathrm{e}^u - x} = \frac{\mathrm{e}^{-u}}{1 - x\mathrm{e}^{-u}} = \sum_{k=0}^{N-1} x^k \mathrm{e}^{-(k+1)u} + \frac{x^N \mathrm{e}^{-(N+1)u}}{1 - x\mathrm{e}^{-u}}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
K(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{u}{\mathrm{e}^u - x}\, du \\
&= \int_0^{+\infty} \Big(\sum_{k=0}^{N-1} x^k u \mathrm{e}^{-(k+1)u} \Big) du + \int_0^{+\infty} \frac{x^N u \mathrm{e}^{-(N+1)u}}{1 - x e^{-u}} du \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} x^k \int_0^{+\infty} u\mathrm{e}^{-(k+1)u} du + \int_0^{+\infty} R_N(u) du \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{x^k}{(k+1)^2} + \int_0^{+\infty} R_N(u) du, \text{ avec } R_N(u) = \frac{x^N u \mathrm{e}^{-(N+1)u}}{1 - x e^{-u}}
\end{aligned}$$

Or : $|R_N(u)| = |x|^N \mathrm{e}^{-Nu} \big|\dfrac{u}{\mathrm{e}^u - x}\big| \leqslant \mathrm{e}^{-Nu} \big|\dfrac{u}{\mathrm{e}^u - x}\big|$

et comme la fonction φ est continue sur $\mathbb{R}^+$, de limite nulle en $+\infty$ elle est bornée et il existe C tel que :

$$\Big|\int_0^{+\infty} R_N(u) du\Big| \leqslant \int_0^{+\infty} |R_N(u)| du \leqslant C \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-Nu} du = \frac{C}{N} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

En passant à la limite lorsque N tend vers l'infini, il vient :

$$xK(x) = x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k+1)^2} = f(x)$$

3. a) Pour $x \neq 0$, $K(x) = \dfrac{f(x)}{x} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{n-1}}{n^2} = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{(n+1)^2}$.

Si $|x| \leqslant 1$, alors $|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)^2}| \leqslant |x| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.

Ce qui montre que $\lim_{x\to 0} K(x) = 1$. Comme un calcul banal donne $K(0) = 1$, la fonction K est bien continue en 0.

b) Ainsi : $\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 1$ et f est dérivable en 0 avec $f'(0) = 1$.

Exercice 1.10.

Soit a un réel strictement supérieur à 1.

1. Pour tout réel $x \geqslant 0$, établir la convergence de l'intégrale : $\int_x^{+\infty} t^a \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$.

On note $f_a(x)$ sa valeur, et on pose $\varphi(a) = f_a(0)$ et $g_a(x) = \int_0^x t^a \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$.

2. a) Démontrer que $\varphi(a+2) = (a+1)\varphi(a)$.

b) Pour tout nombre entier naturel n, exprimer $\varphi(a+2n)$ en fonction de $\varphi(a)$. Calculer $\varphi(0)$ et $\varphi(1)$. En déduire la valeur de $\varphi(n)$ pour tout nombre entier naturel n.

3. Pour tout nombre entier naturel n et pour tout réel $t \geqslant 0$, on pose :

$$S_n(t) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{t^{2k+a}}{2^k k!}$$

a) Écrire la formule de Taylor avec reste intégral pour la fonction $u \mapsto \mathrm{e}^{-u}$ sur l'intervalle $\left[0, \frac{t^2}{2}\right]$ à l'ordre $n \in \mathbb{N}$.

En déduire le signe de $t^a \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} - S_n(t)$ selon les valeurs de n.

En déduire que, pour tout réel $t > 0$ et tout couple (p, q) de nombres entiers naturels :

$$S_{2p+1}(t) \leqslant t^a \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \leqslant S_{2q}(t).$$

b) Montrer alors que, pour tout nombre entier naturel non nul n :

$$\left|t^a \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} - S_n(t)\right| \leqslant \frac{t^{2n+a}}{2^n n!}.$$

c) En déduire que, pour tout entier naturel n et tout réel $x > 0$:

$$\left|g_a(x) - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+a+1}}{2^k k!(2k+a+1)}\right| \leqslant \frac{x^{2n+a+1}}{2^n n!(2n+a+1)}.$$

Justifier l'écriture : $g_a(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+a+1}}{2^k k!(2k+a+1)}$.

Solution

1. La fonction à intégrer est continue sur $[0, +\infty[$.
De plus pour tout $a > 0$, $\lim_{t\to+\infty} t^{a+2}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} = 0$, ce qui assure la convergence des intégrales considérées.

2. a) On a $\varphi(a+2) = \big[-t^{a+1}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\big]_0^{\to+\infty} + (a+1)\displaystyle\int_0^{+\infty} t^a\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$. D'où :

$$\varphi(a+2) = (a+1)\varphi(a)$$

b) On en déduit que $\varphi(a+2n) = \big[\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(a+2i-1)\big]\varphi(a)$.

De plus $\varphi(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$ et $\varphi(1) = \big[-\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\big]_0^{\to+\infty} = 1$.
D'où :

$$\varphi(2n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\prod_{i=1}^{n}(2i-1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\times\frac{(2n)!}{2^n n!}$$

$$\varphi(2n+1) = \prod_{i=1}^{n}(2i) = 2^n n!$$

3. a) Pour tout nombre entier n et pour tout réel $t \geqslant 0$, on pose :

$$S_n(t) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{t^{2k+a}}{2^k k!}$$

On a, par Taylor :

$$\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{t^{2k}}{2^k k!} + \int_0^{\frac{t^2}{2}}\frac{(\frac{t^2}{2}-u)^n}{n!}(-1)^{n+1}\mathrm{e}^{-u}\,du$$

Le signe de $t^a\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} - S_n(t)$ est positif si n est impair et négatif si n est pair, d'où l'on déduit que, pour tout réel $t > 0$ et tout couple (p, q) de nombres entiers naturels :

$$S_{2p+1}(t) \leq t^a\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \leq S_{2q}(t)$$

b) On a, pour tout nombre entier naturel non nul n :

$$\big|t^a\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} - S_n(t)\big| = t^a\Big|\int_0^{\frac{t^2}{2}}\frac{(t^2/2-u)^n}{n!}(-1)^{n+1}\mathrm{e}^{-u}du\Big|$$

Donc :

$$\big|t^a\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} - S_n(t)\big| \leqslant \frac{t^{2n+a}}{2^n n!}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u}du = \frac{t^{2n+a}}{2^n n!}$$

c) En intégrant entre 0 et x, on obtient que pour tout entier naturel n et tout réel $x > 0$:

$$\big|g_a(x) - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+a+1}}{2^k k!(2k+a+1)}\big| \leq \frac{x^{2n+a+1}}{2^n n!(2n+a+1)}$$

Le terme de droite a pour limite 0 quand n tend vers l'infini et ce pour toute valeur de $x > 0$, on en déduit que :

$$g_a(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+a+1}}{2^k k!(2k+a+1)}$$

Exercice 1.11.

Pour tout réel x, on pose $\varphi(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$.

1. a) Étudier les variations de la fonction φ.

b) En déduire que φ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à préciser.

Pour tout entier naturel n et pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note $u_n(t) = \varphi(t+n) - \varphi(n)$.
Pour tout réel t, on note $s_n(t) = \sum_{k=0}^{n} u_k(t)$.

2. a) Montrer que $u_n(t) \underset{(n\to\infty)}{\sim} 2\mathrm{e}^{-t-2n}(\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t})$, en déduire que la suite $(s_n(t))_n$ converge. On note sa limite $s(t)$.

b) Montrer que la fonction s ainsi définie est croissante.

3. a) Montrer que la série de terme général $(1 - \varphi(n))$ converge.

b) Montrer que $\lim\limits_{t\to+\infty} s(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (1 - \varphi(n))$.

c) Montrer que pour tout réel t, on a $s(t+1) = s(t) + 1 - \varphi(t)$.

Solution

1. a) La fonction φ est bien définie et impaire. De plus, pour tout réel x, la fonction φ est dérivable en x et après calculs :

$$\varphi'(x) = \frac{4}{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2} \geqslant 0$$

b) D'après la question précédente, la fonction φ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = -\lim\limits_{x\to-\infty} \varphi(-x) = 1$.
Ainsi, φ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1, 1[$.

2. a) Soit $(n, t) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$.

$$u_n(t) = \varphi(t+n) - \varphi(n) = \frac{\mathrm{e}^{t+n} - \mathrm{e}^{-t-n}}{\mathrm{e}^{t+n} + \mathrm{e}^{-t-n}} - \frac{\mathrm{e}^n - \mathrm{e}^{-n}}{\mathrm{e}^n + \mathrm{e}^{-n}}$$

$$u_n(t) = \frac{(\mathrm{e}^{t+n} - \mathrm{e}^{-t-n})(\mathrm{e}^n + \mathrm{e}^{-n}) - (\mathrm{e}^{t+n} + \mathrm{e}^{-t-n})(\mathrm{e}^n - \mathrm{e}^{-n})}{(\mathrm{e}^{t+n} + \mathrm{e}^{-t-n})(\mathrm{e}^n + \mathrm{e}^{-n})}$$

$$= \frac{\mathrm{e}^{t+2n} + \mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-t-2n} - \mathrm{e}^{t+2n} - \mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t-2n}}{(\mathrm{e}^{t+n} + \mathrm{e}^{-t-n})(\mathrm{e}^n + \mathrm{e}^{-n})}$$

$$= \frac{2(\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t})}{(\mathrm{e}^{t+n} + \mathrm{e}^{-t-n})(\mathrm{e}^n + \mathrm{e}^{-n})} \underset{(n\to\infty)}{\sim} \frac{2(\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t})}{\mathrm{e}^{t+n}\mathrm{e}^n}$$

$$u_n(t) \underset{(n\to\infty)}{\sim} 2\mathrm{e}^{-t-2n}(\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t})$$

Ainsi, la suite $(u_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ est de signe constant à partir d'un certain rang et, d'après les théorèmes de comparaison des séries, la série de terme général $u_n(t)$ converge, donc $(s_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

b) D'après la question 1, pour tout entier naturel n, la fonction u_n est croissante. Ainsi, la fonction s_n est croissante et, par passage à la limite dans les inégalités, la fonction s est croissante.

3. a) Pour $n \in \mathbb{N}$: $1 - \varphi(n) = 1 - \dfrac{\mathrm{e}^n - \mathrm{e}^{-n}}{\mathrm{e}^n + \mathrm{e}^{-n}} = \dfrac{2\mathrm{e}^{-n}}{\mathrm{e}^n + \mathrm{e}^{-n}} \underset{(\infty)}{\sim} 2\mathrm{e}^{-2n}$.

Ainsi, $\sum(1 - \varphi(n))$ converge.

b) La fonction s étant croissante, elle admet une limite (finie ou infinie) en $+\infty$.

D'une part, comme u_n est croissante, pour tout réel t,

$$u_n(t) \leqslant 1 - \varphi(n) \implies s(t) \leqslant \sum(1 - \varphi(n)) \implies \lim_{t\to+\infty} s(t) \leqslant \sum(1 - \varphi(n))$$

D'autre part, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et $n \in [\![0, n]\!]$, le réel $u_n(t)$ étant positif pour tout réel positif t,

$$s(t) \geqslant \sum_{n=0}^{N} u_n(t) \geqslant \sum_{n=0}^{N} (\varphi(t+n) - \varphi(n)) \implies \lim_{t\to+\infty} s(t) \geqslant \sum_{n=0}^{N} (1 - \varphi(n))$$

$$\implies \lim_{t\to+\infty} s(t) \geqslant \sum_{n=0}^{\infty} (1 - \varphi(n))$$

Finalement, $\lim\limits_{t\to+\infty} s(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (1 - \varphi(n))$.

4. Soit $(n, t) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$.

$$s_n(t+1) = \sum_{k=0}^{n} (\varphi(t+k+1) - \varphi(k)) = \sum_{k=1}^{n+1} \varphi(t+k) - \sum_{k=0}^{n} \varphi(k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (\varphi(t+k) - \varphi(k)) + \varphi(t+n+1) - \varphi(t)$$

Ainsi, en passant à la limite lorsque n tend vers l'infini :

$$s(t+1) = s(t) + 1 - \varphi(t)$$

Exercice 1.12.

Soit k un réel fixé. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$f(0) = 1 \text{ et } \forall\, x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(kx)$$

1. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que f est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et qu'il existe $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = k^{a_n} f(k^{b_n} x)$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer a_n et b_n en fonction de n.

c) Calculer $f^{(n)}(0)$.

2. Soit (u_n) une suite de réels tels que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n \neq 0$, et $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \ell \in \mathbb{R}$.
Montrer que :

a) si $\ell < 1$, la série de terme général u_n converge absolument.

b) si $\ell > 1$, la série de terme général u_n diverge.

3. Soit g_k la fonction définie par : $g_k(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} k^{a_n} \times \dfrac{x^n}{n!}$.

a) Déterminer le domaine de définition de g_1.

b) Déterminer, selon les valeurs de k, le domaine de définition de g_k.

4. On suppose désormais que $|k| \leqslant 1$. Soit $a > 0$ un réel fixé.

a) Montrer qu'il existe un réel $M \geqslant 0$ tel que :

$$\forall\, x \in [-a, a], \forall\, n \in \mathbb{N}, |f^{(n)}(x)| \leqslant M$$

b) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in [-a, a]$, on pose $R_N(x) = f(x) - \sum\limits_{n=0}^{N-1} k^{a_n} \times \dfrac{x^n}{n!}$.

Déterminer $\lim\limits_{N\to\infty} |R_N(x)|$.

c) Montrer que g_k est dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g_k'(x) = g_k(kx)$$

Solution

1. a) On démontre la propriété par récurrence sur n. Pour $n = 1$, on pose $a_1 = 0$ et $b_1 = 1$. Reste à établir l'hérédité. On suppose que f est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et qu'il existe $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = k^{a_n} f(k^{b_n} x)$.
Par dérivation d'une fonction composée, il s'ensuit que $f^{(n)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f^{(n+1)}(x) = k^{a_n + b_n} f(k^{b_n + 1} x).$$

On pose donc $a_{n+1} = a_n + b_n$ et $b_{n+1} = b_n + 1$.

b) La suite (b_n) est arithmétique de raison 1 et de premier terme $b_1 = 1$. Il s'ensuit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = n$.
En étudiant la suite télescopique (u_n) définie par $u_n = a_{n+1} - a_n = n$, on trouve que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f^{(n)}(0) = k^{a_n} f(0) = k^{a_n} = k^{n(n-1)/2}$, formule qui reste valable lorsque $n = 0$.

2. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = |u_n|$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $\dfrac{a_n}{a_{n-1}} < \ell + \varepsilon$, d'où $a_n < (\ell + \varepsilon) a_{n-1}$.
On choisit $\varepsilon > 0$ tel que $K = (\ell + \varepsilon) \in]0, 1[$.
Il s'ensuit que pour tout $n \geqslant n_0$, on a $0 < a_n < K^{n-n_0} a_{n_0}$. On conclut grâce au théorème de comparaison des séries à termes positifs.

b) De même qu'à la question précédente, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > \ell - \varepsilon > 1$. La série diverge grossièrement puisque son terme général ne tend pas vers 0.

3. a) On reconnaît que g_1 est la fonction exponentielle laquelle est définie sur $\mathbb{R}$.

b) Pour tout $\in \mathbb{R}$, on pose $u_n(x) = \dfrac{k^{a_n} x^n}{n!}$.
Si $x = 0$, $u_n(0) = 0$ si $n \geqslant 1$, et $u_0(0) = 0$. Ainsi, g_k est bien définie en 0 pour toutes les valeurs de k.
Si $x \neq 0$, $(u_n(x))$ est une suite de réels tous non nuls à laquelle on applique le résultat de la question 2.

• Si $|k| < 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|k|^n |x|}{n+1} = 0$. Donc, la série $\sum u_n(x)$ converge et g_k est définie sur $\mathbb{R}$.

• Si $|k| > 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|k|^n |x|}{n+1} = +\infty$. Donc, la série $\sum u_n(x)$ diverge et g_k est seulement définie en $x = 0$.

4. a) Par hypothèse, f est continue sur $[-a, a]$ donc bornée sur ce segment. Soit $M > 0$ un réel tel que pour tout $x \in [-a, a]$, $|f(x)| \leqslant M$. Ainsi, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel x :

$$|f^{(n)}(x)| = |k^{a_n} f(k^{b_n} x)| \leqslant |k^{a_n}| M \leqslant M$$

b) Pour tout $x \in [-a, a]$, on réécrit $R_N(x) = f(x) - \sum\limits_{k=0}^{N-1} \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.
En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction f à l'ordre $N - 1$ entre les points 0 et x, on trouve

$$|R_N(x) \leqslant \frac{|x|^N}{N!} M \leqslant \frac{|a|^N}{N!} M$$

On en déduit le résultat demandé par encadrement.

c) On déduit des questions précédentes que si f est solution du problème, pour tout $a > 0$ et pour tout $x \in [-a, a]$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} k^{a_n} \frac{x^n}{n!} = g_k(x).$$

Ainsi, $f = g_k$. Par suite, en reprenant les hypothèses faites sur f, on déduit que g_k est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g_k'(x) = f'(x) = f(kx) = g_k(kx)$$

Exercice 1.13.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f_n(x) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}$.

1. a) Montrer que pour tout réel $x \geqslant 0$, la série $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ est convergente. On note alors $F(x)$ sa somme.

b) Calculer $F(0)$ et $F(1)$.

c) On note f_n' la dérivée de la fonction f_n sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que pour tout réel $x \geqslant 0$, la série $\sum_{n\geq 1} f_n'(x)$ est convergente. On note alors $G(x)$ sa somme.

2. Soit φ la fonction définie par $\forall\, t > 0, \varphi(t) = \frac{1}{t}$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\forall\, (a,b) \in [n, +\infty[^2, |\varphi(b) - \varphi(a) - (b-a)\varphi'(a)| \leqslant \frac{(b-a)^2}{n^3}$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}^+$ un réel fixé. Soit $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $x + h \in \mathbb{R}^+$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = |f_n(x+h) - f_n(x) - hf_n'(x)|$.

Prouver la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} u_n$.

3. a) Montrer qu'il existe un réel K tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ et tout $h \in \mathbb{R}^*$ vérifiant $x + h \in \mathbb{R}^+$ on a :

$$\left|\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - G(x)\right| \leqslant K|h|$$

b) En déduire que F est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ avec $F' = G$.

4. a) Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Montrer que :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, f_{k+1}(x) \leqslant \int_k^{k+1} (\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x})\, dt \leqslant f_k(x)$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Montrer que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \int_1^{n+1} (\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x})\, dt \leqslant \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \leqslant \frac{x}{x+1} + \int_1^{n} (\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x})\, dt$$

c) En déduire que $\forall x \geqslant 0, \ln(x+1) \leqslant F(x) \leqslant \frac{x}{x+1} + \ln(x+1)$.

d) Déterminer un équivalent simple de F au voisinage de $+\infty$.

Solution

1. a) Pour tout réel $x \geqslant 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $f_n(x) = \dfrac{x}{n(n+x)}$.

Si $x = 0$, $f_n(0) = 0$ et la série converge.

Si $x > 0$, $f_n(x) = \dfrac{x}{n(n+x)} \underset{(n\to\infty)}{\sim} \dfrac{x}{n^2}$ et la série $\sum\limits_{n\geq 1} f_n(x)$ converge.

b) $F(0) = 0$.

Par télescopage $F(1) = \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{N} (\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}) = 1$.

c) Pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout $x \geqslant 0$, $f_n'(x) = \dfrac{1}{(x+n)^2} \underset{(\infty)}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$ et la série $\sum\limits_{n\geq 1} f_n'(x)$ est convergente.

2. a) La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$ ave $\varphi'(t) = -\dfrac{1}{t^2}$ et $\varphi''(t) = \dfrac{2}{t^3}$.
En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 à la fonction φ entre a et b, on obtient :

$$|\varphi(b) - \varphi(a) - (b-a)\varphi'(a)| \leqslant \frac{(b-a)^2}{2} \max_{t\in[a,b]} |\frac{2}{t^3}|$$

Comme $t \in [a,b] \subset [n, +\infty[$, on a : $\max\limits_{t\in[a,b]} |\dfrac{2}{t^3}| \leqslant \dfrac{2}{n^3}$.
On en déduit l'inégalité demandée.

b) On a :

$$\begin{aligned} f_n(x+h) - f_n(x) &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x+h} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+x} \\ &= \varphi(n+x) - \varphi(x+h+n). \end{aligned}$$

D'autre part, $f_n'(x) = \dfrac{1}{(x+n)^2} = -\varphi'(x+n)$.
On en déduit que :
$u_n = |\varphi(x+n) - \varphi(x+h+n) + h\varphi'(x+n)| = |\varphi(x+n+h) - \varphi(x+n) - h\varphi'(x+n)|$.
On applique alors l'inégalité de la question 2. a) avec $a = x+n$, $b = x+h+n \geqslant n$.
On obtient

$$u_n = |\varphi(x+n+h) - \varphi(x+n) - h\varphi'(x+n)| \leqslant \frac{h^2}{n^3} : \sum u_n \text{ converge}$$

3. a) On écrit :

$$|F(x+h) - F(x) - hG(x)| = |\sum_{n=1}^{\infty} (f_n(x+h) - f_n(x) - hf_n'(x))| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Comme $u_n \leqslant \dfrac{h^2}{n^3}$, on en déduit que :

$$|F(x+h) - F(x) - hG(x)| \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leqslant h^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

En divisant par $|h| > 0$ et en posant $K = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$, on obtient l'inégalité demandée.

b) Par comparaison, on trouve que $\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = G(x)$.
Ainsi, F est dérivable en x avec $F'(x) = G(x)$.

4. a) Soit $x \geqslant 0$ un réel fixé. La fonction $g_x : t \mapsto \frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et sa dérivée est $g'_x(t) = -\frac{1}{t^2} + \frac{1}{(t+x)^2} \leqslant 0$.
Ainsi, g_x est décroissante sur $]0, +\infty[$. D'où, pour tout $t \in [k, k+1]$,

$$g_x(k+1) \leqslant g_x(t) \leqslant g_x(k)$$

i.e.

$$\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+1+x} \leqslant \frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \leqslant \frac{1}{k} - \frac{1}{k+x},$$

ce qui donne $f_{k+1}(x) \leqslant \frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \leqslant f_k(x)$.
On intègre cette relation avec t variant de k à $k+1$. On trouve alors l'inégalité demandée.

b) En sommant, pour k variant de 1 à n, l'inégalité de droite, on trouve :

$$\int_1^{n+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) dt \leqslant \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$$

En sommant, pour k variant de 1 à $n-1$, l'inégalité de gauche, on obtient :

$$\sum_{k=2}^{n} f_k(x) \leqslant \int_1^{n} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) dt$$

d'où :

$$\sum_{k=1}^{n} f_k(x) \leqslant \int_1^{n} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) dt + f_1(x) = \int_1^{n} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) dt + \frac{x}{1+x}$$

En mettant bout à bout, on en déduit l'inégalité demandée.

c) Les inégalités de la question précédente donnent en calculant les intégrales :

$$\ln\left(\frac{n+1}{x+n+1}\right) + \ln(x+1) \leqslant \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \leqslant \frac{x}{x+1} + \ln\left(\frac{n}{x+n}\right) + \ln(x+1).$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on conclut.

d) On déduit de ce qui précède que, lorsque x tend vers $+\infty$:

$$F(x) \sim \ln(x+1) \sim \ln(x)$$

Exercice 1.14.

1. a) Déterminer l'ensemble D des réels x tels que l série de terme général $\mathrm{e}^{-n\,x}$ converge. Pour $x \in D$ on note $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-nx}$.

b) Déterminer un équivalent de $F(x)$ quand x tend vers la borne inférieure a de D. Déterminer la limite de $F(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

c) Étudier la convergence de l'intégrale $I = \displaystyle\int_a^{+\infty} F(x)dx$.

Soit α un réel strictement positif fixé.

2. a) Déterminer l'ensemble D' des réels x tels que la série de terme général $\exp[-n^\alpha x]$ converge.

Pour $x \in D'$ on note $G(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \exp[-n^\alpha\, x]$. On admet que G est continue sur D'.

b) Étudier le sens de variation de G.

3. a) Montrer que, pour tout $x \in D'$, on a :

$$\int_0^{+\infty} \exp[-t^\alpha x]dt \leqslant G(x) \leqslant 1 + \int_0^{+\infty} \exp[-t^\alpha x]dt.$$

b) En déduire un équivalent de $G(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures, qu'on exprimera à l'aide de la fonction G.
On pourra justifier et utiliser le changement de variable $t \mapsto x\, t^\alpha = u$.

c) Étudier la convergence de l'intégrale $J = \displaystyle\int_0^1 G(x)dx$.

4. a) Déterminer la limite de $G(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

b) Quelle est l'allure de la courbe représentative de G ?

Solution

1. a) C'est une série géométrique convergente si et seulement si $x > 0$, et :

$$\forall\, x \in D = \mathbb{R}_+^*, F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\mathrm{e}^{-x}\right)^n = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-x}}$$

b) On a $F(x) \underset{0^+}{\sim} \dfrac{1}{x}$ et $F(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

c) Ainsi I diverge.

2. a) Si $x \leqslant 0$, $\exp\left[-n^\alpha x\right]$ ne tend pas vers 0 et la série diverge ;
si $x > 0$, $n^2 \exp\left[-n^\alpha x\right] = \exp\left[-n^\alpha x + 2\ln n\right] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, par croissances comparées, donc la série converge (absolument). D'où :

$$D' = \mathbb{R}_+^*$$

b) $x < x' \implies \forall\, n, \exp\left[-n^\alpha x\right] > \exp\left[-n^\alpha x'\right]$, d'où la décroissance de G sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. a) Par décroissance de $t \mapsto \exp\big[-t^\alpha x\big]$:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \int_n^{n+1} \exp\big[-t^\alpha x\big]dt \leqslant \exp\big[-n^\alpha\, x\big] \text{ et}$$

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \exp\big[-n^\alpha x\big] \leqslant \int_{n-1}^{n} \exp\big[-t^\alpha x\big]dt$$

et en sommant :

$$\int_0^{+\infty} \exp[-t^\alpha x]dt \leqslant G(x) \leqslant 1 + \int_0^{+\infty} \exp[-t^\alpha x]dt$$

b) Pour $x > 0$, $t \mapsto xt^\alpha = u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ bijectif de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc :

$$\int_0^{+\infty} \exp\big[-t^\alpha x\big]dt = \frac{1}{\alpha x^{1/\alpha}} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u} u^{1/\alpha - 1} du = \frac{\Gamma(1/\alpha)}{\alpha x^{1/\alpha}} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty.$$

D'où

$$G(x) \underset{0^+}{\sim} \frac{\Gamma(1/\alpha)}{\alpha x^{1/\alpha}}$$

c) Donc, par la règle de Riemann, J converge si et seulement si $1/\alpha < 1$, *i.e.* $\alpha > 1$ (car $\alpha > 0$).

4. a) On a : $1 = \mathrm{e}^{0^\alpha x} \leqslant G(x) \leqslant 1 + \dfrac{\Gamma(1/\alpha)}{\alpha x^{1/\alpha}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

b) On en déduit aisément l'allure de la courbe de G.

Exercice 1.15.

On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin t}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$

1. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 [f(t)]^n dt$ converge. On pose alors $J_n = \displaystyle\int_0^1 [f(t)]^n dt$.

b) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $J_n \geqslant \dfrac{1}{n+1}$

2. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} [f(t)]^n dt$ converge.

On pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} [f(t)]^n dt$ et $K_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} [f(t)]^n dt$.

3. Montrer que l'intégrale I_1 n'est pas absolument convergente.

4. a) Montrer que pour tout entier $p \geqslant 1$, $K_{2p} + K_{2p+1} \geqslant 0$.

b) Montrer que la série de terme général I_n est divergente.

Solution

1. a) Un développement limité de la fonction sinus montre que la fonction f est continue en 0.

b) Montrons que $\sin t \geq t - t^2$ sur $]0,1]$. Pour cela on étudie $\varphi : t \mapsto \sin t - t + t^2$ sur cet intervalle.
Comme $\varphi'(t) = \cos t - 1 + 2t$, $\varphi''(t) = 2 - \sin t > 0$, φ' croît et est telle que $\varphi'(0) = 0$, donc φ est bien positive, et :

$$J_n \geq \int_0^1 (1-t)^n \, dt = \frac{1}{n+1}$$

2. $\star$ Pour $n \geqslant 2$, l'intégrale proposée est absolument convergente puisque :
$\left|\frac{\sin t}{t}\right|^n \leqslant \frac{1}{t^n}$ sur $[1, +\infty[$.

$\star$ Pour $n = 1$, la fonction f est continue sur $[1, +\infty[$ et une intégration par parties donne : $\displaystyle\int_1^A \frac{\sin t}{t}\, dt = \big[-\frac{\cos t}{t}\big]_1^A + \int_1^A \frac{\cos t}{t^2} dt.$

La seconde intégrale est absolument convergente et $\lim\limits_{A\to+\infty} \dfrac{\cos A}{A} = 0$, d'où la convergence de l'intégrale de f.

3. La fonction f n'est pas d'intégrale absolument convergente. En effet :

$$\begin{aligned}\int_0^{n\pi} \big|\frac{\sin t}{t}\big|\, dt &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \big|\frac{\sin t}{t}\big|\, dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{\pi} \frac{|\sin(t+k\pi)|}{t+k\pi}\, dt \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{t+k\pi}\, dt \geqslant \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)\pi} \int_0^{\pi} \sin t dt = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{(k+1)\pi}\end{aligned}$$

qui est la somme partielle d'une série divergente.

Seconde solution : On remarque que $|\sin t| \geqslant \sin^2 t = \frac{1}{2}(1 - \cos 2t)$. Donc

$$f(t) \geqslant \frac{1}{2t} - \frac{\cos 2t}{2t}$$

L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{2t}$ diverge, alors que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{cos2t}{2t} dt$ converge (par intégration par parties). On conclut alors.

4. a) Pour tout $n \geqslant 1$, K_n existe puisque I_n et J_n existent. On a :

$$K_{2p} + K_{2p+1} = \int_1^{+\infty} \big(\frac{\sin t}{t}\big)^{2p} \big(1 + \frac{\sin t}{t}\big) dt \geqslant 0$$

puisque $1 + f(t) \geqslant 0$ pour tout $t \geqslant 0$.

b) Par les questions précédentes :

$$S_{2N+1} = \sum_{p=1}^{N} (I_{2p} + I_{2p+1}) \geqslant \sum_{p=3}^{N+2} \frac{1}{p}$$

ce qui montre que la série $\sum I_n$ diverge.

Exercice 1.16.

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction deux fois dérivable et α un réel strictement positif. On suppose que f est majorée et que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $f''(t) \geqslant \alpha^2 f(t)$.

1. Montrer que f est convexe.

2. Montrer que f' est à valeurs dans $\mathbb{R}_-$.

3. a) Montrer que f admet une limite finie en $+\infty$.

   b) Montrer que f tend vers 0 en $+\infty$.

   c) Montrer que f' tend vers 0 en $+\infty$.

4. a) Montrer que la fonction $\alpha^2 f^2 - f'^2$ est croissante.

   b) En déduire le signe de $\alpha f + f'$.

5. Montrer que pour tout réel positif t, on a : $f(t) \leqslant f(0)\mathrm{e}^{-\alpha t}$.

Solution

1. Comme f est à valeurs positives et α est réel, pour tout réel t, $f''(t) \geqslant 0$. Ainsi, f' est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

2. Supposons qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que $f'(x_0) > 0$. Alors, comme $f'' \geqslant 0$, f est convexe donc la représentation graphique est au-dessus de ses tangentes et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$f(x) \geqslant f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Ainsi, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Comme nous avons supposé que f est majorée, on obtient une contradiction. Finalement, pour tout $x \geqslant 0$, $f'(x) \leqslant 0$.

3. a) D'après la question précédente, f est une fonction décroissante. Ainsi, comme f est minorée par 0, d'après le théorème de la limite monotone, f admet une limite ℓ en $+\infty$.

b) Comme f est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, $\ell \geqslant 0$. Supposons par l'absurde que $\ell > 0$. Alors, d'après le théorème des accroissements finis appliqués à f' sur $[0, x]$, il existe $\xi \in]0, x[$ tel que :

$$f'(x) - f'(0) = x f''(\xi) \geqslant x\alpha^2 f(\xi) \geqslant x\alpha^2 \ell$$

Ainsi, $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = +\infty$. Or, comme f' est majorée par 0, on obtient une contradiction et $\ell = 0$.

c) Comme f' est croissante et majorée par 0, elle admet une limite finie $\tilde{\ell}$ en 0. Supposons que $\tilde{\ell} \neq 0$. Alors, en appliquant le théorème des accroissements finis à f sur $[0, x]$, il existe $\xi \in]0, x[$ tel que :

$$f(x) - f(0) = xf'(\xi) \leqslant x\tilde{\ell}$$

Ainsi, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, ce qui est impossible et donc $\tilde{\ell} = 0$.

4. a) On remarque que $\alpha^2 f^2 - f'^2$ est dérivable et sa dérivée vaut $2f'(\alpha^2 f - f'')$. Ainsi, ce produit étant positif, la fonction $\alpha^2 f^2 - f'^2$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

b) D'après les questions précédentes, $\lim\limits_{+\infty}(\alpha^2 f^2 - f'^2) = 0$. Ainsi cette fonction est négative, et :
$\alpha^2 f^2 \leqslant f'^2 \implies \alpha|f| \leqslant |f'| \implies \alpha f \leqslant -f' \implies \alpha f + f' \leqslant 0$.

5. Soit $g : t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{\alpha t}$. D'après la question précédente, g' est à valeurs négatives. Ainsi, g est décroissante et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $f(t) \leqslant f(0)\mathrm{e}^{-\alpha t}$.

Exercice 1.17.

A tout couple (a, b) de réels positifs ou nuls, on associe les suites (a_n) et (b_n) définies par :

$$a_0 = a, b_0 = b, \forall\, n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \text{ et } b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$$

1. a) Montrer que ces suites sont ainsi bien définies et telles que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$.

b) Étudier la monotonie des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

c) Montrer que les suites (a_n) et (b_n) convergent vers une limite commune que l'on ne cherchera pas à expliciter mais que l'on notera $\mathcal{L}(a, b)$.

2. Montrer les propriétés suivantes :

a) Pour tout $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$, $\mathcal{L}(a, b) = \mathcal{L}(b, a)$.

b) Pour tout $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ et $\lambda \geqslant 0$, $\mathcal{L}(\lambda a, \lambda b) = \lambda \mathcal{L}(a, b)$.

c) Pour tout $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$, $\sqrt{ab} \leqslant \mathcal{L}(a, b) \leqslant \frac{1}{2}(a + b)$.

3. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $\forall\, x \geqslant 0, F(x) = \mathcal{L}(1, x)$.

a) Calculer $F(0)$ et $F(1)$.

b) Montrer que F est une fonction positive et croissante sur $\mathbb{R}^+$.

c) Montrer les propriétés suivantes :

i) Pour tout $x \geqslant 0$, $\sqrt{x} \leqslant F(x) \leqslant \frac{1}{2}(1 + x)$.

ii) Pour tout $x > 0$, $F(x) = xF\big(\frac{1}{x}\big)$.

iii) Pour tout $x > 0$, $F(x) = \sqrt{x}\, F\big(\frac{1+x}{2\sqrt{x}}\big)$.

4. a) Déterminer la limite de $F(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

b) Étudier la continuité et la dérivabilité de F en 1.

Solution

1. a) On commence par montrer par récurrence la propriété : « a_n et b_n existent avec $a_n \geqslant 0$ et $b_n \geqslant 0$ ».
Puis en remarquant que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$b_n - a_n = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2} - \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}} = \frac{(\sqrt{a_{n-1}} - \sqrt{b_{n-1}})^2}{2} \geqslant 0$$

on obtient les inégalités demandées.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$a_{n+1} - a_n = \sqrt{a_n}(\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n}) \geqslant 0 \text{ et } b_{n+1} - b_n = \frac{a_n - b_n}{2} \leqslant 0$$

Ainsi, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

c) $\star$ La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée par b_1. Donc, la suite (a_n) converge. Notons ℓ_a sa limite
$\star$ De même, la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée par a_1. Donc, la suite (b_n) converge. Notons ℓ_b sa limite.
$\star$ En passant à la limite dans les égalités définissant (a_n) et (b_n), on trouve :

$$\ell_b = \frac{1}{2}(\ell_a + \ell_b)$$

d'où $\ell_a = \ell_b$.

2. a) Considérons les deux nouvelles suites (a'_n) et (b'_n) définies par $a'_0 = b$, $b'_0 = a$ et les mêmes relations de récurrence $(**)$. D'après ce qui précède, les suites (a'_n) et (b'_n) convergent vers une même limite appelée $\mathcal{L}(b,a)$.
Or, on montre par récurrence que pour tout $n \geqslant 1$, $a'_n = a_n$ et $b'_n = b_n$. Donc, (a'_n) et (b'_n) convergent aussi vers $\mathcal{L}(a,b)$.
Par unicité de la limite, on en déduit que $\mathcal{L}(a,b) = \mathcal{L}(b,a)$.

b) On considère de même les deux nouvelles suites (a''_n) et (b''_n) définies par $a''_0 = \lambda a$, $b''_0 = \lambda b$ et les relations de récurrence $(**)$. D'après ce qui précède, les suites (a''_n) et (b''_n) convergent vers une même limite appelée $\mathcal{L}(\lambda a, \lambda b)$.
Or, on montre par récurrence que pour tout $n \geqslant 0$, $a''_n = \lambda a_n$ et $b''_n = \lambda b_n$. Donc, (a''_n) et (b''_n) convergent aussi vers $\lambda\mathcal{L}(a,b)$.
Par unicité de la limite, on en déduit que $\mathcal{L}(\lambda a, \lambda b) = \lambda\mathcal{L}(a,b)$.

c) Pour tout $n \geqslant 1$, $a_1 \leqslant a_n \leqslant \mathcal{L}(a,b) \leqslant b_n \leqslant b_1$.
Or, $a_1 = \sqrt{ab}$ et $b_1 = \frac{1}{2}(a+b)$. On obtient ainsi les inégalités souhaitées.

3. a) $\star$ $F(0)$ est la limite commune $\mathcal{L}(1,0)$ aux suites (a_n) et (b_n) lorsque $a = 1$ et $b = 0$. On montre dans ce cas que pour tout $n \geqslant 1$, $a_n = 0$ et $b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n$. Comme $b_1 = \frac{1}{2}$, on en déduit que pour tout $n \geqslant 1$, $b_n = (\frac{1}{2})^{n-1}$. Les deux suites convergent donc vers 0 et $F(0) = 0$.

$\star$ $F(1)$ est la limite $\mathcal{L}(1,1)$ commune aux suites (a_n) et (b_n) lorsque $a = 1$ et $b = 1$. L'encadrement $\sqrt{ab} \leqslant \mathcal{L}(a,b) \leqslant \frac{1}{2}(a+b)$ donne alors directement $F(1) = \mathcal{L}(1,1) = 1$.

b) $F(x)$ est la limite $\mathcal{L}(1,x)$ commune aux suites (a_n) et (b_n) lorsque $a = 1$ et $b = x$.
L'encadrement $\sqrt{ab} \leqslant \mathcal{L}(a,b) \leqslant \frac{1}{2}(a+b)$ donne $F(x) = \mathcal{L}(1,x) \geq \sqrt{x} \geqslant 0$.
Donc, F est positive sur $\mathbb{R}^+$.
Reste à prouver sa croissance.
Soit $0 \leqslant y \leqslant x$ deux réels.
Soient, d'une part, (a_n) et (b_n) les deux suites définies par $a_0 = 1$, $b_0 = x$ et les relations de récurrence $(**)$.
Soient, d'autre part, (c_n) et (d_n) les deux suites définies par $c_0 = 1$, $d_0 = y$ et les relations de récurrence $(**)$.
On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n \leqslant a_n$ et $d_n \leqslant b_n$.
En passant à la limite, on trouve que $\lim\limits_{n\to\infty} c_n \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, d'où $F(y) = \mathcal{L}(1,y) \leqslant \mathcal{L}(1,x) = F(x)$.

c) i) On utilise la relation « $\sqrt{ab} \leqslant \mathcal{L}(a,b) \leqslant \frac{1}{2}(a+b)$ » avec $a = 1$ et $b = x$. Cela donne exactement la série d'inégalités souhaitée.

ii) On utilise cette fois la relation « $\mathcal{L}(\lambda a, \lambda b) = \lambda \mathcal{L}(a,b)$ » avec $a = 1$, $b = x$ et $\lambda = \sqrt{x}$.
On obtient $F(x) = \mathcal{L}(1,x) = x\mathcal{L}(\frac{1}{x},1) = x\mathcal{L}(1,\frac{1}{x}) = xF(\frac{1}{x})$.

iii) On utilise encore la relation « $\mathcal{L}(\lambda a, \lambda b) = \lambda \mathcal{L}(a,b)$ » avec $a = 1$, $b = \dfrac{1+x}{2\sqrt{x}}$ et $\lambda = \sqrt{x}$.
On trouve : $\sqrt{x}F(\dfrac{1+x}{2\sqrt{x}}) = \sqrt{x}\mathcal{L}(1, \dfrac{1+x}{2\sqrt{x}}) = \mathcal{L}(\sqrt{x}, \dfrac{1+x}{2})$
On considère alors, d'une part, les suites (a_n) et (b_n) définies par $a_0 = 1$ $b_0 = x$ et la relation de récurrence $(**)$ et, d'autre part, les suites (a'_n) et (b'_n) définies par $a'_0 = \sqrt{x}$, $b'_0 = \dfrac{1+x}{2}$ et la relation de récurrence $(**)$.
Une récurrence montre que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = a'_n$ et $b_{n+1} = b'_n$.
Par conséquent, $\lim\limits_{n\to\infty}(a'_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(a_n)$ et $\lim\limits_{n\to\infty}(b'_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(b_n)$.
D'où $\mathcal{L}(\sqrt{x}, \dfrac{1+x}{2}) = \mathcal{L}(1,x) = F(x)$.
On en déduit la relation demandée.

4. a) Comme $F(x) \geqslant \sqrt{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, par minoration $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$.

b) Soit $T_1(x) = \dfrac{F(x) - F(1)}{x-1}$.

Avec les relations obtenues ci-dessus, on trouve :

$$\sqrt{x} - 1 \leqslant F(x) - 1 \leqslant \frac{x-1}{2}$$

• Si $x > 1$, on obtient en divisant par $x - 1 > 0$: $\dfrac{1}{\sqrt{x}+1} \leqslant T_1(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$.

• Si $x < 1$, on obtient en divisant par $x - 1 < 0$: $\dfrac{1}{\sqrt{x}+1} \geqslant T_1(x) \geqslant \dfrac{1}{2}$.

Ainsi, par encadrement, $\lim\limits_{x\to1^+} T_1(x) = \lim\limits_{x\to1^-} T_1(x) = \dfrac{1}{2}$. La fonction F est donc dérivable (et par suite continue) en 1 avec $F'(1) = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 1.18.

1. Déterminer les valeurs de x réel pour lesquelles l'intégrale

$$\int_{1/x}^{x} \frac{t}{\sqrt[3]{t^3-1}}dt$$

est convergente.

On note alors $G(x) = \displaystyle\int_{1/x}^{x} \frac{t}{\sqrt[3]{t^3-1}}dt$.

2. Montrer que G admet un prolongement par continuité en 1.

3. Montrer que G, ainsi prolongée, est continue sur $\mathbb{R}^*$. Montrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ et calculer $G'(x)$.

4. La fonction G, prolongée par continuité en 1, est-elle dérivable en 1 ?

5. a) Étudier les variations de G.

b) Étudier les limites de G aux bornes de son domaine de définition.

c) Montrer qu'au voisinage de $+\infty$, la représentation graphique de G admet une asymptote d'équation de la forme $y = x + \beta$ et exprimer β.

d) Montrer qu'au voisinage de $-\infty$, la représentation graphique de G admet une asymptote d'équation de la forme $y = x + \alpha$ et exprimer α.

Solution

1. G n'est pas définie en 0.

L'application $\varphi : t \mapsto \dfrac{t}{(t^3-1)^{1/3}}$ est continue sur l'intervalle $]1/x, x[$ à condition que $x \neq 0$ et $1 \notin]1/x, x[$. Ainsi G est-elle déjà définie sur $D =]-\infty, 0[$.

Pour $x > 0$ et $x \neq 1$, le réel 1 appartient toujours à l'intervalle (ouvert) d'intégration $]1/x, x[$ mais, au voisinage de 1, $\varphi(t) \sim \psi(t) = \dfrac{C}{(t-1)^{1/3}}$, dont l'intégrale est convergente sur $]1, 3/2]$ et sur $[1/2, 1[$. L'intégrale définissant $G(x)$ est donc deux fois convergente et $G(x)$ existe

Ainsi f est-elle définie sur $\mathbb{R}^* \setminus \{1\}$.

2. On vient d'expliquer que $\displaystyle\int_1^a \frac{1}{(t-1)^{1/3}} dt$ est convergente, tant pour $a > 1$ que pour $a < 1$ (Riemann). Donc $\lim\limits_{a\to 1} \displaystyle\int_1^a \frac{1}{\sqrt[3]{t-1}}\, dt = 0$ et $\lim\limits_{x\to 1} G(x) = 0$.

3. Notons H une primitive de φ sur chaque intervalle I de D.
Pour tout $x \in I, G(x) = H(x) - H(1/x)$. Ainsi la fonction G est continue sur I. On vient de la prolonger par continuité en $x = 1$: donc G est continue sur $\mathbb{R}^*$.

On a également, pour $x \neq 0, 1$, $G'(x) = \varphi(x) + \dfrac{1}{x^2}\varphi(1/x) = \dfrac{(x^3-1)^{2/3}}{x^2}$

4. Pour $x = 1$, il suffit d'utiliser le théorème des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$: ici G est continue en 1 et $\lim\limits_{x\to 1} G'(x) = 0$. Donc G est dérivable en $x = 1$ et $G'(1) = 0$.

5. a) Au vu de l'expression de $G'(x)$, on a $G'(x) \geq 0$.

b) L'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} \varphi(t)dt$ diverge en $+\infty$, car $\varphi(t) \sim 1$ au voisinage de $+\infty$.
Par croissance de G, il vient $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = +\infty$. De même $\lim\limits_{x\to-\infty} G(x) = -\infty$.
De même, lorsque x tend vers 0, $1/x$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ et les limites sont $\lim\limits_{x\to 0^+} G(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^-} G(x) = -\infty$.

c) On remarque que $x - \dfrac{1}{x} = \displaystyle\int_{1/x}^{x} dt$. Donc

$$G(x) - x = \frac{1}{x} + \int_{1/x}^{x} \Big(\frac{t}{(t^3-1)^{1/3}} - 1\Big)dt$$

La fonction à intégrer est sans problème pour la borne 0 et au voisinage de $+\infty$, on écrit :
$\dfrac{t}{(t^3-1)^{1/3}} - 1 = (1 - \dfrac{1}{t^3})^{-1/3} - 1 \underset{(+\infty)}{\sim} \dfrac{1}{3t^3}$, ce qui donne la convergence de l'intégrale associée pour la borne infinie.
En notant $\beta = \displaystyle\int_0^{+\infty} \Big(\frac{t}{(t^3-1)^{1/3}} - 1\Big)dt$, on a donc $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x) - x = \beta$.

d) On procède de la même manière en $-\infty$, en remarquant que l'on a encore $\sqrt[3]{t^3} = t$.

2

ALGÈBRE

Exercice 2.01.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{M}_n$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.

1. Montrer que la forme linéaire tr définie sur $\mathcal{M}_n$ en posant :

$$\text{si } M = (m_{i,j})_{0 \leq i,j \leq n}, \text{tr}(M) = \sum_{k=1}^{n} m_{k,k}$$

est telle que $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ pour tout couple de matrices $(A, B) \in \mathcal{M}_n^2$.

2. Dans cette question, on suppose que A est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n$.

a) Montrer qu'il existe une matrice P orthogonale et une matrice D diagonale de la forme $D = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ telles que $A = PD^tP$.

b) Montrer que $\text{tr}(A) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$.

c) On suppose que A est non nulle. Vérifier que $\text{tr}(A^2) > 0$.

d) Soit $(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$, où $m \in \mathbb{N}^*$. Établir l'inégalité :

$$(x_1 + \cdots + x_m)^2 \leqslant m(x_1^2 + \cdots + x_m^2)$$

e) Montrer que : $\text{rg}(A) \geqslant \dfrac{[\text{tr}(A)]^2}{\text{tr}(A^2)}$.

3. Si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est une matrice de $\mathcal{M}_n$, montrer que $\text{tr}({}^tAA) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}^2$.

4. En utilisant le plus possible les résultats précédents, déterminer le rang des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 3 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 4 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Solution

1. On a
$\mathrm{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{h=1}^{n} a_{i,h}b_{h,i} = \sum_{h=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{h,i}a_{i,h} = \mathrm{tr}(BA)$.

2. a) D'après le cours, il existe une matrice orthogonale $P \in \mathcal{M}_n$ et une matrice diagonale (les éléments diagonaux étant les valeurs propres de A répétées selon la dimension du sep associé) telles que $A = PD^tP$.

b) Si $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ est une liste des valeurs propres ainsi répétées, On choisit D de sorte que $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$
En utilisant la question 1, on obtient :

$$\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(P(D^tP)) = \mathrm{tr}((D^tP)P) = \mathrm{tr}(D) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$$

c) On sait qu'une liste des valeurs propres de A^2 est alors $\lambda_1^2, \ldots, \lambda_n^2$. Il résulte de la question précédente (A^2 est symétrique) que $\mathrm{tr}(A^2) = \lambda_1^2 + \cdots + \lambda_n^2 > 0$, car $A \neq 0$ montre que l'une de ses valeurs propres est non nulle.

d) Cette inégalité s'obtient en appliquant celle de Cauchy-Schwarz. En effet, on a :
$(x_1 + \cdots + x_m)^2 = (1\times x_1 + \cdots + 1\times x_m)^2 \leqslant (1 + \cdots + 1)\times(x_1^2 + \cdots + x_m^2)$
Soit :

$$(x_1 + \cdots + x_m)^2 \leq m(x_1^2 + \cdots + x_m^2)$$

e) Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres non nulles de A (toujours répétées selon les dimensions...). Comme A et A^2 sont symétriques, avec la question précédente il vient :

$$(\mathrm{tr}(A))^2 = (\lambda_1 + \cdots + \lambda_r)^2 \leqslant r(\lambda_1^2 + \cdots + \lambda_r^2) = \mathrm{rg}(A)\,\mathrm{tr}(A^2)$$

D'où l'inégalité souhaitée.

3. Si $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$, on a :

$$\mathrm{tr}({}^tAA) = \sum_{j=0}^{n}({}^tAA)_{j,j} = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{n}({}^tA)_{j,i}(A)_{i,j} = \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}^2$$

4. On a $\mathrm{tr}(A) = 10$ et comme A est symétrique on voit que $\mathrm{tr}(A^2) = 30 + \frac{15}{8} = \frac{255}{8}$. Il résulte alors de 2. e) que

$$\mathrm{rg}(A) \geqslant \frac{[\mathrm{tr}(A)]^2}{\mathrm{tr}(A^2)} = \frac{800}{255} = \frac{160}{51} > 3,$$

par conséquent on a nécessairement $\mathrm{rg}(A) = 4$. La matrice A est donc inversible.

Pour la matrice B, on trouve $\mathrm{tr}(B) = 6$ et $\mathrm{tr}(B^2) = \frac{29}{2}$.

D'où $\mathrm{rg}(B) \geqslant \frac{72}{29} \simeq 2{,}48$, il s'ensuit que $\mathrm{rg}(B) \geqslant 3$. Comme la première colonne et la dernière sont identiques, on a donc $\mathrm{rg}(B) = 3$.

Exercice 2.02.

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices carrées à coefficients complexes d'ordre n, où n est un entier supérieur ou égal à 2 et on note I la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Dans cette question, on suppose $n = 2$.

a) Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, que l'on écrit sous la forme $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Prouver que $A^2 = (a+d)A + (bc - ad)I$.

b) Montrer que A est inversible si et seulement si $bc - ad \neq 0$. Déterminer alors l'expression de A^{-1}.

c) Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice A^n appartient au sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ engendré par les matrices I et A.

d) On suppose que $a + d \neq 0$. Montrer que si une matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ commute avec A^2, alors elle commute avec la matrice A. Donner un contre-exemple simple à cette propriété lorsque $a + d = 0$.

2. On revient au cas général. On considère une matrice A, qui n'est pas proportionnelle à l'identité, vérifiant la relation $A^2 = bA + I$, pour un certain b réel.

On note λ_1 et λ_2 les racines complexes du polynôme $X^2 - bX - 1$.

a) Montrer que $\lambda_1 \neq \lambda_2$ et que λ_1 et λ_2 sont des valeurs propres de A.

On pose : $p(X) = \frac{X - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}$ et $q(X) = \frac{X - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}$.

b) Montrer que $P = p(A)$ (resp. $Q = q(A)$) est un projecteur dont l'image est contenue dans le sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ_1 (resp. λ_2). Montrer que A est diagonalisable.

c) On suppose que $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$. Montrer que si une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ commute avec A^2 alors elle commute avec la matrice A.

Solution

1. a) Il suffit de développer le membre de droite et de constater que l'on trouve A^2.

b) Supposons que $bc-ad \neq 0$, on écrit $A(A-(a+d)I) = (bc-ad)I$ et on en déduit immédiatement que A est inversible et que $A^{-1} = (bc-ad)^{-1}(A-(a+d)I)$.
Si A est inversible, supposons que $bc-ad=0$, alors la relation trouvée en 1. a) implique que $A=(a+d)I$ et par suite que $a=b=c=d=0$ ce qui est absurde.

De plus, lorsque A est inversible on a vu que $A^{-1} = (bc-ad)^{-1}(A-(a+d)I)$, on a donc :

$$A^{-1} = \frac{1}{bc-ad}\begin{pmatrix} -d & b \\ c & -a \end{pmatrix}$$

c) On procède par récurrence. Pour $n=0,1,2$ c'est évident. Supposons que $A^k = x_kA + y_kI$ pour $n \geqslant k \geqslant 2$, alors en multipliant par A^{n-1} la relation vérifiée par A on trouve :

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= (a+d)A^n + (bc-ad)A^{n-1} \\ &= (a+d)\left[x_nA + y_nI\right] + (bc-ad)\left[x_{n-1}A + y_{n-1}I\right] \\ &= \left((a+d)x_n + (bc-ad)x_{n-1}\right)A + \left((a+d)y_n + (bc-ad)y_{n-1}\right)I \end{aligned}$$

Donc $A^{n+1} \in \text{Vect}\{I, A\}$ et la conclusion.

d) Si $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ commute avec A^2, on en déduit que :

$$A^2B = (a+d)AB + (ad-bc)B = BA^2 = (a+d)BA + (ad-bc)B$$

Par suite, on a $(a+d)AB = (a+d)BA$ et par conséquent $AB=BA$ puisque $a+d \neq 0$.

Dans le cas où $a+d=0$, un contre-exemple simple est donné en prenant :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

En effet B commute évidemment avec $A^2 = I$ mais ne commute pas avec A.

2. a) Comme $X^2 - bX - 1 = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)$, on voit que si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ alors $-1 = \lambda_1\lambda_2 = \lambda^2$ et $b = 2\lambda$.
D'où $\lambda = \pm i$ et par suite $b = \pm 2i$, ce qui est impossible puisque $b \in \mathbb{R}$.
On a donc bien $\lambda_1 \neq \lambda_2$.
Supposons par exemple que λ_1 n'est pas une valeur propre de A, alors la matrice $A-\lambda_1 I$ est inversible. Comme $0 = A^2 - bA - I = (A-\lambda_1 I)(A-\lambda_2 I)$, en multipliant par $(A-\lambda_1 I)^{-1}$ on en déduit que $A-\lambda_2 I = 0$ ce qui est contradictoire avec le fait que A n'est pas un multiple de l'identité. On raisonnerait d'une façon analogue pour λ_2.

b) C'est évident.

c) De la relation vérifiée par A, on déduit immédiatement que :

$$PQ = p(A)q(A) = 0$$

Comme $p(X) + q(X) = 1$, on a $P + Q = p(A) + q(A) = I$ et par suite $P^2 = P^2 + PQ = P$, d'où $P^2 = P$.
De la même manière, on montre que Q est un projecteur.
Observons que $(A - \lambda_1 I)P = \dfrac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}(A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I) = 0$.
Il en résulte que $\mathrm{Im}(P) \subseteq \mathrm{Ker}(A - \lambda_1 I)$.
On montre d'une façon analogue que $\mathrm{Im}(P) \subseteq \mathrm{Ker}(A - \lambda_1 I)$.

Par suite $E = \mathrm{Im}(P) \oplus \mathrm{Ker}(I - P) \subseteq \mathrm{Ker}(A - \lambda_1 I) \oplus \mathrm{Ker}(A - \lambda_2 I)$, il s'ensuit que $\mathrm{Ker}(A - \lambda_1 I) \oplus \mathrm{Ker}(A - \lambda_2 I) = E$.

D'après un théorème du cours, ceci entraîne que A est diagonalisable.

d) Si la somme des deux valeurs propres est non nulle, on voit que $b = \lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$ et par suite la relation $A^2 = bA + I$ implique (comme en 1. d)) que B commute avec la matrice A.

Exercice 2.03.

Pour tout entier $n \geqslant 2$, on note $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans $\mathbb{R}$, I la matrice identité d'ordre n.

A chaque matrice $U = (u_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ de E, on associe l'application T_U de E dans $\mathbb{R}$, qui à une matrice M associe la somme des éléments diagonaux du produit UM :

$$M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \mapsto T_U(M) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} u_{i,j} m_{j,i}$$

1. a) Montrer que $T_U \in E^*$.

b) Déterminer la dimension de $\mathrm{Ker}(T_U)$.

c) Montrer que pour toutes matrices U et M de E, on a :

$$T_U(M) = T_M(U) = T_I(UM) = T_I(MU)$$

2. Un cas particulier : $n = 2$ et $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Montrer que $\mathrm{Ker}(T_U)$ est l'ensemble des matrices de E dont la somme des 4 coefficients est nulle et qu'il contient au moins une matrice inversible.

On suppose désormais que $n \geqslant 2$ et que U est une matrice non nulle.

3. Montrer que l'application $\varphi : E \to E^*, U \mapsto \varphi(U) = T_U$, est une application linéaire bijective.

4. Soit H un hyperplan de E, *i.e.* un sous-espace de E de dimension $n^2 - 1$.

a) Montrer que pour toute matrice A non nulle de E qui n'appartient pas à H on a : $E = H \oplus \text{Vect}(A)$.

b) Prouver l'existence d'une matrice U de E telle que $H = \text{Ker}(T_U)$. On note $r = \text{rg}(U)$.

c) Soit les matrices de E : $P = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

et $R_r = (r_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, avec $\begin{cases} r_{i,i} = 1 & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant r \\ r_{i,j} = 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Montrer que P est une matrice inversible appartenant à $\text{Ker}(T_{R_r})$

d) En déduire que tout hyperplan H de E contient une matrice inversible. (On pourra utiliser sans démonstration le fait qu'il existe deux matrices inversibles S_1 et S_2 telles que : $S_1 U S_2 = R_r$ et considérer la matrice $M = S_2 P S_1$.)

Solution

1. a) On a $T_U(M) \in \mathbb{R}$. de plus :

$$T_U(M + \lambda N) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} u_{i,j}[m_{j,i} + \lambda n_{j,i}] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} u_{i,j} m_{j,i} + \lambda \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} u_{i,j} n_{j,i}$$
$$= T_U(M) + \lambda T_U(N).$$

ce qui montre que $T_U \in E^*$.

b) Si U est la matrice nulle, $\text{Ker}(T_U) = E$ entraîne $\dim(\text{Ker}(T_U)) = n^2$. Sinon $\text{Ker}(T_U)$ est un hyperplan de E en tant que noyau d'une forme linéaire non nulle (car $T_U({}^tU) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} u_{i,j}^2 \neq 0$) et $\dim(\text{Ker}(T_U)) = n^2 - 1$.

c) $\star$ On écrit :

$$T_U(M) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} u_{i,j} m_{j,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{j,i} u_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} m_{j,i} u_{i,j} = T_M(U).$$

$\star$ $T_{Id}(UM) = T_U(M)$ et $T_{id}(MU) = T_M(U)$

2. Si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ alors :

$$UM = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a+c & b+d \end{pmatrix}$$

Donc $T_U(M) = a + b + c + d$ et $\text{Ker}(T_U) = \{M \in E \ / \ a + b + c + d = 0\}$.

Par exdmple la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est bien inversible.

3. $\star$ Pour tout $M \in E$:
$\varphi(U+\lambda V)(M) = T_{U+\lambda V}(M) = T_M(U+\lambda V) = T_M(U) + \lambda T_M(V)$
$= T_U(M) + \lambda T_V(M) = [\varphi(U) + \lambda\varphi(V)](M)$
$\star$ $\varphi(U) = 0_{E^*}$ si et seulement si $\forall\, M \in E, T_U(M) = 0$ soit si et seulement si $U = O_E$ et φ est injective.
Comme on est en même dimension finie, au départ et à l'arrivée :

$\varphi : E \to E^*,\ U \mapsto \varphi(U) = T_U$ est un isomorphisme.

4. Soit H un hyperplan de E.

a) On a $H \cap \text{Vect}(A) = 0_E$ sinon $A \in H$ absurde.
Ainsi $\dim(H \oplus \text{Vect}(A)) = n^2 - 1 + 1 = n^2 = \dim(E)$. Donc $E = H \oplus \text{Vect}(A)$.

b) Soit $N \in E, N = M + \lambda A$ avec $M \in H$. On définit une forme linéaire ℓ de E^* par : $\ell(N) = \lambda$. On peut vérifier que ℓ est linéaire et que $H = \text{Ker}\,\ell$.
Comme φ est unisomorphisme, on a l'existence d'une matrice U de E telle que $\ell = T_U$, d'où $H = \text{Ker}(T_U)$.

c) On a $\text{rg}(P) = n$ si et seulement si P est inversible et

$$T_{R_r}(P) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} r_{i,j}p_{j,i} = \sum_{i=1}^{r} p_{i,i} = 0$$

d) On pose $M = S_2PS_1$ et on a : M inversible car P inversible. Puis :

$$\begin{aligned} T_{R_r}(P) &= T_{S_1US_2}(S_2^{-1}MS_1^{-1}) = T_{Id}(S_2^{-1}MS_1^{-1}S_1US_2) \\ &= T_{Id}(S_2^{-1}MUS_2) = T_{S_2}(S_2^{-1}MU) = T_{Id}(S_2^{-1}S_2MU) \\ &= T_{Id}(MU) = T_U(M). \end{aligned}$$

Or $T_{R_r}(P) = 0$, d'où $T_U(M) = 0$ ce qui entraîne $M \in \text{Ker}(T_U) = H$.

Donc tout hyperplan H de E contient au moins une matrice inversible.

Exercice 2.04.

Cet exercice propose de déterminer, par différentes méthodes, les polynômes réels P tels que P' divise P.

1. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré 2 tels que P' divise P.

2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n. Montrer que si P' divise P, alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$P(X) = \left(\frac{X}{n} + \alpha\right) P'(X)$$

3. **Méthode 1.** Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que P' divise P.

a) Pour $k \in \mathbb{N}$, déduire de la question 2. une relation de récurrence entre $P^{(k)}$ et $P^{(k+1)}$, où $P^{(k)}$ désigne la dérivée k-ième de la fonction polynomiale identifiée à P.

b) En déduire tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que P' divise P.

4.**Méthode 2.**

a) Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) = \left(\frac{x}{n} + \alpha\right) f'(x)$$

b) En déduire tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que P' divise P.

5. **Méthode 3.** Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}^*$, tel que P' divise P.

a) Établir une relation de récurrence entre les coefficients de P (on pourra utiliser la question 2.).

b) En déduire les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ solutions.

Solution

1. Par coefficients indéterminés et identification :

$$(aX^2 + bX + c) = (2aX + b)(dX + e) \iff \begin{cases} 2ad = a \\ bd + 2ae = b \\ be = c \end{cases} \iff \begin{cases} d = 1/2 \\ ae = b/4 \\ be = c \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} c = b^2/4a \\ d = 1/2 \\ e = b/4a \end{cases}$$

d'où : $P(X) = aX^2 + bX + \frac{b^2}{4a} = a(X^2 + \frac{b}{a}X + \frac{b^2}{4a^2}) = a(X + \frac{b}{2a})^2$.

2. Par différence des degrés, le facteur est de degré 1 ; puis par identification des termes de plus haut degré,

$$\sum_{k=0}^{n} a_k X^k = (\beta X + \alpha) \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1} \Rightarrow \beta = \frac{1}{n}$$

3. Par récurrence à partir de $P(X) = (\frac{X}{n} + \alpha)P'(X)$, puis par produit :

$$\left(1 - \frac{p}{n}\right) P^{(p)} = \left(\frac{X}{n} + \alpha\right) P^{(p+1)}$$

$$\frac{(n-1)!}{n^{n-1}} P = (\frac{X}{n} + \alpha)^n P^{(n)} = (\frac{X}{n} + \alpha)^n \, n! \, a_n$$

Soit : $P(X) = a(X + n\alpha)^n = a(X + b)^n$. On vérifie alors que ces polynômes conviennent.

4. a) La résolution de l'équation différentielle donne l'existence d'une constante μ, donc d'une constante λ telle que :

$$f(x) = \mu \exp\left[\int_{x_0}^{x} \frac{n}{t+n\alpha} dt\right] = \lambda(x+n\,\alpha)^n$$

sur chaque intervalle $]-\infty, -n\alpha[$ ou $]-n\alpha, +\infty[$.

b) D'où les solutions polynomiales $P(x) = \lambda(x+n\alpha)^n$ sur $\mathbb{R}$. On vérifie ...

5. a) Par identification :
$\sum_{k=0}^{n} a_k X^k = \big(\frac{X}{n} + \alpha\big) \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$ donne :
$\forall\, k \in [\![0, n-1]\!], a_k = \frac{k}{n} a_k + \alpha(k+1)a_{k+1}$, soit :

$$\forall\, k \in [\![0, n-1]\!], \big(1 - \frac{k}{n}\big) a_k = \alpha(k+1)a_{k+1}$$

b) D'où, par récurrence, $\forall\, k \in [\![0, n-1]\!]$,

$$a_k = \frac{\alpha n(k+1)}{n-k} a_{k+1} = \alpha^{n-k} n^{n-k} \binom{n}{k} a_n$$

formule encore valable pour $k = n$; puis :

$$P(X) = a_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\alpha\, n)^{n-k} X^k = a_n \big(X + \alpha n\big)^n$$

et on vérifie une fois encore.

Exercice 2.05.

On note I_3 la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}$ telle que la matrice $J_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ soit une matrice de projecteur.

On suppose désormais que α prend cette valeur et on note J la matrice associée.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = I_3 + (-1+\mathrm{e}^x)J$ et $G(x) = I_3 - (1+\mathrm{e}^x)J$.
Calculer, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $F(x)F(y)$.
La matrice $F(x)$ est-elle inversible ?
La matrice $G(x)$ est-elle inversible ?

3. Déterminer les éléments propres de J.

4. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on pose $M_{a,b} = aI_3 + bJ$. Montrer qu'il existe une matrice P inversible telle que, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, la matrice $\Delta_{a,b} = P^{-1} M_{a,b} P$ soit une matrice diagonale que l'on explicitera.

5. Montrer que si $M_{a,b}$ est inversible, alors :

$$\exists\, x \in \mathbb{R}, M_{a,b} = aF(x) \text{ ou } M_{a,b} = aG(x).$$

Dans ce cas, calculer $M_{a,b}^{-1}$ en fonction de a, b, J et I_3.

6. On pose : $\mathcal{C}_{a,b} = \{A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ / \ AM_{a,b} = M_{a,b}A\}$.

On suppose que $M_{a,b}$ est inversible.

Montrer que l'ensemble $\mathcal{C}_{a,b}$ est un espace vectoriel et déterminer sa dimension.

Solution

1. Le calcul donne : $J^2 = \begin{pmatrix} \alpha^2 - 2 & 0 & \alpha - 1 \\ \alpha - 1 & 1 & 1 \\ -2\alpha + 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Ainsi $J^2 = J$ si et seulement si $\alpha = 2$.

2. Comme $J^2 = J$, le calcul donne $F(x)F(y) = F(x + y)$.
On remarque que $F(0) = I_3$, donc $F(x)F(-x) = I_3$, $F(x)$ est inversible d'inverse $F(x)^{-1} = F(-x)$. On remarque de même que $G(x)G(y) = F(x+y)$, donc $G(x)G(-x) = I_3$, donc $G(x)$ est inversible d'inverse $G(x)^{-1} = G(-x)$.

3. Le polynôme $X(X-1)$ est annulateur pour J donc les seules valeurs propres possibles de J sont les racines 0 et 1 de ce polynôme.

Si 1 n'est pas valeur propre, alors $J - I_3$ est inversible et la relation $J(J - I_3) = 0$ se simplifie en $J = 0$, ce qui n'est pas vrai, donc $1 \in \mathrm{Sp}(J)$; de même on a $0 \in \mathrm{Sp}(J)$ car $J \neq I_3$. Finalement on a :

$$\mathrm{Sp}(J) = \{0, 1\}$$

4. On a $J - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ qui est de rang 1, donc $\dim \mathrm{Ker}(J - I) = 2$ et comme $\dim \mathrm{Ker}\, J \geqslant 1$ (question précédente), J est diagonalisable en :

$J = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$, et alors $P^{-1}M_{a,b}P = \begin{pmatrix} a+b & 0 & 0 \\ 0 & a+b & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = \Delta_{a,b}$

5. $\star$ Si $b = 0$, alors $M_{a,b} = aI$ est inversible si et seulement si $a \neq 0$, et alors on a $M_{a,b} = aF(0)$ et $M_{a,b}^{-1} = \dfrac{1}{a} I_3$.

$\star$ Si $b \neq 0$, alors $M_{a,b} = b\big(J - (-\frac{a}{b})I_3\big)$ est inversible si et seulement si $J - \big(-\frac{a}{b}\big)I_3$ est inversible c'est-à-dire que $-\dfrac{a}{b}$ n'est pas valeur propre de J c'est-à-dire différent de 0 et de 1 soit $a \neq 0$ et $b \neq -a$. On a alors :

$$M_{a,b} = a\big(I_3 + \frac{b}{a}J\big)$$

• Si $\frac{b}{a} + 1 > 0$, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{b}{a} + 1 = \mathrm{e}^x$ et alors $M_{a,b} = aF(x)$ et :

$$M_{a,b}^{-1} = \frac{1}{a}F(-x) = \frac{1}{a}F\big(-\ln\big(\frac{b}{a}+1\big)\big) = \frac{1}{a}I_3 - \frac{b}{a(b+a)}J$$

• Si $\frac{b}{a} + 1 < 0$, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{b}{a} + 1 = -\mathrm{e}^x$ et alors $M_{a,b} = aG(x)$ et :

$$M_{a,b}^{-1} = \frac{1}{a}G(-x) = \frac{1}{a}G\big(-\ln\big(\frac{b}{a}+1\big)\big) = \frac{1}{a}I_3 - \frac{b}{a(b+a)}J$$

Finalement, $M_{a,b}$ est inversible si et seulement si $a \neq 0$ et $a + b \neq 0$ et alors, dans tous les cas, on a :

$$M_{a,b}^{-1} = \frac{1}{a}I_3 - \frac{b}{a(b+a)}J$$

6. L'ensemble $\mathcal{C}_{a,b}$ est le noyau de l'application linéaire $A \mapsto AM_{a,b} - M_{a,b}A$, donc est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
Comme $M_{a,b} = P\Delta_{a,b}P^{-1}$, on remarque que :

$$A \in \mathcal{C}_{a,b} \iff P\Delta_{a,b}P^{-1}A = AP\Delta_{a,b}P^{-1} \iff \Delta_{a,b}P^{-1}AP = P^{-1}AP\Delta_{a,b}$$
$$\iff P^{-1}AP \in \mathcal{D}_{a,b}.$$

en posant $\mathcal{D}_{a,b} = \{B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ / \ B\Delta_{a,b} = \Delta_{a,b}B\}$. Comme l'application $A \mapsto PAP^{-1}$ est un isomorphisme (clairement linéaire et bijective de réciproque $B \mapsto P^{-1}BP$) la dimension recherchée est égal à celle de $\mathcal{D}_{a,b}$.
On remarque que $\mathcal{D}_{a,b}$ contient toute matrice de la forme $\begin{pmatrix} s & t & 0 \\ u & v & 0 \\ 0 & 0 & w \end{pmatrix}$, et le calcul montre la réciproque (en utilisant $a \neq 0$ et $a + b \neq 0$).
Donc $\mathcal{D}_{a,b}$ est engendré par les matrices élémentaires $E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2}, E_{3,3}$, qui forment une famille libre, donc finalement $\dim M_{a,b} = 5$.

Exercice 2.06.

À toute fonction f continue sur $\mathbb{R}$, on associe la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\text{pour tout } x \text{ réel, } F(x) = \int_0^1 tf(x-t)\,dt$$

1. Démontrer que pour tout réel x : $F(x) = \displaystyle\int_{x-1}^{x} (x-u)f(u)\,du$.

2. En déduire que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et montrer que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, F'(x) = \int_{x-1}^{x} f(u)\,du - f(x-1).$$

Pour tout entier naturel p, on note $E_p = \mathbb{R}_p[X]$ l'espace des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à p, que l'on identifie à l'espace

des fonctions polynômes associé, $\mathcal{F} = \big(f_0, f_1, \ldots, f_p\big)$ la base canonique de E_p.

Soit L l'application qui à tout polynôme P de E_p, associe la fonction $L(P)$ définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, L(P)(x) = \int_0^1 tP(x-t)\,dt$$

3. Pour tout entier $i \in [\![0, p]\!]$, on note $F_i = L(f_i)$.

a) Prouver que pour tout x réel, $F_i(x) = \sum_{k=0}^{i} \frac{1}{k+2}\binom{i}{k}(-1)^k\, x^{i-k}$.

b) A l'aide du résultat de la question 2, donner une expression de $F_i'(x)$. En déduire une nouvelle expression de $F_i(x)$, ainsi qu'une forme simplifiée de $\sum_{k=0}^{i} \frac{1}{k+2}\binom{i}{k}$.

4. a) Démontrer que L réalise un endomorphisme de E_p.

b) Déterminer la matrice M associée à L dans la base $\mathcal{F}$. Donner en particulier les termes de sa diagonale principale.

c) Justifier que L est un automorphisme de E_p. Dans le cas où $p \geqslant 1$, L est-il diagonalisable ?

Solution

1. Pour tout réel x, on pose le changement de variable affine $u = x - t$, d'où :

$$F(x) = \int_0^1 tf(x-t)dt = \int_x^{x-1} -(x-u)f(u)du = \int_{x-1}^{x} (x-u)f(u)du \quad (*)$$

2. On a : $\forall\, x \in \mathbb{R}, F(x) = x\displaystyle\int_{x-1}^{x} f(u)du - \int_{x-1}^{x} uf(u)du.$

Sous cette forme il est clair que F est de classe $\mathcal{C}^1$, et :

$$\begin{aligned} F'(x) &= \int_{x-1}^{x} f(u)du + x(f(x) - f(x-1)) - (xf(x) - (x-1)f(x-1)) \\ &= \int_{x-1}^{x} f(u)du - f(x-1) \end{aligned}$$

3. Pour tout entier $i \in [\![0, p]\!]$, on note $F_i = L(f_i)$.

a) La formule du binôme de Newton donne $t(x-t)^i = \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} t^{k+1}(-1)^k x^{i-k}$ puis par intégration :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_i(x) = \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k}(-1)^k x^{i-k} \int_0^1 t^{k+1} dt = \sum_{k=0}^{i} \frac{\binom{i}{k}(-1)^k}{k+2} x^{i-k} \quad (1)$$

b) D'après 2. :

$$F_i'(x) = \int_{x-1}^{x} f_i(u)du - f_i(x-1) = \int_{x-1}^{x} u^i du - (x-1)^i$$
$$= \frac{x^{i+1}}{i+1} - \frac{(x-1)^{i+1}}{i+1} - (x-1)^i$$

Donc : $F_i(x) = \dfrac{x^{i+2}}{(i+1)(i+2)} - \dfrac{(x-1)^{i+2}}{(i+1)(i+2)} - \dfrac{(x-1)^{i+1}}{i+1} + C.$

Comme $F_i(0) = \dfrac{(-1)^i}{i+2}$, on en déduit, en remplaçant, que l'on a $C = 0$:

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, F_i(x) = \frac{x^{i+2}}{(i+1)(i+2)} - \frac{(x-1)^{i+2}}{(i+1)(i+2)} - \frac{(x-1)^{i+1}}{i+1} \quad (2)$$

On tire de (1) : $F_i(-1) = \sum_{k=0}^{i} \dfrac{\binom{i}{k}(-1)^k}{k+2}(-1)^{i-k} = \sum_{k=0}^{i} (-1)^i \dfrac{\binom{i}{k}}{k+2}$

et de (2) :

$$F_i(-1) = \frac{(-1)^{i+2}}{(i+1)(i+2)} - \frac{(-2)^{i+2}}{(i+1)(i+2)} - \frac{(-2)^{i+1}}{i+1} = (-1)^i \frac{i.2^{i+1}+1}{(i+1)(i+2)}$$

D'où :

$$\sum_{k=0}^{i} \frac{\binom{i}{k}}{k+2} = \frac{i.2^{i+1}+1}{(i+1)(i+2)}$$

4. a) Pour tout couple (P, Q) de polynômes de E_p et tout couple (λ, μ) de réels, on a clairement

$\forall x \in \mathbb{R}, L(\lambda P + \mu Q)(x) = [\lambda L(P) + \mu L(Q)](x)$, donc :

$$L(\lambda P + \mu Q) = \lambda L(P) + \mu L(Q)$$

D'autre part pour tout $i \in [\![0, p]\!]$, $F_i = L(f_i)$ est d'après (1) un polynôme de degré i donc de E_p.

On déduit que L est un endomorphisme de E_p.

b) La matrice M de L s'obtient à partir des coordonnées dans la base $\mathcal{F}$ de $L(f_0)$,$L(f_1)$, ..., $L(f_p)$. C'est une matrice réelle d'ordre $p+1$. Compte tenu des expressions des $L(f_i)$, elle se présente sous la forme :

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & & \cdots & \frac{(-1)^i}{i+2} & & \frac{(-1)^p}{p+2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & & \\ \vdots & & & \cdots & 0 & \frac{1}{2} & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

C'est une matrice triangulaire supérieure dont tous les termes diagonaux sont égaux à 1/2.

c) On déduit de ce qui précède que M est inversible et que L est un automorphisme de E_p.

La matrice M n'est pas diagonalisable car $\frac{1}{2}$ est sa seule valeur propre : si elle était diagonalisable alors L serait une homothétie et M serait diagonale, ce qui n'est pas. Donc L n'est pas diagonalisable.

Exercice 2.07.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique donné par :

$$\text{pour } x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n), \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Si u est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ et A sa matrice dans la base canonique, on désigne par ${}^t u$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à ${}^t A$. On a donc :

$$\langle u(x), y \rangle = \langle x, ({}^t u)(y) \rangle, \text{ pour tout couple } (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2.$$

1. Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $\mathrm{Ker}(u) = [\mathrm{Im}({}^t u)]^\perp$.

2. Dans la suite, on considère un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ qui vérifie $\|u(x)\| \leqslant \|x\|$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

On dit alors que u est une contraction.

a) Montrer que u^n est encore une contraction pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

b) Montrer que ${}^t u$ est aussi une contraction.

c) Montrer que $\mathrm{Ker}(u - Id) = \mathrm{Ker}({}^t u - Id)$.

d) Prouver que les sous-espaces $\mathrm{Ker}(u - Id)$ et $\mathrm{Im}(u - Id)$ sont supplémentaires et orthogonaux.

e) Si $x \in \mathbb{R}^n$, on pose pour tout $m \in \mathbb{N}^*$:

$$s_m(x) = \frac{1}{m+1}\big(x + u(x) + \cdots + u^m(x)\big),$$

et on note P la projection orthogonale sur les points fixes de u (c.a.d. sur $\mathrm{Ker}(u - Id)$).

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, la suite $(s_m(x))_m$ converge vers $P(x)$, c'est-à-dire que :

$$\lim_{m\to\infty} \|s_m(x) - P(x)\| = 0.$$

3. On considère l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\omega) & \sin(\omega) & 0 \\ -\sin(\omega) & \cos(\omega) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où $\omega \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

a) Vérifier que u est une contraction.

b) Soit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

Quelle est la limite lorsque m tend vers l'infini de $\dfrac{x + u(x) + \cdots + u^{m+1}(x)}{m+1}$?

Solution

1. Soit $x \in \mathrm{Ker}(u)$, il vient $\langle x, {}^t u(y)\rangle = \langle u(x), y\rangle = 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}^n$. Il s'ensuit que x est orthogonal à $\mathrm{Im}({}^t u)$.
Réciproquement, si $x \in \mathrm{Im}({}^t u)^\perp$ on a $0 = \langle x, {}^t u(y)\rangle = \langle u(x), (y)\rangle$ pour tout $y \in \mathbb{R}^n$.
En prenant $y = u(x)$, on voit que $\|u(x)\|^2 = 0$, d'où $u(x) = 0$ et par suite $x \in \mathrm{Ker}(u)$.
En récapitulant, on obtient bien $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Im}({}^t u)^\perp$.

2. a) On montre cette propriété par récurrence. Elle est évidemment vraie pour $n = 0, 1$.
Supposons cette propriété vraie au rang n, alors on a :

$$\|u^{n+1}(x)\| = \|u^n(u(x))\| \leqslant \|u(x)\| \leqslant \|x\|$$

et la conclusion.

b) Soient u une contraction et $x \in \mathbb{R}^n$. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient :

$$\|{}^t u(x)\|^2 = \langle {}^t u(x) \mid {}^t u(x)\rangle \leqslant \|u({}^t u(x))\|\|x\| \leqslant \|{}^t u(x)\|\|x\|,$$

d'où $\|{}^t u(x)\| \leqslant \|x\|$. Ainsi, ${}^t u$ est aussi une contraction.

c) Soit $x \in \mathrm{Ker}(u - I) \setminus \{0\}$, il vient : $\|x\|^2 = \langle u(x), x\rangle \leqslant \|u(x)\|\|x\| \leqslant \|x\|^2$, d'où $\langle {}^t u(x), x\rangle \leqslant \|x\|^2$.

Ecrivons ${}^t u(x) = ax + y$ où y est orthogonal à x, on voit déjà que
$\|x\|^2 = \langle {}^t u(x) \mid x\rangle = a\|x\|^2 + \langle x \mid y\rangle = a\|x\|^2$ et par suite $a = 1$.
On a donc $\|x\|^2 \geqslant \|{}^t u(x)\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ et par suite $y = 0$.

Il en résulte que $\mathrm{Ker}(u - I) \subseteq \mathrm{Ker}({}^t u - I)$. Comme ${}^t u$ est une contraction et ${}^t({}^t u) = u$, on peut échanger les rôles de u et ${}^t u$ et on obtient l'égalité souhaitée.

d) Compte tenu de l'égalité précédente et de la question 1), il vient

$$(\mathrm{Ker}(u - I))^\perp = (\mathrm{Ker}({}^t u - I))^\perp = \mathrm{Im}({}^t({}^t u - I)) = \mathrm{Im}(u - I)).$$

e) Si $x \in \mathbb{R}^n$, on décompose x suivant la somme orthogonale
$\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(u - I) \oplus \mathrm{Im}(u - I)$, en $x = a + b$ avec $b = c - u(c)$. On obtient alors :

$$s_m(x) - a = s_m(a) - a + s_m(b) = s_m(b)$$
$$= \frac{1}{m+1}\frac{(c - u(c)) + \cdots (u^m(c) - u^{m+1})(c)}{m+1} = \frac{1}{m+1}\left(c - u^{m+1}(c)\right).$$

On a vu que u^{m+1} est encore une contraction, d'où :

$$\|s_m(x) - P(x)\| = \|s_m(x) - a\| \leqslant \frac{1}{m+1}\left(\|c\| + \|u^{m+1}(c)\|\right) \leqslant \frac{2}{m+1}\|c\|.$$

Il en résulte bien que $s_m(x)$ converge vers $P(x)$.

3. a) Si $x = {}^t(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, on a :
$\|u(x)\|^2 = (\cos(\omega)x_1 + \sin(\omega)x_2)^2 + (-\sin(\omega)x_1 + \cos(\omega)x_2)^2 + x_3^2$
$\|u(x)\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \|x\|^2$.

Il s'ensuit que u est une isométrie, donc une contraction.

b) On voit facilement que $\mathrm{Ker}(u - I) = \{(0, 0, t); t \in \mathbb{R}\}$. Il résulte alors de la question 2. e) que les moyennes considérées convergent vers le point $(0, 0, x_3)$.

Exercice 2.08.

Dans cet exercice, on étudie les matrices A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ (c'est-à-dire à coefficients dans $\mathbb{Z}$) vérifiant :

$$\text{il existe } p \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } A^p = I_3$$

Dans toute la suite, soit A une telle matrice.

1. a) Montrer que la matrice A est inversible. Donner son inverse.

b) Déterminer les valeurs propres possibles de A.

On admet que la condition imposée entraîne que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

2. Montrer que si A admet une valeur propre complexe non réelle λ, alors elle admet aussi pour valeur propre le nombre complexe conjugué $\overline{\lambda}$.

On rappelle que pour toute matrice M, la trace de M est la somme de ses coefficients diagonaux et que deux matrices semblables ont même trace.

3. a) On suppose que A n'admet pas de valeur propre complexe non réelle. Montrer que $A^2 = I_3$.

b) On suppose que A admet une valeur propre complexe non réelle. Soit θ un argument de cette valeur propre. Montrer que $2\cos\theta \in \mathbb{Z}$. Quelles sont les valeurs possibles de θ ?

c) Montrer que dans tous les cas on a $A^{12} = I_3$.

Solution

1. a) Comme $A^{p-1} \times A = I$, la matrice A est inversible et $A^{-1} = A^{p-1}$.

b) Si λ est une valeur propre de A alors $\lambda^p = 1$, ce qui entraîne que λ est une racine de l'unité d'ordre p.

2. Si $AX = \lambda X$, alors $A\overline{X} = \overline{\lambda}\,\overline{X}$: fin.

3. a) Si A n'a pas de valeur propre complexe, alors $\mathrm{spec}(A) \subset \{-1, 1\}$ (et même $\mathrm{spec}(A) \subset \{1\}$ si p est impair). Comme A est diagonalisable, elle est donc semblable à une matrice diagonale D telle que $d_{i,i} \in \{-1, 1\}$. On a donc $D^2 = I_3$ et il en est de même de A^2.

b) Si $\lambda = \mathrm{e}^{i\theta}$ est valeur propre non réelle, alors $\mathrm{e}^{-i\theta}$ l'est aussi et le terme manquant dans la réduite diagonale est nécessairement -1 ou 1 (sinon la trace serait complexe non réelle !) et comme la trace est même entière, on a $2\cos\theta \pm 1 \in \mathbb{Z}$.
Donc $2\cos\theta \in \mathbb{Z}$ et $\cos\theta$ peut valoir $-1/2, 0, 1/2$ (-1 et 1 sont interdits car $\mathrm{e}^{i\theta}$ est non réel)
Bref θ peut valoir $\pi/3, \pi/4$ ou $2\pi/3$ (car on peut supposer $0 < \theta < \pi$)
Dans chaque cas $(\mathrm{e}^{i\theta})^{12} = (\pm 1)^{12} = 1$ et $D^{12} = I_3$, donc $A^{12} = I_3$. Le cas a) ne change pas la conclusion finale et on ne peut pas faire mieux que 12 car c'est le plus petit commun multiple des puissances adéquates possibles.

Exercice 2.09.

On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}_k[X]$ l'ensemble de ces polynômes de degré au plus k. On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire défini par :

$$\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt.$$

L'orthogonal d'un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}[X]$ pour ce produit scalaire est noté $F^\perp$.

Pour tout $j \in \mathbb{N}$, soit le polynôme $L_j = \left(X^j(1-X)^j\right)^{(j)}$ (polynôme dérivé d'ordre j du polynôme $X^j(1-X)^j$).

1. a) Montrer que si $P(0) = P(1) = 0$, alors $\langle P', Q\rangle = -\langle P, Q'\rangle$.

b) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que si 0 et 1 sont racines d'ordre k de P, alors $\langle P^{(k)}, Q\rangle = (-1)^k \langle P, Q^{(k)}\rangle$.

2. a) Déterminer, pour tout $j \geqslant 1$, le degré de L_j et montrer que L_j est orthogonal à $\mathbb{R}_{j-1}[X]$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(L_j)_{0\leq j\leq n}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. Soit un polynôme $A \in E$ non nul, et soit $f_A : E \to E$ l'application qui à tout polynôme $P \in E$ associe le reste de sa division euclidienne par A.

a) Montrer que f_A est un projecteur de E ; déterminer son noyau et son image.

b) Montrer que si A n'est pas de degré n et possède au moins une racine réelle α, alors f_A n'est pas un projecteur orthogonal.

Solution

1. a) Par intégration par parties on a :

$$\langle P', Q\rangle = [P(t)Q(t)]_0^1 - \langle P, Q'\rangle = -\langle P, Q'\rangle$$

b) D'après la caractérisation de l'ordre k d'une racine x_0, si 0 (resp. 1) est racine d'ordre k de P, alors c'est une racine d'ordre $k-1$ de P'.

On montre par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ la relation : pour tout $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, si 0 et 1 sont racines d'ordre k de P, alors $\langle P^{(k)}, Q\rangle = (-1)^k \langle P, Q^{(k)}\rangle$.
La relation est évidente pour $k = 0$; si elle est vraie à l'ordre k on la montre à l'ordre $k+1$ en appliquant l'hypothèse de récurrence à P' et Q puis en appliquant la question 1. a)

2. a) Le polynôme L_j est de degré $(j+j) - j = j$ (degré d'un produit et degré de la dérivée j-ième).
Comme 0 et 1 sont racines d'ordre j de $X^j(1-X)^j$, d'après 1. b), pour tout $Q \in \mathbb{R}_{j-1}[X]$ on a :

$$(-1)^j \langle L_j, Q\rangle = \langle X^j(1-X)^j, Q^{(j)}\rangle = \langle X^j(1-X)^j, 0\rangle = 0$$

b) La famille $(L_j)_{0\leq j\leq n}$ est orthogonale, formée de vecteurs non nuls (d'après le degré) donc elle est libre ; comme $\dim(\mathbb{R}_{j-1}[X]) = j$ c'est une base.

Remarque : la base n'est pas orthonormale car $\|L_1\|^2 = \displaystyle\int_0^1 (1-2t)^2\,dt = \frac{1}{3}$.

3. a) Si $P_i = AQ_i + R_i$ avec $\deg R_i < \deg A$ ($i = 1$ ou 2), alors on a :

$$\lambda P_1 + P_2 = A(\lambda Q_1 + Q_2) + (\lambda R_1 + R_2), \text{ avec } \deg(\lambda R_1 + R_2) < \deg A.$$

Par unicité dans le théorème de division euclidienne, on a donc :

$$f_A(\lambda P_1 + P_2) = \lambda R_1 + R_2 = \lambda f_A(P_1) + f_A(P_2)$$

Puis :
$P \in \operatorname{Ker} f_A \iff R = 0 \iff P = AQ \iff P \in A\mathbb{R}[X] \cap E$, soit :

$$\operatorname{Ker} f_A = A.\mathbb{R}[X] \cap E$$

Il est clair que $\operatorname{Im} f_A \subset \mathbb{R}_{(\deg A)-1}[X]$; c'est une égalité car $f_A(R) = R$ si $R \in \mathbb{R}_{(\deg A)-1}[X]$, et cette relation prouve aussi que $f_A \circ f_A = f_A$.

b) Soit B tel que $A = (X-\alpha)B$, alors $B \in \mathbb{R}_{(\deg A)-1}[X] = \operatorname{Im} f_A$ et $(X-\alpha)A \in \operatorname{Ker} f_A$; or on a :

$$\langle (X-\alpha)A, B\rangle = \langle (X-\alpha)^2 B, B\rangle = \|(X-\alpha)B\|^2 = \|A\|^2 > 0$$

Donc $\operatorname{Im} f_A$ et $\operatorname{Ker} f_A$ ne sont pas orthogonaux.

Exercice 2.10.

Dans tout l'exercice n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit qu'une matrice $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une racine carrée de A lorsque $R^2 = A$.

1. Déterminer toutes les racines carrées de la matrice nulle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Dans cette question, on s'intéresse aux racines carrées $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Soit R une telle matrice et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ de matrice R dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$; enfin, soit r le rang de f.

a) Comparer $\operatorname{Im}(f)$ et $\operatorname{Ker}(f)$ et montrer que $r \leqslant n/2$.

On suppose $r \geqslant 1$; on note $\big(e_1, \ldots, e_r, e_{r+1}, \ldots, e_{n-r}\big)$ une base de $\operatorname{Ker}(f)$ telle que $\big(e_1, \ldots, e_r\big)$ soit une base de $\operatorname{Im}(f)$.

b) Justifier que, pour $i \in [\![1, r]\!]$, il existe un vecteur u_i de $\mathbb{R}^n$ tel que $f(u_i) = e_i$. Montrer qu'alors la famille $\mathcal{B} = \big(e_1, \ldots, e_{n-r}, u_1, \ldots, u_r\big)$ est une base de $\mathbb{R}^n$ et expliciter la matrice M_r de f dans cette base.

c) En déduire une expression de toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui sont racines carrées de la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Expliciter dans le cas $n = 4$.

3. Dans cette question, on s'intéresse aux racines carrées $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la matrice identité $I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Déterminer les matrices diagonalisables $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui sont racines carrées de I_n.

Soit R une racine carrée de I_n ; on note encore f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ de matrice R dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

b) Montrer que $\mathrm{Ker}(f+id) \cap \mathrm{Ker}(f-id) = \{0\}$.

c) Déterminer deux polynômes P et Q de $\mathbb{R}[X]$ tels que :

$$P(X)(X+1) + Q(X)(X-1) = 1$$

En déduire que $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(f+id) \oplus \mathrm{Ker}(f-id)$.

d) Justifier que f est diagonalisable et en déduire toutes les solutions R cherchées.

Solution

1. On résout :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} a^2+bc & = 0 \\ d^2+bc & = 0 \\ a\,(c+d) & = 0 \\ b\,(a+d) & = 0 \end{cases}$$

• Si $a = 0$, alors $bc = 0$, donc $d = 0$, et b ou c nul, donc $R = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ou $R = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$, qui conviennent ;

• Si $a \neq 0$, alors $d = -c$ et $bc = -a^2 \neq 0$, donc $a + d = 0$, d'où $a = c = -d \neq 0$; puis $bc = -a^2$ donc $b = -a$; soit $R = \begin{pmatrix} a & -a \\ a & -a \end{pmatrix}$ qui convient.

2. a) $f^2 = 0$ entraîne $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$; le théorème du rang donne $r + \dim[\mathrm{Ker}(f)] = n$, d'où $2r \leqslant n$.

b) Pour $i \in [\![1, r]\!]$, $e_i \in \mathrm{Im}(f)$, donc a des antécédents par f ;

On a, en composant par f, puisque $f^2 = 0$ et $e_i \in \mathrm{Ker}(f)$ pour $i \in [\![r+1, n-r]\!]$:

$$0 = \sum_{i=1}^{n-r} \alpha_i\, e_i + \sum_{j=1}^{r} \beta_j\, u_j = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i\, f(u_i) + \sum_{i=r+1}^{n-r} \alpha_i\, e_i + \sum_{j=1}^{r} \beta_j\, u_j$$

$$\Longrightarrow \sum_{j=1}^{r} \beta_j\, f(u_j) = \sum_{j=1}^{r} \beta_j\, e_j = 0$$

donc tous les β_j sont nuls car $(e_1, \ldots, e_r)$ libre ; puis $\sum_{i=1}^{n-r} \alpha_i\, e_i = 0$ et tous les α_i sont nuls car $(e_1, \ldots, e_{n-r})$ libre ; ainsi $\mathcal{B}$ est libre de cardinal n donc est une base de E.

La matrice M_r est alors donnée par $M_r = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

c) Ainsi, si R convient, on a $R = 0$ ou R est semblable à une matrice M_r avec $r \leq n/2$. Réciproquement toutes ces matrices conviennent.

Pour $n = 4$, $R = 0$ ou R semblable à :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ou } M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. a) Si $P^{-1}RP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$, alors :

$$\begin{aligned} R^2 = I_n &\iff \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^2 = \mathrm{diag}(\lambda_1^2, \ldots, \lambda_n^2) = I_n \\ &\iff \forall i, \lambda_i \in \{-1, 1\}\,; \end{aligned}$$

Réciproquement, ces matrices conviennent.

b) Un vecteur u appartenant à $\mathrm{Ker}(f+id) \cap \mathrm{Ker}(f-id)$ vérifie $u = f(u) = -u$ donc $u = 0$.

c) Les polynômes $P = 1/2$ et $Q = -1/2$ conviennent ; en appliquant à f on a

$$\frac{1}{2}(f + id) - \frac{1}{2}(f - id) = id\,;$$

et en appliquant à $u \in \mathbb{R}^n$,

$$\frac{1}{2}(f + id)(u) - \frac{1}{2}(f - id)(u) = u$$

On a : $u_1 = \frac{1}{2}(f + id)(u) \in \mathrm{Ker}(f - id)$ car $f^2 - id = 0$, et de même $u_2 = -\frac{1}{2}(f - id)(u) \in \mathrm{Ker}(f + id)$; d'où le résultat puisque l'on sait que l'intersection est réduite au vecteur nul.

d) $\mathbb{R}^n$ est somme directe de sous-espaces de f, donc f est diagonalisable et la question 3. a) donne toutes les solutions.

Exercice 2.11.

Dans cet exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 2 et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.

Pour tout couple (k, ℓ) appartenant à $[\![1, n]\!]^2$, $E_{k,\ell}$ désigne la matrice appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le coefficient situé sur la k-ème ligne et la ℓ-ème colonne vaut 1 et dont tous les autres coefficients sont nuls.

On rappelle que $(E_{k,\ell})_{(k,\ell)\in[\![1,n]\!]^2}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour tout réel K, on définit les ensembles :

• $L_K = \{M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ / \ \forall\, i \in [\![1, n]\!], \sum_{j=1}^{n} m_{i,j} = K\}$.

• $C_K = \{M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ / \ \forall\, j \in [\![1, n]\!], \sum_{i=1}^{n} m_{i,j} = K\}$.

• $L = \bigcup_{K \in \mathbb{R}} L_K$, $C = \bigcup_{K \in \mathbb{R}} C_K$.

1. a) Montrer que L_0 est un espace vectoriel.

b) Montrer que L_0 est engendré par la famille de matrices :

$$(E_{i,j} - E_{i,n})_{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,n-1]\!]}$$

c) Déterminer la dimension de L_0.

2. a) Soit K un réel.
Montrer que, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, M appartient à L_K si et seulement si $M - K.I_n$ appartient à L_0.

b) Montrer que $L = \text{Vect}\{I_n\} \oplus L_0$ puis en déduire la dimension de L.

3. a) Soit $M = (m_{i,j}) \in L_0$. Montrer que M appartient à C_0 si et seulement si, pour tout $j \in [\![1, n-1]\!]$, $\sum_{i=1}^{n} m_{i,j} = 0$.

b) En déduire une base et la dimension de $L_0 \cap C_0$.

4. a) Montrer que, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, M appartient à $L \cap C$ si et seulement s'il existe un réel K tel que M appartienne à $L_K \cap C_K$.

b) Déterminer la dimension de l'espace $L \cap C$.

Solution

1. a) Notons U la matrice colonne dont tous les éléments valent 1 :

$$M \in L_0 \iff MU = 0 \text{ (colonne nulle)},$$

donc L_0 est le noyau de l'application $\varphi : M \mapsto MU$, qui est clairement linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$: L_0 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b) $M \in L_0 \iff \forall\, i, m_{i,n} = -\sum_{j=1}^{n-1} m_{i,j}$.

Ainsi, en utilisant la décomposition de M dans la base des $E_{i,j}$:

$$\begin{aligned} M &= \sum_{i,j} m_{i,j} E_{i,j} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n-1} m_{i,j}(E_{i,j} - E_{i,n}) \in \text{Vect}\{E_{i,j} - E_{i,n},\ (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,n-1]\!]\}. \end{aligned}$$

On vérifie aisément que ces matrices $E_{i,j} - E_{i,n}$ sont bien dans L_0, ce qui donne la réponse à la question

c) La famille $(E_{i,j}-E_{i,n})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,n-1]\!]}$ est une famille libre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
En effet, soit $(m_{i,j})$ une famille de scalaires telle que $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n-1} m_{i,j}(E_{i,j}-E_{i,n}) = 0$.
Alors : $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n-1} m_{i,j}E_{i,j} - \sum_{i=1}^{n}\big(\sum_{j=1}^{n-1} m_{i,j}\big)E_{i,n} = 0$ et, pour tout (i,j), $m_{i,j}=0$.
Ainsi, c'est une base de L_0 et comme elle contient $n(n-1)$ éléments $\dim L_0 = n(n-1)$.
(on pouvait aussi remarquer que φ est surjective, car pour $M=(C|0|\dots|0)$, on a $\varphi(M)=C$ et appliquer le théorème du rang)

2. a) $M\in L_K \iff MU=KU \iff (M-KI_n)U=0 \iff M-KI_n\in L_0$.

b) $M\in L \iff \exists\, K\in\mathbb{R}$ tel que $M\in L_K \iff \exists\, K, M-KI_n\in L_0$
$\iff M\in \mathrm{Vect}\{I_n\}+L_0$.

$L_0\cap \mathrm{Vect}\{I_n\}=\{0\}$ étant clair, on a : $L=\mathrm{Vect}\{I_n\}\oplus L_0$.
D'après la formule de Grassmann : $\dim L = 1+n(n-1)$.

3. a) Soit $M\in L_0$. La somme des éléments de chaque ligne est nulle, donc la somme de tous les coefficients est nulle et la somme des éléments de chaque colonne est nulle si et seulement si la somme des éléments de chacune des $n-1$ premières colonnes est nulle :

$$\text{Si } M\in L_0,\ M\in C_0 \iff \forall\, j\in[\![1,n-1]\!],\ \sum_{i=1}^{n} m_{ij}=0.$$

b) En utilisant un raisonnement analogue au précédent, ou en transposant, on montre que C_0 est un espace vectoriel. Ainsi, $L_0\cap C_0$ est l'intersection de deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $L_0\cap C_0$ est un espace vectoriel.
Un élément de $L_0\cap C_0$ est donc parfaitement déterminé par son bloc $(n-1,n-1)$ situé en haut à gauche.
Il est donc combinaison linéaire des matrices $E_{i,j}-E_{i,n}-E_{n,j}+E_{n,n}$ (pour ajuster la nullité par ligne et par colonne, ainsi que pour la dernière ligne et la dernière colonne)
Ainsi, la famille $(E_{i,j}-E_{i,n}-E_{n,j}+E_{n,n})_{(i,j)\in[\![1,n-1]\!]^2}$ est une famille génératrice (et libre par un argument analogue à celui de la question 1.b)) de $L_0\cap C_0$ donc c'est une base de $L_0\cap C_0$. Ainsi :

$$\dim L_0\cap C_0 = (n-1)^2$$

4. a) On raisonne par double implication. Soit $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
($\Longleftarrow$) S'il existe un réel K tel que $M\in L_K\cap C_K$, alors $M\in L\cap C$.
($\Longrightarrow$) On suppose que $M\in L\cap C$. Alors, il existe $K,K'\in\mathbb{R}$ tels que $M\in L_K$ et $M\in C_{K'}$. Ainsi, pour tous $i,j\in[\![1,n]\!]$, $\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}=K$, $\sum_{i=1}^{n} m_{i,j}=K'$

Ainsi : $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{i,j} = nK = nK'$ et $K = K'$, donc $M \in L_K \cap C_K$.
Finalement, $M \in L \cap C$ si et seulement s'il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que $M \in L_K \cap C_K$.

b) Ainsi $M \in L \cap C$ si et seulement s'il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que $M - KI_n \in L_0 \cap C_0$.
Donc, $L \cap C = \text{Vect}\{I_n\} \oplus (L_0 \cap C_0)$, et $\dim L \cap C = 1 + (n-1)^2$.

Exercice 2.12.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note I_n la matrice identité d'ordre n. Soit A une matrice carrée d'ordre n à coefficients complexes.

1. a) Montrer que si A est diagonalisable, alors A^2 l'est également.

b) En s'intéressant à la matrice d'ordre $n \geqslant 2$ qui a un 1 dans le coin supérieur droit et des 0 partout ailleurs, montrer que la réciproque est fausse.

2. Montrer que si A est diagonalisable, alors il existe $k \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha_1, \cdots, \alpha_k \in \mathbb{C}$ **deux à deux distincts** tels que :
$$(A - \alpha_1 I_n) \cdots (A - \alpha_k I_n) = 0.$$

3. On veut montrer la réciproque en terme d'endomorphismes, à savoir :
« pour tout endomorphisme f d'un espace vectoriel complexe E de dimension finie, s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha_1, \cdots, \alpha_k \in \mathbb{C}$ deux à deux distincts tels que :
$$(f - \alpha_1 id_E) \circ \cdots \circ (f - \alpha_k id_E) = 0,$$
alors f est diagonalisable »
On procède par récurrence sur $k \geqslant 1$.

a) Pour tout $\alpha_1, \cdots, \alpha_k, \alpha_{k+1} \in \mathbb{C}$, deux à deux distincts, montrer qu'il existe un polynôme P et un nombre complexe β tels que qu'on ait l'égalité suivante entre polynômes :
$$1 = (X - \alpha_{k+1})P + \beta(X - \alpha_1) \cdots (X - \alpha_k).$$

b) On suppose que le résultat voulu est vrai pour l'entier k et que l'on a un endomorphisme f (d'un espace E de dimension finie) et des nombres $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \alpha_{k+1} \in \mathbb{C}$, deux à deux distincts tels que :
$$(f - \alpha_1 id_E) \circ \cdots \circ (f - \alpha_k id_E) \circ (f - \alpha_{k+1} id_E) = 0.$$

i) Montrer que le sous-espace vectoriel $F = \text{Im}(f - \alpha_{k+1} id_E)$ est stable par f.
On note alors g l'endomorphisme de F défini par : $\forall\, v \in F,\ g(v) = f(v)$.

ii) Calculer $(g - \alpha_1 id_F) \circ \cdots \circ (g - \alpha_k id_F)$.

iii) Montrer que tout vecteur $v \in F$ s'écrit sous la forme :
$v = v_1 + \cdots + v_k$, avec $v_j \in \text{Ker}(f - \alpha_j id_E)$ pour tout j de $[\![1, k]\!]$.

c) Conclure.

4. Montrer que si A^2 est diagonalisable et A est inversible, alors A est diagonalisable.

Solution

1. Si A est diagonalisée en $A = P\Delta P^{-1}$, alors $A^2 = P\Delta^2 P^{-1}$ et Δ^2 est encore diagonale.
Contre-exemple de la réciproque : la dite matrice A est triangulaire supérieure avec les 0 sur la diagonale donc $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$. Si A était diagonalisable, elle serait semblable à la matrice nulle, donc serait la matrice nulle, ce qui n'est pas.
Par ailleurs A^2 est nulle donc diagonalisable, car diagonale.

2. Si $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ sont les valeurs propres de A (sans répétition) et si on diagonalise A en $A = P\Delta P^{-1}$, en posant $M = (X - \alpha_1)\cdots(X - \alpha_k)$, le calcul donne bien :

$$(A - \alpha_1 I_n)\cdots(A - \alpha_k I_n) = M(A) = PM(\Delta)P^{-1} = 0$$

3. a) Par division euclidienne de $(X - \alpha_1)\cdots(X - \alpha_k)$ par $(X - \alpha_{k+1})$, il existe $Q, R \in \mathbb{R}[X]$ tels que :

$$(X - \alpha_1)\cdots(X - \alpha_k) = Q(X - \alpha_{k+1}) + R, \text{ avec } \deg R < \deg(X - \alpha_{k+1}) = 1$$

Ainsi R est une constante, qui ne peut être nulle, sinon α_{k+1} serait racine de $(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_k)$, ce qui est impossible car $\alpha_1, \cdots, \alpha_k, \alpha_{k+1}$ sont distincts.
On conclut en divisant l'égalité par R et en prenant $\beta = \dfrac{1}{R}$ et $P = -\dfrac{1}{R}Q$.

b) i) Pour tout $v \in F$, il existe $u \in E$ tel que $v = (f - \alpha_{k+1}id)(u)$; alors :

$$f(v) = (f \circ (f - \alpha_{k+1}id))(u) = (f - \alpha_{k+1}id)(f(u)) \in \mathrm{Im}(f - \alpha_{k+1}id) = F$$

ii) $(g - \alpha_1 id_F) \circ \cdots \circ (g - \alpha_k id_F)(v) =$
$$((f - \alpha_1 id) \circ \cdots \circ (f - \alpha_k id) \circ (f - \alpha_{k+1}id))(u) = 0$$

iii) D'après l'hypothèse de récurrence à l'ordre k, l'endomorphisme g est diagonalisable ; de plus comme on dispose d'un polynôme annulateur, les valeurs propres possibles sont $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, et donc :

$$F = \bigoplus_{j=1}^{k} \mathrm{Ker}(g - \alpha_k id_F)$$

d'où le résultat annoncé.

c) D'après 3. a), en remplaçant X par f, puis en évaluant en $v \in E$ quelconque, d'après 3. b), on a :

$$v = \beta(f-\alpha_1 id)\cdots(f-\alpha_k id)(v) + \underbrace{(f-\alpha_{k+1}id)(P(f)(v))}_{\in \mathrm{Im}(f-\alpha_{k+1}id)}$$
$$= \underbrace{\beta(f-\alpha_1 id)\cdots(f-\alpha_k id)(v)}_{\in \mathrm{Im}(f-\alpha_1 id)\cdots(f-\alpha_k id)\subset \ker(f-\alpha_{k+1}id)} + v_1 + \cdots + v_k \text{ avec } v_j \in \ker(f-\alpha_j id)$$

Ainsi la somme des espaces $\ker(f-\alpha_1 id), \ldots, \ker(f-\alpha_k id), \ker(f-\alpha_{k+1}id)$ contient E, donc f est diagonalisable.
On conclut par récurrence sur k en remarquant que le cas $k=1$ (*i.e.* $f=\lambda_1 id$) est évident.

4. A^2 est diagonalisable, d'après la question 2 précédente il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ distincts tels que

$$(A^2-\alpha_1 I_n)\cdots(A^2-\alpha_k I_n) = 0$$

Comme A est inversible, il en est de même de A^2 ; donc, quitte à simplifier l'égalité ci-dessus par A^2 si l'un des α_i vaut 0, on peut supposer que tous les $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ sont non nuls.
Alors l'équation $z^2 = \alpha_j$ possède deux solutions z_j et $-z_j$ non nulles, donc l'égalité précédente s'écrit :

$$(A-z_1 I_n)(A+z_1 I_n)\cdots(A-z_k I_n)(A+z_k I_n) = 0$$

Les nombres $z_1, -z_1, \ldots, z_k, -z_k$ sont distincts, donc A est diagonalisable d'après le résultat de la question 3.

Exercice 2.13.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et soit f un endomorphisme de E tel que :

$$3f^3 - f^2 - f - Id_E = 0$$

1. a) Factoriser $T = 3X^3 - X^2 - X - 1$ en produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

b) Montrer que T admet une unique racine réelle et deux racines complexes conjuguées notées α et $\overline{\alpha}$.

c) Calculer $\alpha + \overline{\alpha}$ et $\alpha\overline{\alpha}$.

2. On considère les trois polynômes :

$$L_1(X) = \frac{(X-1)(X-\alpha)}{(\overline{\alpha}-1)(\overline{\alpha}-\alpha)}, L_2(X) = \frac{(X-1)(X-\overline{\alpha})}{(\alpha-1)(\alpha-\overline{\alpha})},$$
$$L_3(X) = \frac{(X-\alpha)(X-\overline{\alpha})}{(1-\alpha)(1-\overline{\alpha})}$$

Montrer que (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{C}_2[X]$.

3. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on appelle R_n le reste dans la division euclidienne de X^n par T.

a) Expliciter R_0, R_1 et R_2.

b) Expliciter R_3.

c) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique triplet $(a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{C}^3$ tel que :

$$R_n = a_n L_1 + b_n L_2 + c_n L_3.$$

d) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $f^n = a_n L_1(f) + b_n L_2(f) + c_n L_3(f)$.

e) Exprimer a_n, b_n, c_n en fonction de n et de α.

f) Montrer que les suites (a_n), (b_n) et (c_n) sont convergentes de limites respectives notées a, b, c.

g) On pose $h = aL_1(f) + bL_2(f) + cL_3(f)$, montrer que h est un projecteur.

Solution

1. a) On constate que $T(1) = 0$, d'où $T(X) = (X-1)(3X^2 + 2X + 1)$. Le polynôme du second degré $Q(X) = 3X^2 + 2X + 1$ a un discriminant strictement négatif : il n'a donc pas de racine réelle et ne se factorise pas davantage dans $\mathbb{R}[X]$.

b) La question précédente montre que T admet une seule racine réelle 1 et deux racines complexes conjuguées qui sont les racines de $Q(X) = 3X^2 + 2X + 1$.

c) Avec $3X^2 + 2X + 1 = 3(X - \alpha)(X - \overline{\alpha})$, on obtient : $\alpha + \overline{\alpha} = -\frac{2}{3}$, $\alpha\overline{\alpha} = \frac{1}{3}$.

2. Comme on a une famille de trois polynômes dans l'espace vectoriel $\mathbb{C}_2[X]$ de dimension 3, il suffit de montrer que la famille est libre pour pouvoir en conclure que c'est une base.
Soit $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{C}^3$ tel que $\lambda L_1(X) + \mu L_2(X) + \nu L_3(X) = 0$.
$\rightarrow$ En évaluant en 1, comme $L_1(1) = L_2(1) = 0$, on trouve $\nu = 0$.
$\rightarrow$ En évaluant en α, comme $L_1(\alpha) = L_3(\alpha) = 0$, on trouve $\mu = 0$.
$\rightarrow$ En évaluant en $\overline{\alpha}$, comme $L_2(\overline{\alpha}) = L_3(\overline{\alpha}) = 0$, on trouve $\lambda = 0$.
La famille (L_1, L_2, L_3) est donc libre. C'est ainsi une base de $\mathbb{C}_2[X]$.

3. a) Facilement : $R_0(X) = 1$, $R_1(X) = X$ et $R_2(X) = X^2$.

b) La division euclidienne de X^3 par T s'écrit $X^3 = \frac{1}{3}T + \frac{1}{3}(X^2 + X + 1)$ avec pour quotient $Q_3 = \frac{1}{3}$ et pour reste $R_3 = \frac{1}{3}(X^2 + X + 1)$ de degré $2 < 3$.

c) Par définition de la division euclidienne, le degré du polynôme R_n est strictement inférieur au degré du polynôme par lequel on divise : T,*i.e.* $\deg(R_n) < 3$. Donc, $R_n \in \mathbb{C}_2[X]$.

Comme (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{C}_2[X]$, il existe un unique triplet (a_n, b_n, c_n) dans $\mathbb{C}^3$ tel que $R_n = a_n L_1 + b_n L_2 + c_n L_3$.

d) Par définition de la division euclidienne, il existe un unique couple de polynômes (Q_n, R_n) tel que

$$X^n = T(X)Q_n(X) + R_n(X) \qquad (**)$$

avec $\deg(R_n) < 3$. En évaluant cette égalité polynomiale pour $X = f$ et en se rappelant que, par hypothèse, $T(f) = 0$, on trouve :

$$f^n = R_n(f) = a_n L_1(f) + b_n L_2(f) + c_n L_3(f).$$

e) On vient de voir que $X^n = T(X)Q_n(X) + R_n(X) \qquad (**)$.
En évaluant en 1, comme $T(1) = 0$, $L_1(1) = 0$, $L_2(1) = 0$ et $L_3(1) = 1$, on trouve

$$1 = R_n(1) = a_n L_1(1) + b_n L_2(1) + c_n L_3(1) = c_n$$

De même, en évaluant $(**)$ en α, comme $T(\alpha) = 0$, $L_1(\alpha) = 0$, $L_2(\alpha) = 1$ et $L_3(\alpha) = 0$, on trouve

$$\alpha^n = R_n(\alpha) = a_n L_1(\alpha) + b_n L_2(\alpha) + c_n L_3(\alpha) = b_n$$

Enfin, en évaluant $(**)$ en $\overline{\alpha}$:

$$\overline{\alpha}^n = R_n(\overline{\alpha}) = a_n L_1(\overline{\alpha}) + b_n L_2(\overline{\alpha}) + c_n L_3(\overline{\alpha}) = a_n$$

f) On a $|\alpha| < 1$. Donc, $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha^n = \lim\limits_{n\to\infty} \overline{\alpha}^n = 0$.
Par conséquent, les suites (a_n) et (b_n) convergent vers 0, alors que la suite (c_n) qui est constante converge vers 1.

g) On a donc : $h = L_3(f) = \dfrac{(f - \alpha id)(f - \overline{\alpha} id)}{(1-\alpha)(1-\overline{\alpha})} = \frac{1}{2}(f^2 + \frac{2}{3}f + \frac{1}{3}id)$

Il reste à vérifier que $h \circ h = h$, ce qui se fait simplement en développant et en remplaçant f^3 et f^4 par leurs expressions en fonction de $id, f, f^2 \ldots$

Exercice 2.14.

1. Soit la matrice $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice F dans la base canonique, notée $\mathcal{C}$.

a) Déterminer le noyau et l'image de f, et vérifier qu'ils sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

b) Déterminer une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est de la forme (par blocs) :

$$M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad A \in GL_2(\mathbb{R})$$

c) Déterminer un polynôme annulateur P de f de la forme $P(X) = XQ(X)$, avec $Q(0) \neq 0$.

Plus généralement, soit un entier $n \geqslant 2$ et g un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ non injectif. On note r son rang.

2. On suppose que $\mathbb{R}^n = \mathrm{Im}(g) \oplus \mathrm{Ker}(g)$.

a) Justifier qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle la matrice de g est de la forme (par blocs) :

$$M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ avec } \ A \in GL_r(\mathbb{R})$$

b) En déduire qu'il existe un polynôme annulateur P de g tel que $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$.

3. On suppose maintenant qu'il existe un polynôme annulateur P de g de la forme $P(X) = XQ(X)$ avec $Q(0) \neq 0$; on note $K = \mathrm{Ker}\big[Q(g)\big]$.

a) Montrer par double inclusion que $K = \mathrm{Im}(g)$.

b) Déterminer deux polynômes C et B tels que $C(X)Q(X) + B(X)X = 1$.

c) En déduire que $K \cap \mathrm{Ker}(g) = \{0\}$.

d) Montrer que $\mathbb{R}^n = \mathrm{Im}(g) \oplus \mathrm{Ker}(g)$.

Solution

1. a) On a $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Ces deux sous-espaces vectoriels sont bien supplémentaires car d'intersection nulle et de dimensions *ad hoc*..

b) Il suffit de prendre $\mathcal{B}$ adaptée à $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f)$; alors $A = \mathcal{M}(f|_{\mathrm{Im}(f)})$ est inversible. Par exemple :

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \text{ donne } M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c) La matrice M est triangulaire et a pour valeurs propres 0, 1 et 2, donc est diagonalisable et semblable à $D = \mathrm{diag}(2, 1, 0)$ qui annule le polynôme $P(X) = X(X-1)(X-2)$, donc M aussi.

2. a) Procédons comme ci-dessus : on prend $\mathcal{B}$ adaptée à $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Im}(g) \oplus \mathrm{Ker}(g)$; alors $A = M(g|_{\mathrm{Im}(f)})$ est inversible.

b) A admet un polynôme annulateur $R = X^k Q$, avec $Q(0) \neq 0$; et A inversible donne $Q(A) = 0$. Alors $P = XQ$ convient.

3. a) Soit $Q(X) = \sum_{k=0}^{q} a_k X^k$, avec $a_0 = Q(0) \neq 0$.

• $y = g(x) \in \mathrm{Im}(g) \implies 0 = P(g)(x) = Q(g) \circ g(x) = Q(g)(y)$; donc $\mathrm{Im}(g) \subset K$;

• $x \in K \implies 0 = Q(g)(x) = \sum_{k=0}^{q} a_k\, g^k(x) \implies x = \frac{-1}{a_0} \sum_{k=1}^{q} a_k g^k(x) \in \mathrm{Im}(g)$;

d'où $K \subset \mathrm{Im}(g)$.

b) En prenant $C = \frac{1}{a_0}$ et $B(X) = \sum_{k=0}^{q-1} b_k X^k$, on a :

$$\frac{1}{a_0} \sum_{k=0}^{q} a_k X^k + \sum_{k=0}^{q-1} b_k X^{k+1} = 1 \iff \forall k, b_k = -\frac{a_{k+1}}{a_0}$$

c) D'après la question b) :

$x \in K \cap \mathrm{Ker}(g) \implies x = C(g) \circ Q(g)(x) + B(g) \circ g(x) = 0.$

d) $\mathrm{Im}(g)$ et $\mathrm{Ker}(g)$ sont d'intersection nulle donc sont en somme directe, et ils sont supplémentaires grâce au théorème du rang.

Exercice 2.15.

Dans tout cet exercice, n est un entier supérieur ou égal à 2. On note :

$$\mathcal{P}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / \forall\, p \in \mathbb{N}^*, \exists\, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \text{tel que } A = B^p\}$$

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que A est diagonalisable.

b) Montrer que $A \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Montrer que $A \notin \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

3. Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle vérifiant $N^n = 0$. Montrer que $N \notin \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$.

4. Dans cette question N est une matrice non nulle, telle qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^k = 0$. On pose $A = I_n + N$.

a) Déterminer les valeurs propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?

b) Soit V un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. On suppose qu'au voisinage de 0, on a : $V(x) = o(x^q)$, où $q \in \mathbb{N}$.
Montrer qu'il existe un polynôme Q tel que $V(X) = X^q Q(X)$.

c) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, il existe un polynôme $U_q \in \mathbb{R}[X]$ tel qu'au voisinage de 0 on a : $1 + x = (U_q(x))^p + o(x^q)$.
(On pourra utiliser le développement limité de $(1+x)^\alpha$).

d) En déduire que $I_n + N \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$.

Solution

1. a) La matrice A est triangulaire supérieure : ses valeurs propres se lisent sur la diagonale. Ce sont : $1, 2, 4$. La matrice A d'ordre 3 admet 3 valeurs propres réelles : elle est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

b) On peut écrire $A = PDP^{-1}$, avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $D_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{1/p} & 0 \\ 0 & 0 & 4^{1/p} \end{pmatrix}$.

Alors $B = PD_pP^{-1}$ vérifie $A = B^p$.

2. Montrons qu'il n'existe pas de matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$. Par l'absurde si $B^2 = A$, alors $AB = BA = B^3$.
La matrice A est diagonale avec deux éléments distincts. La commutation montrer qu'alors B est également diagonale et $B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$. Ainsi $B^2 = A$ entraîne $b^2 = -2$ qui n'a pas de solutions réelles.

3. a) Soit q l'ordre de nilpotence de N, soit $N^q = 0$ et $N^{q-1} \neq 0$. Ainsi, il existe un vecteur x non nul tel que $N^{q-1}(x) \neq 0$ et on montre (classiquement) que la famille $(x, N(x), \ldots, N^{q-1}(x))$ est libre. Son cardinal q vérifie donc $q \leqslant n$ et $N^n = 0$.

b) Supposons que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, il existe une matrice B telle que $B^p = N$. Alors $B^{pq} = N^q = 0$ et par la question précédente $pq \leqslant n$, ce qui est impossible pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

4. a) Une matrice nilpotente N n'admet comme valeur propre que 0 ; donc $A = I + N$ admet comme unique valeur propre 1 (travailler sur l'équation $AX = \lambda X$). La matrice A ne peut donc pas être diagonalisable car sinon elle serait semblable (donc égale) à I et N serait nulle.

b) L'hypothèse : au voisinage de 0, le polynôme V vérifie $V(x) = o(x^q)$ signifie que V s'écrit sous la forme :

$$V(X) = a_\ell X^\ell + \cdots + a_n X^n$$

avec $\ell \geqslant q + 1$ et $a_\ell \neq 0$. Donc $V(X) = X^\ell R(X) = X^q Q(X)$.

c) Le développement limité de $(1 + x)^{1/p}$ au voisinage de 0 à l'ordre q donne :

$$(1 + x)^{1/p} = 1 + \frac{x}{p} + \cdots + \frac{\alpha_q}{q!} x^q + o(x^q) = P_q(x) + o(x^q)$$

En élevant à la puissance p, et en développant la puissance, il vient :

$$1 + x = (P_q(x) + o(x^q))^p = U^p(x) + o(x^q)$$

d) Par les questions précédentes $1 + X = U^p(x) + o(x^q) = U^p(X) + X^q Q(x)$.

5. Soit q l'indice de nilpotence de N. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. En remplaçant formellement la dernière équation par la matrice N, il vient :

$$I + N = U^p(N) + N^q Q(N) = U^p(N) = (U(N))^p$$

Exercice 2.16.

On rappelle qu'une matrice symétrique M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es dite *définie positive* si pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul, on a ${}^tXMX > 0$.

1. Soit M une matrice symétrique réelle. Montrer l'équivalence des quatre propositions suivantes :

i) M est définie positive.

ii) Les valeurs propres de M sont strictement positives.

iii) Il existe une matrice P orthogonale, une matrice D diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs, telles que $M = PD{}^tP$.

iv) Il existe une matrice L inversible et symétrique telle que $M = L^2$.

2. Soit A et B deux matrices symétriques réelles avec B définie positive. Par la question précédente, on écrit $B = {}^tLL$.
Trouver une matrice C symétrique réelle telle que pour tout réel λ, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

$$AX = \lambda BX \text{ si et seulement si } CZ = \lambda Z, \text{ avec } Z = LX$$

3. a) Montrer que l'application Φ définie sur $(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2$ par $\Phi(X, Y) = {}^tXBY$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

b) Montrer qu'il existe une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ pour ce produit scalaire et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ réels tels que $Ae_i = \lambda_i Be_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

Solution

1. Montrons les équivalences demandées.
i) $\Rightarrow$ *ii)* : soit X tel que $AX = \lambda X$. Alors ${}^tXAX = \lambda ||X||^2$ ce qui entraîne que $\lambda > 0$.

ii) $\Rightarrow$ *iii)* : la matrice A est symétrique à valeurs propres strictement positives ; elle est diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres et la matrice diagonale est à diagonale strictement positive.

iii) $\Rightarrow$ *iv)* : si $A = PD{}^tP$ en notant Δ la matrice diagonale dont les éléments sont les racines carrées positives des éléments de D, il vient $A = P\Delta{}^tP \times P\Delta{}^tP = {}^tLL$, avec L inversible. De plus L est symétrique

iv) $\Rightarrow$ *i)* : la matrice ${}^tLL$ est symétrique réelle.
Si $A = {}^tLL$, alors ${}^tXAX = ||LX||^2 \geqslant 0$. Enfin ${}^tXAX = 0 = ||LX||^2$ entraîne $LX = 0$ et $X = 0$ puisque L est inversible.

2. L'équation $AX = \lambda BX$ s'écrit $AX = \lambda {}^tLLX$ ou ${}^t(L^{-1})AX = \lambda LX$. On remarque alors que ceci est équivalent à :

$$ {}^t(L^{-1})AL^{-1}LX = \lambda LX, \text{ soit } {}^t(L^{-1})AL^{-1}Z = \lambda Z$$

On pose donc $C = {}^t(L^{-1})AL^{-1}$ et on vérifie que C est symétrique réelle.

3. a) La matrice B étant symétrique définie positive, on écrit $B = {}^tLL$ et ceci montre que Φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

b) La matrice C est symétrique. Il existe donc une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de C orthonormée pour la produit scalaire canonique. Donc $(Z_1, \ldots, Z_n)$ et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ tels que :

$$CZ_i = \lambda_i Z_i \text{ et } \langle Z_i, Z_j \rangle = \delta_{i,j}$$

Par la question 2. a) il existe $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, avec $X_i = L^{-1}Z_i$ tels que $AX_i = \lambda_i BX_i$.
Il reste à montrer que cette famille est orthonormée pour le produit scalaire Φ. Or :

$$\Phi(X_i, X_j) = {}^tX_jBX_i = {}^tZ_jL^{-1}L^2L^{-1}Z_j = {}^tZ_jZ_j = \delta_{i,j}$$

Exercice 2.17.

On considère l'équation différentielle : $(E) : \dfrac{x^2-1}{2}f'(x) = xf(x)$.

1. a) Déterminer les solutions de (E) sur chacun des intervalles $]-\infty, -1[$, $]-1, 1[$ et $]1, +\infty[$.

b) Quelles sont les solutions de (E) définies sur $\mathbb{R}$?

Soit n un entier naturel au moins égal à 3 On considère l'application f_n qui, à tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$, associe : $f_n(P) = \dfrac{X^2-1}{2}P''(X) - XP'(X) + P(X)$.

2. Montrer que f_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

3. Établir que 1 est valeur propre de f_n et déterminer le sous-espace propre associé.

4. Déterminer $\operatorname{Ker} f_n$.

5. Quelles sont les valeurs de n pour lesquelles les seules valeurs propres de f_n sont 0 et 1 ? Montrer que dans ce cas f_n est un projecteur.

Solution

1. a) Pour tout x différent de 1 et de -1, l'équation proposée s'écrit :

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2-1} f(x)$$

D'après le cours, les solutions sont les fonctions $x \mapsto f(x) = K|x^2-1| = C(x^2-1)$ sur chacun des intervalles proposés.

b) Pour déterminer les solutions définies sur $\mathbb{R}$, il faut et il suffit de « raccorder » chaque solution précédente en 1 et -1. Comme chaque fonction s'annule en ces points, le raccord de f et f' se fait sans problème et les solutions définies sur $\mathbb{R}$ sont polynomiales $f(x) = k(x^2-1)$.

2. La linéarité provient de la définition de l'addition des fonctions et de leur produit par un réel, ainsi que de la linéarité de la dérivation. De plus $f_n(P)$ est un polynôme en tant que produit et somme de polynômes.
En termes de degré, si P est de degré inférieur ou égal à n, il en est de même de XP' et de $(X^2-1)P''$ donc $f_n(P)$ est un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$.

3. L'égalité $f_n(P) = P$ équivaut à $\frac{X^2-1}{2}P''(X) = XP'(X)$. Par conséquent, les polynômes P cherchés sont tels que leur dérivée est solution de l'équation étudiée à la première question. On a donc

$$P = k\big(\frac{X^3-3X}{3}\big) + k' = K_1(X^3-3X) + K_2$$

On vérifie aisément que ces polynômes sont effectivement solutions de l'équation.

Ainsi 1 est valeur propre de f_n et le sous-espace propre associé est $\mathrm{Vect}(X^3-3X, 1)$ qui est de dimension 2.

4. a) Soit $k > 0$ et $P(X) = \sum_{i=0}^{k} a_i X^i$ avec $a_k \neq 0$ puisque les polynômes constants ne sont pas dans $\mathrm{Ker}\, f_n$ d'après la question précédente.
Dès lors, en regardant les termes dominants, il vient :

$$a_k\big(\frac{k(k-1)}{2} - k + 1\big) = \frac{(k-1)(k-2)}{2} a_k$$

Ainsi $f_n(P) = 0$ si et seulement si $k \in \{1, 2\}$.

b) On cherche alors les éléments de $\mathrm{Ker}\, f_n$ sous la forme $a_0 + a_1 X + a_2 X^2$ et il vient $\mathrm{Ker}\, f_n = \mathrm{Vect}(X, 1+X^2)$ qui est de dimension 2.

5. a) D'après ce qui précède, la somme des dimensions des sous-espaces propres, $\mathrm{Ker}(f_n - I)$ et $\mathrm{Ker}\, f_n$, associés aux valeurs propres 0 et 1, est égale

à 4, qui est la dimension de $\mathbb{R}_3[X]$ donc f_n n'a pas d'autre valeur propre que 0 et 1.

b) On sait que $\mathbb{R}_3[X] = \mathrm{Ker}(f_3) \oplus \mathrm{Ker}(f_3 - I)$.
Pour tout $P \in \mathbb{R}_3[X], P = P_0 + P_1$ et $f_3(P) = f_3(P_1) = P_1$.
Cela démontre que $f_3^2 = f_3$.

Exercice 2.18.

Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace vectoriel euclidien de dimension $n \geqslant 1$.
Soit u un endomorphisme de E tel que $\forall\, x \in E, \langle u(x), x\rangle = 0$.

1. Montrer que $\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x), y\rangle = -\langle x, u(y)\rangle$.

2. Montrer que $\mathrm{Im}(u) = (\mathrm{Ker}(u))^{\perp}$.

3. Montrer que $\mathrm{Im}(u)$ est stable par u.

4. Montrer que si u n'est pas l'endomorphisme nul, il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E telle que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

avec A une matrice de $GL_k(\mathbb{R})$ et $1 \leqslant k \leqslant n$.

5. Montrer que si u n'est pas l'endomorphisme nul, la matrice A construite à la question précédente est antisymétrique (c'est-à-dire est telle que ${}^tA = -A$).

Solution

1. Soient x et y deux vecteurs de E.
Appliquons l'hypothèse $\langle u(x), x\rangle = 0$ au vecteur $x + y$.

On obtient par linéarité de u et bilinéarité du produit scalaire :

$$\langle u(x+y), x+y\rangle = 0 \implies \langle u(x), x\rangle + \langle u(x), y\rangle + \langle u(y), x\rangle + \langle u(y), y\rangle = 0$$

En réutilisant la même hypothèse, le premier et le dernier terme disparaissent et l'on a bien $\langle u(x), y\rangle + \langle u(y), x\rangle = 0$, d'où le résultat demandé, grâce à la symétrie du produit scalaire.

2. Soient x dans $\mathrm{Ker}(u)$ et y dans $\mathrm{Im}(u)$: Il existe un z de E tel que $y = u(z)$. Or, $\langle u(z), x\rangle = -\langle z, u(x)\rangle$ d'après la question précédente. Mais $u(x) = 0$, donc le produit scalaire $\langle z, u(x)\rangle$ est nul et finalement $\langle y, x\rangle = 0$.

On a donc montré que tout vecteur de $\mathrm{Ker}(u)$ est dans l'orthogonal de $\mathrm{Im}(u)$, soit $\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Im}(u)^{\perp}$.
Comme on est en dimension finie, le théorème du rang donne :

$$\dim(\mathrm{Im}(u)) + \dim(\mathrm{Ker}(u)) = n$$

mais aussi $\dim(\mathrm{Im}(u)) + \dim(\mathrm{Im}(u)^\perp) = n$ par supplémentarité.

Ainsi $\mathrm{Ker}(u)$ et $(\mathrm{Im}(u)^\perp$ étant deux sous-espaces de E de même dimension finie inclus l'un dans l'autre, ils sont égaux.

3. Soit $y \in \mathrm{Im}(u)$. On veut montrer que $u(y) \in \mathrm{Im}(u)$, ce qui est immédiat, car $u(y)$ par construction est l'image par u de y, donc elle est bien dans $\mathrm{Im}(u)$.

4. Comme u n'est pas nul, son image n'est pas réduite à $\{0_E\}$.

Si $\mathrm{Ker}(u)$ n'est pas réduit à $\{0_E\}$, soit $b = (e_1, \ldots, e_p)$ une base orthonormée de $\mathrm{Ker}(u)$ [qui n'est pas égal à E car $u \neq 0_{\mathcal{L}(E))}$], et $b' = (e_{p+1}, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de $\mathrm{Ker}(u)^\perp = \mathrm{Im}(u) \neq \{0_E\}$.

Comme $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont ici supplémentaires orthogonaux (voir question 1.), on a bien la possibilité de construire une telle base $(e_1, \ldots e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n)$ qui est de fait une base orthonormée de E.

Dans cette base, la matrice de u a ses p premières colonnes nulles, puisque $(e_1, \ldots, e_p)$ sont dans $\mathrm{Ker}(u)$.

Ensuite, $\mathrm{Im}(u)$ étant stable par u cela fournit les zéros des $n - p$ premières lignes de la partie supérieure des $n - p = k$ dernières colonnes. Enfin, si l'on note $\hat{u}$ l'induit par u dans $\mathrm{Im}(u)$, et A la matrice de $\hat{u}$ dans la base b, on a bien :

$$B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

Il reste à vérifier que A est inversible :

$\mathrm{Ker}(\hat{u}) = \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u)$ d'après une propriété du cours des restrictions d'endomorphismes à un sous-espace vectoriel. Mais ici $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont supplémentaires, l'intersection est donc réduite à $\{0_E\}$. Donc $\mathrm{Ker}(\hat{u}) = \{0_E\}$ et A est bien inversible.

b) Il reste le cas où $\mathrm{Ker}(u) = \{0_E\}$. Dans ce cas, la base canonique fait l'affaire, A occupe toute la place, il n'y a pas de colonne de zéros, et A est inversible car u est bijective, c'est un isomorphisme de E et $k = n$.

5. Avec les notations précédentes,

$$k = \mathrm{rg}(u) = \dim(\mathrm{Im}(u)) \text{ et } p = \dim(\mathrm{Ker}(u)) = n - k.$$

Renumérotons les vecteurs de la base orthonormée précédente de $\mathrm{Im}(u)$: $v_1 = e_{p+1}$, …, $v_k = e_{p+k}$.

On a déjà vu plus haut que $\mathrm{Im}(u)$ est stable par u.

Mais de plus, pour tous i et j de 1 à k, $(u(v_i), v_j) = -(v_i, u(v_j))$, et la base b' étant orthonormée, $(u(v_i), v_j)$ représente l'élément situé à l'intersection de la ligne i, et de la colonne j de la matrice A, car c'est la i-ième coordonnée du vecteur $u(v_j)$ dans la base orthonormée $b' = (v_1, \ldots, v_k)$. Et finalement, pour tous i et j de 1 à k, $a_{i,j} = -a_{j,i}$

Conclusion : si u n'est pas nul, A est effectivement antisymétrique, ainsi que B.
Remarque : dans le cas particulier où $\mathrm{Ker}(u) = \{0_E\}$, *la fin du raisonnement précédent s'applique directement à la base canonique [ou à toute autre base orthonormée], et A est de même antisymétrique, ainsi que la matrice de u dans n'importe quelle base orthonormée.*

Exercice 2.19.

Dans tout l'exercice, l'espace $E = \mathbb{R}^3$ est muni de sa structure canonique euclidienne, sa base canonique est notée $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, f est un endomorphisme bijectif de E de matrice F dans la base canonique, g est l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice transposée $G = {}^tF$.

1. a) Montrer que $\forall\,(x, y) \in (\mathbb{R}^3)^2, \langle g(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle$.

b) Soit un endomorphisme φ symétrique de E. Montrer l'équivalence :
(toute valeur propre de φ est strictement positive) $\Longleftrightarrow$ (tout vecteur non nul de E vérifie : $\langle x, \varphi(x)\rangle > 0$).
On dit alors que φ est défini positif.

c) Montrer que $g \circ f$ est symétrique et défini positif.

2. Soit $(u_i)_{1\leq i\leq 3}$ une famille de 3 vecteurs de E.

a) Montrer que si $(u_i)_{1\leq i\leq 3}$ est une base orthogonale de E constituée de vecteurs propres de $g \circ f$, alors $(f(u_i))_{1\leq i\leq 3}$ est aussi une base orthogonale de E.

b) Montrer que si $(u_i)_{1\leq i\leq 3}$ et $(f(u_i))_{1\leq i\leq 3}$ sont deux bases orthogonales de E, alors $(u_i)_{1\leq i\leq 3}$ est une base de E constituée de vecteurs propres de $g \circ f$.

3. Soit $\mathcal{C} = (u_i)_{1\leq i\leq 3}$ une base orthogonale de E constituée de vecteurs propres de $g \circ f$, avec u_i vecteur propre associé à la valeur propre μ_i.

a) Montrer que : ${}^tFF = \sum_{i=1}^{3} \mu_i U_i {}^tU_i$, avec U_i matrice colonne associée au vecteur u_i dans la base canonique.

b) On pose $S = \sum_{i=1}^{3} \sqrt{\mu_i} U_i {}^tU_i$. Calculer S^2 et montrer que l'endomorphisme s canoniquement associé à S est symétrique défini positif.

c) Montrer que l'on peut écrire F sous la forme $F = OS$, où O est une matrice orthogonale.

Solution

1. a) On a :

$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^3)^2, \langle g(x)y\rangle = {}^t(GX)Y = {}^tXFY = {}^tX(FY) = \langle x, f(y)\rangle$.

b) L'endomorphisme φ étant symétrique, il possède une base orthonormale de vecteurs propres (v_1, v_2, v_3) associée aux valeurs propres réelles $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ et strictement positives.

Soit $x \neq 0, x = \sum_{i=1}^{3} x_i v_i$. Alors $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i x_i v_i$ et $\langle x, \varphi(x)\rangle = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i x_i^2 > 0$; donc φ est défini positif.

Réciproquement : $\varphi(v_i) = \lambda_i . v_i$ entraîne que $\langle v_i, \varphi(v_i)\rangle = \lambda_i > 0$.

c) La matrice de $g \circ f$ est $GF = {}^tFF$ qui est symétrique.
Soit $x \in \mathbb{R}^3, \langle x, (g \circ f)(x)\rangle = \langle xg[f(x)]\rangle = \langle f(x), f(x)\rangle$.

Comme $x \neq 0$ et par hypothèse f bijective, on a $f(x) \neq 0$ d'où :

$$\langle x, (g \circ f)(x)\rangle = \|f(x)\|^2 > 0$$

Ainsi $g \circ f$ est-il un endomorphisme symétrique défini positif.

2. a) On a $\forall\, i, f(u_i) \neq 0$ car f est bijective.
De plus $\forall\, i \neq j, \langle f(u_i), f(u_j)\rangle = \langle u_i, (g \circ f)(u_j)\rangle = \langle u_i, (\lambda_j u_j)\rangle = 0$ et trois vecteurs orthogonaux non nuls de $\mathbb{R}^3$ forment une base orthogonale.

b) On a $\forall\, i \neq j, 1 \leqslant i, j \leqslant 3, \langle u_i, (g \circ f(u_j))\rangle = \langle f(u_i), f(u_j)\rangle = 0$, car $(f(u_i))_{1\leq i\leq 3}$ est une base orthogonale.

Également $(g \circ f)(u_j)$ est orthogonal aux u_i pour $i \neq j$ donc colinéaire à u_j. Donc u_j est un vecteur propre de $g \circ f$ et $(u_i)_{1\leq i\leq 3}$ est une base orthogonale de vecteurs propres de $g \circ f$.

3. a) On note U_i matrice colonne associée au vecteur u_i dans la base canonique.
L'endomorphisme $(g \circ f)$ est symétrique donc diagonalisable dans la base orthonormée de vecteurs propres $\mathcal{C}$. Soit P la matrice de passage orthogonale entre les deux bases orthonormées $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$: $E_i = PU_i$
Ainsi P transforme une base orthonormée en une base orthonormée, c'est une matrice orthogonale et $P^{-1} = {}^t P$.

Soit $D = \mathrm{diag}(\mu_1, \mu_2, \mu_3) = \sum_{i=1}^{3} \mu_i E_i^t E_i = \sum_{i=1}^{3} \mu_i PU_i^t(PU_i) = \sum_{i=1}^{3} \mu_i PU_i^t U_i^t P$.

On a : ${}^tFF = GF = {}^tPDP = \sum_{i=1}^{3} \mu_i^t PPU_i^t U_i^t PP = \sum_{i=1}^{3} \mu_i U_i^t U_i$.

b) On effectue le même changement de base : $U_i = {}^tPE_i$. Il vient :

$$S = \sum_{i=1}^{3} \sqrt{\mu_i} U_i^t U_i = \sum_{i=1}^{3} \sqrt{\mu_i}\,{}^t PE_i^t E_i P = {}^t P\Big(\sum_{i=1}^{3} \sqrt{\mu_i} E_i^t E_i\Big) P$$

$=^t P\,\mathrm{diag}(\sqrt{\mu_i})P.$

Ainsi $S^2 = {}^tP\,\mathrm{diag}(\mu_1,\mu_2,\mu_3)P = {}^tFF$.

On a $\mu_i > 0$ et $P^{-1} =^t P$ entraînent que S est symétrique (définie positive).

Soit x vecteur non nul de E.

$$x = \sum_{i=1}^{3} x_i u_i \implies s(x) = \sum_{i=1}^{3} x_i s(u_i) = \sum_{i=1}^{3} x_i \sqrt{\mu_i} u_i$$

car (u_i) est une base orthonormée de vecteurs propres de s. Donc

$$SU_j = \sum_{i=1}^{3} \sqrt{\mu_i} U_i^t U_i U_j = \sqrt{\mu_j} U_j$$

Et $\langle x, s(x)\rangle = \sum_{i=1}^{3} \sqrt{\mu_i} x_i^2 > 0$ car les μ_i sont tous strictement positifs : s est un endomorphisme symétrique défini positif.

4. Soit $O = FS^{-1}$, on a : ${}^tOO = S^{-1\,t}FFS^{-1} = S^{-1}S^2S^{-1} = I_3$ et O est orthogonale.

Exercice 2.20.

On note F l'ensemble des applications polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et pour tout entier naturel n, F_n l'ensemble des éléments de F de degré inférieur ou égal à n.

On munit F du produit scalaire : $(P,Q) \mapsto \langle P,Q\rangle = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(x)Q(x)\mathrm{e}^{-x^2}dx.$

[On ne demande pas de montrer que $\langle\ ,\ \rangle$ définit bien un produit scalaire sur F.]

On confond polynôme et application polynomiale associée.

On considère les trois endomorphismes f, g, h de F définis par :

pour tout $P \in F$, $f(P) = -P'' + 2XP' + P, \quad g(P) = 2XP - P', \quad h(P) = P'$

1. Calculer $g \circ h$ et $h \circ g$ en fonction de f et Id_F.

2. En déduire que $f \circ g - g \circ f = 2g$.

3. Montrer que si P est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ, et si $g(P)$ est non nul, alors il est vecteur propre de f associé à la valeur propre $\lambda + 2$.

4. Montrer que, pour tout couple (P,Q) de polynômes de F,

$$\langle P', Q'\rangle = \langle f(P), Q\rangle - \langle P, Q\rangle$$

5. a) Montrer que F_n est stable par f.

b) On note f_n l'endomorphisme de F_n induit par f. Montrer que f_n est un endomorphisme symétrique de F_n.

Solution

1. On a :
$\forall P \in F,\ \ (g \circ h)(P) = g(h(P)) = 2XP' - P'' = f(P) - P = f(P) - Id_F(P)$,
et
$(h \circ g)(P) = (g(P))' = (2XP - P')' = 2XP' - P'' + 2P = f(P) + P$
$= f(P) + Id_F(P)$.

$$g \circ h = f - Id_F, h \circ g = f + Id_F$$

2. En composant à droite par g la première relation établie précédemment, et à gauche par g la deuxième, on obtient :

$$f \circ g - g = g \circ h \circ g = g \circ f + g, \text{ d'où } f \circ g - g \circ f = 2g$$

3. Ici, on suppose donc que $P \neq 0$ et que $f(P) = \lambda P$.
D'après la question précédente,

$$f(g(P)) = g(f(P)) + 2g(P) = g(\lambda P) + 2g(P) = (\lambda + 2)g(P)$$

par linéarité de g.

Or $g(P) \neq 0$, donc il est effectivement vecteur propre de f associé à la valeur propre $\lambda + 2$.

4. Réalisons une intégration par parties sur une intégrale entre X et Y, deux réels provisoirement fixés, qui ensuite tendront respectivement vers $-\infty$ et $+\infty$.
$u(x) = P'(x)\mathrm{e}^{-x^2} \Rightarrow u'(x) = (P''(x) - 2xP'(x))\mathrm{e}^{-x^2} = (-f(P) + P)(x)\mathrm{e}^{-x^2}$,
$v(x) = Q(x) \Rightarrow v'(x) = Q'(x)$,
Toutes les fonctions en jeu étant de classe C^∞, l'intégration par parties est légitime.

$$\int_X^Y P'(x)Q'(x)\mathrm{e}^{-x^2}dx = \left[P'(x)\mathrm{e}^{-x^2}Q(x)\right]_X^Y + \int_X^Y (f(P) - P)(x)Q(x)\mathrm{e}^{-x^2}dx$$

Ensuite, la partie entre crochets tend vers 0 lorsque X et Y tendent respectivement vers $-\infty$ et $+\infty$ grâce aux théorèmes de comparaisons, et par linéarité de l'intégrale de X à Y puis convergence de toutes les intégrales généralisées en jeu (propriété incluse dans le fait que $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire sur F), on obtient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P'(x)Q'(x)\mathrm{e}^{-x^2}dx =$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(P)(x)Q(x)\mathrm{e}^{-x^2}\,dx - \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)Q(x)\mathrm{e}^{-x^2}\,dx$$

Il n'y a plus qu'à tout diviser par $\sqrt{\pi}$ pour obtenir le résultat demandé.

5. a) Le texte nous donne que f est un endomorphisme de F. Il reste à vérifier les degrés.
Or, pour $n \geqslant 2$, si P est de degré inférieur ou égal à n, P' est de degré inférieur ou égal à $n-1$ et XP' est de degré égal à $1+\deg(P')$ qui est inférieur ou égal à $n-1+1=n$. De même, P'' est de degré inférieur ou égal à $n-2$ et par somme, $f(P)$ est bien de degré inférieur ou égal à $\max(n, n-2) = n$
Les cas $n=0$ et $n=1$ sont immédiats.

On a donc bien : F_n est stable par f. La restriction de f à F_n des deux côtés (départ, arrivée) est légitime, on peut donc bien définir l'endomorphisme induit.

b) La restriction d'un endomorphisme à un sous-espace vectoriel F_n de l'espace de départ [stable par f] est un endomorphisme de F_n. Vérifions que f_n est symétrique.
Or, d'après ce qui précède, et la symétrie du produit scalaire, on a : $\forall (P,Q) \in F^2$:

$$\langle P', Q' \rangle = \langle Q', P' \rangle = \langle f(P), Q \rangle - \langle P, Q \rangle = \langle f(Q), P \rangle - \langle P, Q \rangle$$

Finalement :

$$\forall (P,Q) \in F^2, \langle f(P), Q \rangle = \langle Q, f(P) \rangle = \langle f(Q), P \rangle$$

Ainsi, l'endomorphisme f est un endomorphisme symétrique de F et f_n un endomorphisme symétrique de F_n par restriction.

Exercice 2.21.

Dans cet exercice E désigne l'espace vectoriel des fonctions polynômes à coefficients réels, que l'on identifie à $\mathbb{R}[X]$.

1. Montrer que l'application définie sur E^2 par $\varphi : (P,Q) \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}\,dt$ est un produit scalaire sur E.
On note alors $\varphi(P,Q) = \langle P, Q \rangle$.

2. Pour $P \in E$, on note $\psi(P) : t \mapsto t\,\mathrm{e}^{-t}P'(t)$ et $U(P)$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $U(P)(t) = \mathrm{e}^t[\psi(P)]'(t)$ (où « $'$ » désigne l'opérateur de dérivation).

a) Montrer que $U(P)$ est élément de E et que $U : P \mapsto U(P)$ est un endomorphisme de E.

b) Montrer que pour tout $(P,Q) \in E^2$, on a : $\langle U(P), Q \rangle = \langle P, U(Q) \rangle$.

3. a) Soit $n \geqslant 2$. Montrer que la restriction de U à $\mathbb{R}_n[X]$ induit un endomorphisme U_n de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Déterminer les valeurs propres de U_n. L'endomorphisme U_n est-il diagonalisable ?

c) Pour $k \in [\![0, n]\!]$, soit $f_k : t \mapsto \mathrm{e}^{-t}t^k$ et $P_k : t \mapsto \mathrm{e}^t f_k^{(k)}(t)$, où $f_k^{(k)}$ désigne la dérivée k-ième de la fonction f_k.

Expliciter $P_k(t)$. Montrer que P_k est propre pour U_n et déterminer la valeur propre associée.

Solution

1. Cette question classique se démontre de manière... classique. Ne pas oublier de montrer la convergence de l'intégrale.

2. a) L'application U est linéaire par distributivité de la multiplication sur l'addition et linéarité de la dérivation.
Il reste à montrer que $U(P)$ est un polynôme. Or :

$$U(P)(t) = \mathrm{e}^t[\mathrm{e}^{-t}(1-t)P'(t) + t\mathrm{e}^{-t}P''(t)] = (1-t)P'(t) + tP''(t)$$

b) Avec une intégration par parties, il vient

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^t \frac{d}{dt}(t\mathrm{e}^{-t}P'(t))Q(t)\mathrm{e}^{-t}dt = \int_0^{+\infty} \frac{d}{dt}(t\mathrm{e}^{-t}P'(t))Q(t)dt$$
$$= \int_0^{+\infty} (te^{-t}P'(t))Q'(t)dt = \int_0^{+\infty} (t\mathrm{e}^{-t}Q'(t))P'(t)\,dt$$

qui est symétrique en P et Q. Ainsi U est-il un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}[X]$.

c) La question 1 montre que si P est de degré p, alors $U(P)$ est de degré inférieur ou égal à p.

3. Comme $\deg(U(P)) \leqslant \deg(P)$, si P est un polynôme propre associé à la valeur propre λ, alors si $\lambda \neq 0$, il suffit de regarder les coefficients dominants de P et $U(P)$.
Si $P(t) = a_p t^p + \cdots$ alors $U(P)(t) = (1-t)P'(t) + tP''(t) = -pa_p t^p + \cdots$.
Ceci montre que la matrice associée à U_n est triangulaire supérieure avec sur la diagonale : $0, -1, \ldots, -n$. L'endomorphisme U_n admet $n+1$ valeurs propres : il est donc diagonalisable et son spectre est $\{0, -1, \ldots, -n\}$.

4. En utilisant la formule de Leibniz, il vient :

$$P_k(t) = \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} \frac{k!}{p!}(-1)^p t^p = \sum_{p=0}^{k} a_p t^p$$

On écrit $P_k = \sum_{p=0}^{\infty} a_p t^p$ avec $a_p = \begin{cases} \binom{k}{p}\frac{k!}{p!}(-1)^p & \text{si } p \in [\![0,k]\!] \\ 0 & \text{si } p \geqslant k+1 \end{cases}$.

Alors $(1-t)P_k'(t) + tP_k''(t) = a_1 + \sum_{p=1}^{+\infty}((p+1)^2 a_{p+1} - pa_p)t^p$.

Or, pour $p < k$:

$$\begin{aligned}(p+1)^2 a_{p+1} - p a_p &= \binom{k}{p+1}\frac{k!}{p!}(-1)^{p+1}(p+1) - \binom{k}{p}\frac{k!}{p!}(-1)^p p \\ &= (-1)^{p+1}\frac{(k!)^2}{(p!)^2}((k-p)+p) = k(-1)^{p+1}\frac{k!}{p!}p\binom{p}{k} \\ &= -k a_p\end{aligned}$$

On vérifie que cette relation est valable pour $k = p$ et $U(P_k) = -kP_k$ et P_k est vecteur propre de U associé à la valeur propre $-k$.

3

PROBABILITÉS

Exercice 3.01.

Soient p_1 et p_2 deux réels fixés appartenant à $]0,1[$. On pose $q_1 = 1 - p_1$ et $q_2 = 1 - p_2$.

On considère deux pièces de monnaie notées A_1 et A_2. Lorsqu'on lance la pièce A_1, la probabilité d'obtenir Face est p_1. Lorsqu'on lance la pièce A_2, la probabilité d'obtenir Face est p_2.

On effectue à l'aide de ces deux pièces une succession de lancers selon la règle suivante :

• pour la première partie, on choisit une pièce au hasard, chaque pièce ayant la même probabilité d'être choisie. On lance alors la pièce.

• Si le résultat de ce premier lancer est Face, on joue la deuxième partie avec la pièce A_1 ; sinon, on joue la deuxième partie avec la pièce A_2.

• De même, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, si on obtient Face lors de la n-ième partie, on joue la partie suivante avec la pièce A_1 ; sinon, on joue la partie suivante avec la pièce A_2.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note u_n la probabilité d'obtenir Face lors de la n-ième partie.

On suppose que cette expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. a) Exprimer u_1 puis u_2 en fonction de p_1 et de p_2.

b) Déterminer deux réels a et b (à exprimer en fonction de p_1 et p_2) tels que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = au_n + b.$$

c) Donner l'expression générale de u_n en fonction de n.

d) Déterminer la limite u de la suite (u_n).

e) Donner une condition nécessaire et suffisante sur p_1 et p_2 pour que $u = \frac{1}{2}$.

f) On modifie les hypothèses et on suppose dans cette question seulement que $p_1 = 0$ et $p_2 = 1$.
Étudier alors la suite (u_n).

2. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si le résultat de la n-ième partie est Face et 0 si le résultat est Pile.

a) Déterminer la loi de probabilité de X_n.

b) Déterminer l'espérance de X_n.

c) Donner une condition nécessaire et suffisante sur p_1 et p_2 pour que les événements $(X_1 = 1)$ et $(X_2 = 1)$ soient indépendants.

d) Donner une condition nécessaire et suffisante sur p_1 et p_2 pour que les événements $(X_1 = 0)$ et $(X_2 = 0)$ soient indépendants.

Solution

On note F_n l'événement : « le résultat de la n-ième partie est face », A_1 l'événement : « on joue avec la pièce A_1 » et A_2 l'événement : « on joue avec la pièce A_2 ».

1. a) On considère le système complet d'événements $\{A_1, A_2\}$, où ni A_1 ni A_2 ne sont de probabilité nulle. La formule des probabilités totales donne alors :

$$u_1 = P(F_1) = P(A_1)P_{A_1}(F_1) + P(A_2)P_{A_2}(F_1) = \frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2}p_2 = \frac{p_1 + p_2}{2}.$$

De même, en appliquant la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $\{F_1, \overline{F_1}\}$, on trouve :

$$\begin{aligned} u_2 = P(F_2) &= P(F_1)P_{F_1}(F_2) + P(\overline{F_1})P_{\overline{F_1}}(F_2) = u_1p_1 + (1-u_1)p_2 \\ &= u_1(p_1 - p_2) + p_2 = \frac{p_1^2 - p_2^2}{2} + p_2. \end{aligned}$$

b) En appliquant cette fois la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $\{F_n, \overline{F_n}\}$, on trouve de même :

$$\begin{aligned} u_{n+1} = P(F_{n+1}) &= P(F_n)P_{F_n}(F_{n+1}) + P(\overline{F_n})P_{\overline{F_n}}(F_{n+1}) \\ &= u_np_1 + (1-u_n)p_2 = (p_1 - p_2)u_n + p_2. \end{aligned}$$

On a donc $a = p_1 - p_2$ et $b = p_2$.

c) D'après la question précédente, la suite $(u_n)_n$ est une suite arithmético-géométrique de point fixe $x = \dfrac{p_2}{1 - p_1 + p_2} = \dfrac{p_2}{q_1 + p_2}$.

On a ensuite : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - x = (p_1 - p_2)(u_n - x)$, et :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, u_n = (p_1 - p_2)^{n-1}(u_1 - x) + x$$

D'où :

$$u_n = (p_1 - p_2)^n \frac{1 - p_1 - p_2}{2(1 - p_1 + p_2)} + \frac{p_2}{1 - p_1 + p_2}$$

d) Comme $p_1 - p_2 \in]-1, 1[$. Il vient : $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n) = \dfrac{p_2}{1 - p_1 + p_2}$.

e) $u = \dfrac{1}{2} \iff \dfrac{p_2}{1 - p_1 + p_2} = \dfrac{1}{2} \iff p_1 + p_2 = 1$.

f) Si $p_1 = 0$ et $p_2 = 1$, la suite $(u_n)_n$ vérifie la relation $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = -u_n + 1$, avec $u_1 = \dfrac{1}{2}$. On a alors par récurrence banale : pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{1}{2}$.

2. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suit la loi de Bernoulli de paramètre u_n, *i.e.* $X_n(\Omega) = \{0, 1\}$ avec $P(X_n = 1) = u_n$ et $P(X_n = 0) = 1 - u_n$.

b) L'espérance de X_n est donc u_n.

c) On a d'une part :

$$P(X_1 = 1)P(X_2 = 1) = u_1 u_2 = \frac{p_1 + p_2}{2}\left(\frac{p_1^2 - p_2^2}{2} + p_2\right)$$

D'autre part :

$$P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1)) = P(X_1 = 1)P_{(X_1=1)}([X_2 = 1]) = u_1 p_1 = \frac{p_1(p_1 + p_2)}{2}.$$

Ainsi, $P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1)) = P(X_1 = 1)P(X_2 = 1)$

$$\iff \frac{p_1(p_1 + p_2)}{2} = \frac{p_1 + p_2}{2}\left(\frac{p_1^2 - p_2^2}{2} + p_2\right)$$

ce qui est vrai si et seulement si $p_1 + p_2 = 0$ ou $2(p_1 - p_2) = p_1^2 - p_2^2$, ce qui équivaut à $p_1 + p_2 = 0$ ou $p_1 - p_2 = 0$ ou $p_1 + p_2 = 2$.

Comme $p_1 \in]0, 1[$ et $p_2 \in]0, 1[$, seul survit le cas $p_1 = p_2$.

d) On sait que les événements A et B sont indépendants si et seulement si les événements $\overline{A}$ et $\overline{B}$ le sont. Ainsi, les événements $(X_1 = 0)$ et $(X_2 = 0)$ sont indépendants si et seulement si les événements $(X_1 = 1)$ et $(X_2 = 1)$ le sont, *i.e.* si et seulement si $p_1 = p_2$.

Exercice 3.02.

0. Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ admettant un moment d'ordre 2.

Déterminer la valeur qui minimise l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto E((X - x)^2)$, où E désigne l'opérateur espérance.

Dans la suite de l'exercice, on considère un ensemble fini $\Omega = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ et $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé de support Ω.

Soit X une variable aléatoire définie sur cet espace. Pour tout réel t, on définit l'application $P_t : \Omega \to \mathbb{R}$ par :

$$\text{pour tout } A \in \mathcal{P}(\Omega), P_t(A) = \frac{E(\mathbf{1}_A \times \mathrm{e}^{tX})}{E(\mathrm{e}^{tX})}$$

où $\mathbf{1}_A$ est la fonction indicatrice de l'ensemble A.

1. Montrer que l'on définit ainsi une probabilité sur Ω et que pour tout $\omega \in \Omega$:

$$P_t(\omega) = \frac{P(\omega)\mathrm{e}^{tX(\omega)}}{E(\mathrm{e}^{tX})}$$

2. a) Soit Y une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P_t)$. Calculer $E_t(Y)$.

b) Que peut-on dire de $E_t(Y)$ si X et Y sont indépendantes ?

c) Dans cette question $\Omega = \{0, 1, \ldots, n\}$ et X suit la loi binomiale de paramètres n et p. On pose $Y = 2^X$. Calculer $E_t(Y)$.

3. On revient au cas général. A l'aide de la question préliminaire, montrer que :

$$E_t((X - E_t(X))^2) \leqslant \frac{1}{4}\big(\sup_{\omega\in\Omega} X(\omega) - \inf_{\omega\in\Omega} X(\omega)\big)^2$$

Solution

0. La fonction $x \mapsto E((X-x)^2 = x^2 - 2xE(X) + E(X^2)$ est une fonction polynôme.
Cette fonction est minimale pour $x = E(X)$ et son *minimum* vaut $V(X)$.

1. On a de manière évidente P_t valeurs positives et $P_t(\Omega) = 1$. L'ensemble Ω étant fini, il suffit de montrer l'additivité pour démontrer la σ-addivité.
Soit A, B tels que $A \cap B = \emptyset$. Alors $\mathbf{1}_{A\cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B$ et on conclut par la linéarité de l'espérance.

Pour répondre la dernière partie de la question, il suffit de prendre $A = \{\omega\}$.

2. a) Par définition, ou par le théorème de transfert, valable ici car Ω est fini :

$$E_t(Y) = \sum_{\omega\in\Omega} Y(\omega)P_t(\omega) = \frac{1}{E(\mathrm{e}^{tX})}\sum_{\omega\in\Omega} Y(\omega)\mathrm{e}^{tX(\omega)} = \frac{E(Y\mathrm{e}^{tX})}{E(\mathrm{e}^{tX})}$$

b) Dans le cas où X et Y sont indépendantes, il vient :

$$E_t(Y) = \frac{E(Y)E(\mathrm{e}^{tX})}{E(\mathrm{e}^{tX})} = E(Y)$$

c) Ici :

$$E_t(Y) = \frac{E((2\mathrm{e}^t)^X)}{E(\mathrm{e}^{tx})} = \frac{(2\mathrm{e}^t p + q)^n}{(p\mathrm{e}^t + q)^n}$$

3. On note $\mathrm{osc}(X) = \sup X - \inf X$.

On pose $x = \inf(X + \frac{1}{2}\mathrm{osc}(X))$. On remarque que

$$X - x \leqslant \frac{1}{2}\mathrm{osc}(X)$$

et en appliquant la question 0 avec ce x et E_t, il vient :

$$E_t((X - E_t(X))^2) \leqslant \frac{1}{4}\big(\sup_{\omega\in\Omega} X(\omega) - \inf_{\omega\in\Omega} X(\omega)\big)^2$$

Exercice 3.03.

Les variables aléatoires de cet exercice sont toutes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
Soit X une variable aléatoire à densité, ayant une densité f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et telle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(t)|\,dt$ converge.
Pour tout réel x, on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x. Soit $Y = X - \lfloor X \rfloor$.

1. Montrer que pour tout $t \in [0,1[$, $P(Y \leqslant t) - t = \sum_{k\in\mathbb{Z}} g_k(t)$, avec :

$$\forall\, k \in \mathbb{Z}, g_k(t) = \int_k^{k+t} f(u)du - t\int_k^{k+1} f(u)du$$

2. a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, g_k est dérivable sur $[0,1[$ et exprimer $g_k'(t)$ en fonction de $f(t)$.

b) Montrer qu'il existe $a_k \in [0,1[$ tel que $g_k'(a_k) = 0$.

c) En déduire que pour tout $t \in [0,1[$, on a $|g_k'(t)| \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} |f'(u)|du$.

3. a) Montrer que pour tous $k \in \mathbb{Z}$ et $t \in [0,1[$,

$$|g_k(t)| \leqslant t\int_k^{k+1} |f'(u)|du, \text{ puis que } |g_k(t)| \leqslant (1-t)\int_k^{k+1} |f'(u)|du.$$

b) En déduire que $\displaystyle\sup_{t\in[0,1[} |P(Y \leqslant t) - t| \leqslant \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(u)|du$.

4. On suppose dans cette question que X_n suit la loi gamma de paramètre $n \in \mathbb{N}^*$.
On pose $Y_n = X_n - \lfloor X_n \rfloor$. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,1[} |P(Y_n \leqslant t) - t| = 0$$

(on admet que $n! \underset{(\infty)}{\sim} \sqrt{2\pi n}\times\big(\frac{n}{\mathrm{e}}\big)^n$)

Solution

1. Pour tout $t \in [0,1[$:

$$P(Y \leqslant t) - t = \sum_{k\in\mathbb{Z}} P(k \leqslant X \leqslant k+t) - t = \sum_{k\in\mathbb{Z}} g_k(t) - t$$
$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_k^{k+1} f(u)\,du - \int_k^{k+1} t\,du$$
$$P(Y \leqslant t) - t = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \Big(\int_k^{k+1} f(u)\,du - t\int_k^{k+1} f(u)\,du \Big)$$

2. a) Au vu de la définition de g_k et grâce au théorème fondamental du calcul intégral, la fonction g_k est de classe $\mathcal{C}^1$ et pour tout $t \in [0,1[$:

$$g_k'(t) = f(k+t) - \int_k^{k+1} f(u)\,du$$

On remarque également que g_k est de classe $\mathcal{C}^2$.

b) On remarque que $g_k(0) = g_k(1) = 0$. On utilise ensuite le théorème de Rolle.

c) On écrit alors, pour tout $t \in [0,1[$:

$$g_k'(t) = \int_{a_k}^{t} g_k''(u)\,du = \int_{a_k}^{t} f'(k+u)\,du = \int_{a_k+k}^{k+t} f'(v)\,dv.$$

Donc :

$$|g_k'(t)| \leqslant \int_{a_k+k}^{k+t} |f'(v)|\,dv \leqslant \int_k^{k+1} |f'(v)|\,dv$$

3. a) On utilise de nouveau le fait que $g_k(0) = g_k(1) = 0$. Ainsi par le résultat 2. c) :

$$g_k(t) = \int_0^t g_k'(u)\,du \implies |g_k(t)| \leqslant Ct, \text{ avec } C = \int_k^{k+1} |f'(u)|\,du$$

et :

$$g_k(t) = \int_1^t g_k'(u)\,du \implies |g_k(t)| \leqslant C(1-t), \text{ avec } C = \int_k^{k+1} |f'(u)|\,du$$

b) En faisant la somme des deux dernières expressions, il vient :

$$|g_k(t)| \leqslant \frac{1}{2}\int_k^{k+1} |f'(u)|\,du$$

Il reste à sommer ces inégalités pour obtenir l'inégalité demandée.

4. Une densité de X est définie par $f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{x^n \mathrm{e}^{-x}}{n!} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

On a alors $f_n'(x) = f_{n-1}(x) - f_n(x)$.

Une simple différence montre que la fonction f_n est positive pour $x \leqslant n$ et positive pour $x \geqslant n$. On a alors en remarquant que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt = 1$:

$$\int_0^{+\infty} |f_n'(t)|\,dt = \int_0^n (f_{n-1}(t) - f_n(t))\,dt + \int_n^{+\infty} (f_n(t) - f_{n-1}(t))\,dt$$
$$= 2\Big(\int_n^{+\infty} f_n(t)\,dt - \int_n^{+\infty} f_{n-1}(t)\,dt\Big) = 2\int_n^{+\infty} f_n'(t)\,dt$$

soit : $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f_n'(t)|\,dt = f_n(n) = 2\frac{n^n \mathrm{e}^{-n}}{n!}$.

En utilisant l'équivalent de Stirling, on obtient :

$$\sup_{t\in[0,1[} |P(Y \leqslant t) - t| \leqslant \frac{n^n \mathrm{e}^{-n}}{n!} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$$

ce qui termine la question.

Exercice 3.04.

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Soit X une variable aléatoire réelle à densité dont f est une densité continue. On note F_X sa fonction de répartition. Pour tout x réel, on suppose l'existence d'une variable aléatoire Y_x dont la loi est donnée par :

$$\text{pour tout } t \in \mathbb{R}, P(Y_x \leqslant t) = P_{(X>x)}(X \leqslant t).$$

1. Montrer que Y_x est une variable aléatoire à densité, dont une densité g est définie par :

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant x \\ \dfrac{f(t)}{1 - F_X(x)} & \text{si } t > x \end{cases}$$

2. On suppose qu'il existe $b > 0, \alpha > 1$ tels que $X(\Omega) = [b, +\infty[$ et qu'une densité f de X est donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha b^\alpha}{x^{\alpha+1}} & \text{si } x \geqslant b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer qu'il existe β réel tel que $E(Y_x) = \beta x$. Vérifier que $\beta > 1$.

3. Réciproquement, on suppose que Y_x vérifie l'équation $E(Y_x) = \beta x$, avec β réel.

a) Montrer que $\beta > 1$.

b) Déterminer la loi de X.

Solution

1. Par définition de la variable aléatoire Y_x, pour tout réel t :

$$P(Y_x \leqslant t) = \frac{P((X \leqslant t) \cap (X > x))}{P(X > x)}$$

Ainsi :

$$F_{Y_x}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant x \\ \dfrac{F_X(t) - F_X(x)}{1 - F_X(x)} & \text{si } t > x \end{cases}$$

Une densité g de Y_x est donnée par : $g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant x \\ \dfrac{f(t)}{1 - F_X(x)} = \dfrac{f(t)}{\int_x^{+\infty} f(t)dt} & \text{si } t > x \end{cases}$

2. On a à l'aide d'une simple intégration : $E(Y_x) = \dfrac{\int_x^{+\infty} tf(t)dt}{\int_x^{+\infty} f(t)\,dt} = \dfrac{\alpha}{\alpha - 1}x$

De plus $\dfrac{\alpha}{\alpha - 1} > 1$.

3. a) L'équation $E(Y_x) = \beta x$ s'écrit en utilisant une densité f de X :

$$\int_x^{+\infty} tf(t)\,dt = \beta x \int_x^{+\infty} f(t)\,dt \quad (*)$$

Or $\displaystyle\int_x^{+\infty} tf(t)\,dt \geqslant x\int_x^{+\infty} f(t)\,dt$ entraîne que $\beta \geqslant 1$.

Si on avait $\beta = 1$ on aurait l'égalité $\displaystyle\int_x^{+\infty} (t - x)f(t)\,dt = 0$. Ce qui est impossible par continuité et positivité de la fonction $t \to (t - x)f(t)$ sur $[x, +\infty[$.
Donc $\beta > 1$.

b) Les fonctions en jeu dans l'équation $(*)$ étant dérivables, il vient, après dérivation : $\beta\displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)\,dt = (\beta+1)xf(x)$, puis une seconde dérivation donne :

$$(\beta + 1)xf'(x) + (\beta + 2)f(x) = 0$$

Cette équation différentielle linéaire homogène du premier ordre admet comme solution générale $f(x) = \dfrac{C}{x^{1+\frac{1}{\beta+1}}}$.

On remarque que $1 + \dfrac{1}{\beta + 1} > 1$; la fonction f étant une densité, il existe un réel $A > 0$ tel que $f(t) = 0$ pour $t \leqslant A$ (sinon l'intégrale de f serait divergente cause de la borne 0). Enfin :

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_A^{+\infty} f(t)\,dt = \frac{C(\beta + 1)}{A^{1/(\beta+1)}} \implies C = \frac{1}{(\beta + 1)A^{1/(\beta+1)}}$$

On trouve ainsi une loi de Paréto.

Exercice 3.05.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant : il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$|f(x) - f(y)| \leqslant C|x - y|$$

On note $\mathcal{L}$ l'ensemble de ces fonctions. Si $f \in \mathcal{L}$, on pose :

$$\|f\| = \sup_{x,y\in\mathbb{R}/x\neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}$$

Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des variables aléatoires réelles définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ possédant une densité continue sur $\mathbb{R}$ et admettant une espérance.

1. Soit $X \in \mathcal{M}$. Montrer que pour tout $h \in \mathcal{L}$, $E(h(X))$ existe.

2. Soit X et Y deux éléments de $\mathcal{M}$ de densités respectives f et g. On pose :

$$d(X, Y) = \sup_{h\in\mathcal{L}/||h||\leq 1} |E(h(X)) - E(h(Y))|$$

a) Montrer que d vérifie :

i) $d(X, X) = 0$;

ii) $d(X, Y) = d(Y, X)$;

iii) $d(X, Z) \leqslant d(X, Y) + d(Y, Z)$.

b) Montrer que $d(X, Y) \leqslant E(|X - Y|)$.

3. On suppose que X suit la loi normale $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$ et Y la loi normale $\mathcal{N}(b, \sigma^2)$. Montrer que $d(X, Y) = |b - a|$.

4. On suppose que X suit la loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ et Y la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$. Montrer que

$$d(X, Y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}|1 - \sigma|$$

Solution

1. Comme $h \in \mathcal{L}$, elle vérifie, pour tout t réel :

$$|f(t) - f(0)| \leqslant |t| \implies |f(t)| \leqslant |f(0)| + |t|$$

Comme X admet une espérance, le théorème de transfert nous assure l'existence de l'espérance de $h(X)$.

2. a) Ces relations se démontrent aisément en utilisant pour la troisième l'inégalité triangulaire. Ainsi :

$$h(t)f_X(t) - h(t)f_Z(t) = (h(t)f_X(t) - h(t)f_Y(t)) + (h(t)f_Y(t) - h(t)f_Z(t))$$

ce qui entraîne que :

$$\Big|\int_{-\infty}^{+\infty} (h(t)f_X(t) - h(t)f_Z(t))dt\Big|$$

$$\leqslant \Big|\int_{-\infty}^{+\infty} (h(t)f_X(t) - h(t)f_Y(t))dt\Big| + \Big|\int_{-\infty}^{+\infty} (h(t)f_Y(t) - h(t)f_Z(t))dt\Big|$$

On passe alors au sup droite, puis au sup gauche.

b) Soit $h \in \mathcal{L}$, avec $\|h\| \leqslant 1$. Alors :

$$|E(h(X) - h(Y))| \leqslant E(|h(X) - h(Y)|) \leqslant E(|X - Y|)$$

3. Soit $h \in \mathcal{L}$, avec $\|h\| \leqslant 1$.
On a :

$$\delta = |E(h(X)) - E(h(Y))|$$
$$= \Big|\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\mathrm{e}^{-(t-a)^2/(2\sigma^2)}dt - \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-(t-b)^2/(2\sigma^2)}dt\Big|$$
$$\delta = \Big|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} h(\sigma t + a)\mathrm{e}^{-t^2/2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} h(\sigma t + b)\mathrm{e}^{-t^2/2}\Big|$$
$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\sigma t + a) - h(\sigma t + b)|\mathrm{e}^{-t^2/2}dt \leqslant |a - b|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2/2}dt$$

Soit : $\delta \leqslant |a - b|$. Donc $d(X, Y) \leqslant |a - b|$.
Or pour la fonction $k : x \mapsto x$ qui convient, il vient :

$$|E(k(X)) - E(k(Y))| = |E(X) - E(Y)| = |a - b|$$

ce qui entraîne que $d(X, Y) \geqslant |a - b|$ et l'égalité.

4. Soit $h \in \mathcal{L}$ telle que $\|h\| \leq 1$. En effectuant le changement de variable $\sigma t = u$ dans la première intégrale, il vient en renotant t la variable d'intégration :

$$E(h(X)) - E(h(Y)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\mathrm{e}^{-t^2/(2\sigma^2)}dt - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\mathrm{e}^{-t^2/2}dt$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} [h(t\sigma) - h(t)]\mathrm{e}^{-t^2/2}dt$$

Donc :

$$|E(h(X)) - E(h(Y))| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t\sigma) - h(t)|\mathrm{e}^{-t^2/2}dt$$
$$\leqslant |1-\sigma|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} |t|\mathrm{e}^{-t^2/2}dt = \frac{2|1-\sigma|}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-t^2/2}dt$$
$$\leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}}|1 - \sigma|.$$

Ainsi $d(X, Y) \leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}}|1 - \sigma|$.
Supposons $\sigma > 1$. Pour la fonction $k : t \mapsto |t|$, on obtient :

$$E(k(X)) - E(k(Y)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} |t|\mathrm{e}^{-t^2/(2\sigma^2)}dt - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} |t|\mathrm{e}^{-t^2/2}dt$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} [|t\sigma| - |t|]\mathrm{e}^{-t^2/2}dt$$
$$= (\sigma - 1)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} |t|\mathrm{e}^{-t^2/2}dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}|1 - \sigma|.$$

Le résultat est le même pour $\sigma < 1$, ce qui donne l'inégalité $d(X,Y) \geqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}}|1-\sigma|$ et finalement l'égalité.

Exercice 3.06.

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$.
Le programme d'un examen est constitué de N questions dont n (différentes) sont tirées au hasard pour constituer l'épreuve. Chacune de ces n questions fait l'objet d'un questionnaire à choix multiples (QCM) ; chaque question comporte 4 réponses dont une seule est juste ; donner une réponse juste rapporte 1 point et une réponse fausse rapporte 0 point.
Un candidat donné connaît une proportion p des réponses aux questions du programme ; on note X le nombre de questions de l'examen dont le candidat connaît la réponse et auxquelles il répondra donc correctement ; pour les autres questions, le candidat « tentera sa chance » en donnant une réponse au hasard à la question posée. On note Y la note de ce candidat.

1. a) Déterminer la loi de X et donner son espérance.

b) Pour n et p fixés, par quelle loi peut-on approcher celle de X lorsque N tend vers l'infini ?
Donner la variance de cette loi approchée. Dans la suite, on utilisera cette approximation pour évaluer $V(X)$.

2. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, déterminer la loi conditionnelle de $Y - X$ sachant que $(X = k)$ est réalisé, préciser son espérance $E(Y - X|X = k)$ et sa variance $V(Y - X|X = k)$.

3. Déterminer l'espérance de Y.

4. a) Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, montrer que :

$$E((Y - E(Y))^2|X = k) = E((Y - E(Y|X = k))^2|X = k) + (E(Y|X = k) - E(Y))^2$$

b) En déduire que la variance de Y vaut : $V(Y) = \frac{n(1-p)}{16}(3 + 9p)$.

Solution

1. a) Les n questions de l'examen sont tirées au hasard sans remise parmi les N questions du programme, dont le candidat connaît une proportion p, donc X suit la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(N, n, p)$, d'espérance $E(X) = np$.

b) D'après le cours, la loi de X est approchée (au sens de la convergence en loi en fait) par une loi binomiale de paramètres n et p. Dans la suite on prend donc $V(X) = np(1-p)$.

2. La variable $Y-X$ est le nombre de questions auxquelles le candidat répond correctement par hasard. Sachant que $(X = k)$ est réalisé, il y a $n-k$ questions posées dont le candidat ne connaît pas la réponse, avec probabilité de succès $\frac{1}{4}$ pour chacune, indépendamment les unes des autres. Donc la loi de $Y - X$ sachant que $(X = k)$ est réalisé est la loi binomiale de paramètres $n - k$ et $\frac{1}{4}$, donc :

$$E(Y - X|X = k) = \frac{n-k}{4} \text{ et } V(Y - X|X = k) = \frac{3(n-k)}{16}.$$

3. On a :

$E(Y) = E(X) + E(Y - X)$ (linéarité de l'espérance)

$= E(X) + \sum_{k=0}^{n} E(Y - X|X = k)P(X = k)$ (formule de l'espérance totale)

$= E(X) + \sum_{k=0}^{n} (n-k)\frac{1}{4}P(X = k)$ (d'après la question 2)

$= E(X) + \frac{1}{4}n\sum_{k=0}^{n} P(X = k) - \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n} kP(X = k)$

Soit : $E(Y) = n\big(\frac{1}{4} + \frac{3p}{4}\big)$ (d'après la question 1. a)

4. a) On écrit :

$(Y - E(Y))^2 - [Y - E(Y|X = k))^2$

$= ([E(Y|X = k) - E(Y))(Y - E(Y) + Y - E(Y|X = k))$

d'où le résultat voulu en prenant l'espérance conditionnelle sachant que $(X = k)$ est réalisé, par linéarité de l'espérance (noter que $E(Y|X = k) - E(Y)$ est une constante).

b) Par linéarité de l'espérance conditionnelle, d'après la question 2., on a :

$E(Y|X = k) - E(Y) = E(Y - X|X = k) + E(X|X = k) - E(Y)$

$= \frac{n-k}{4} + k - \frac{n}{4}(1 + 3p) = \frac{3}{4}(k - np).$

Par ailleurs, comme Y et $Y - k$ ont la même variance, d'après la question 2, on a :

$$E((Y - E(Y|X = k))^2|X = k) = \frac{3(n-k)}{16}$$

Donc

$V(Y) = E((Y - E(Y))^2)$

$= \sum_{k=0}^{n} E((Y - E(Y))^2|X = k)P(X = k)$ (formule de l'espérance totale)

$$= \sum_{k=0}^{n} \big(E((Y - E(Y|X=k))^2|X=k) + (E(Y|X=k) - E(Y))^2\big)P(X=k)$$

(question 4. a)

$$= \sum_{k=0}^{n} \big(\frac{3(n-k)}{16} + (\frac{3}{4}(k-np))^2\big)P(X=k)$$

$$= E\big(\frac{3(n-X)}{16} + \frac{9}{16}(X-np)^2\big) \text{ (théorème de transfert)}$$

$$V(Y) = \frac{3}{16}n(1-p) + \frac{9}{16}np(1-p) = \frac{n(1-p)}{16}(3+9p)$$

Exercice 3.07.

On considère une suite indéfinie de lancers d'une pièce équilibrée. Pour tout entier naturel non nul n, on désigne par R_n l'événement : « Pile apparaît au n-ème lancer » et par S_n l'événement : « Face apparaît au n-ème lancer ».

Soit Y la variable aléatoire désignant le rang du lancer où, pour la première fois, apparaît un Face précédé d'au moins deux Pile si cette configuration apparaît, et prenant la valeur 0 si cette configuration n'apparaît jamais.

On suppose que l'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On pose $c_1 = c_2 = 0$ et pour tout $n \geqslant 3$, $c_n = P([Y = n])$. On note également

$$\forall\, n \geqslant 3, B_n = R_{n-2} \cap R_{n-1} \cap S_n \text{ et } U_n = \bigcup_{i=3}^{n} B_i$$

On pose enfin $u_1 = u_2 = 0$ et pour tout $n \geqslant 3$, $u_n = P(U_n)$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est monotone et convergente.

2. a) Pour tout $n \geqslant 3$, calculer $P(B_n)$.

b) Montrer que, pour tout $n \geqslant 3$, les événements B_n, B_{n+1} et B_{n+2} sont deux à deux incompatibles.

c) Calculer les valeurs de u_3, u_4 et u_5.

3. Dans cette question, on suppose $n \geqslant 5$.

a) Comparer les événements $U_n \cap B_{n+1}$ et $U_{n-2} \cap B_{n+1}$. Préciser leurs probabilités respectives.

b) Montrer que pour tout $n \geqslant 3$, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{8}(1 - u_{n-2})$.

c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

d) Calculer $P(Y = 0)$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = 1 - u_n$.

a) Trouver $(\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \beta v_{n+2} + \gamma v_{n+3}$.

b) Montrer que la série de terme général v_n est convergente et calculer $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$.

Solution

1. On remarque que (U_n) constitue une suite croissante d'événements. Ainsi, la suite (u_n) est croissante et majorée par 1. Donc, elle converge.

2. a) Par indépendance des résultats des différents lancers effectués :

$$P(B_n) = P(R_{n-2})P(R_{n-1})P(S_n) = \frac{1}{8}$$

b) Pour tout $n \geqslant 3$, B_n est inclus dans S_n et B_{n+1} est inclus dans R_n. Donc

$$B_n \cap B_{n+1} \subset R_n \cap S_n = \emptyset$$

De même, $B_n \cap B_{n+2} = B_{n+1} \cap B_{n+2} = \emptyset$.

c) On en déduit que :

$$u_3 = P(B_3) = \frac{1}{8}; u_4 = P(U_4) = P(B_3) + P(B_4) = \frac{1}{4}\,;$$
$$u_5 = P(U_5) = P(B_3) + P(B_4) + P(B_5) = \frac{3}{8}$$

3. a) Pour tout $n \geqslant 5$, on a $U_n = U_{n-2} \cup B_{n-1} \cup B_n$.
Puisque B_{n+1}, B_n et B_{n-1} sont deux à deux incompatibles :

$$\begin{aligned} U_n \cap B_{n+1} &= (U_{n-2} \cap B_{n+1}) \cup (B_{n-1} \cap B_{n+1}) \cup (B_n \cap B_{n+1}) \\ &= U_{n-2} \cap B_{n+1}. \end{aligned}$$

Les événements U_{n-2} et B_{n+1} étant indépendants, on trouve :

$$P(U_n \cap B_{n+1}) = P(U_{n-2} \cap B_{n+1}) = P(U_{n-2})P(B_{n+1}) = \frac{1}{8}u_{n-2}$$

b) Pour tout $n \geqslant 5$, on a $U_{n+1} = U_n \cup B_{n+1}$. Il s'ensuit que

$$u_{n+1} = P(U_n) + P(B_{n+1}) - P(U_n \cap B_{n+1}) = u_n + \frac{1}{8} - \frac{1}{8}u_{n-2}$$

On vérifie, grâce aux valeurs numériques trouvées plus haut, que cette relation reste valable pour $n = 3$ et $n = 4$.

c) On sait que la suite $(u_n)_n$ converge et on note ℓ sa limite. En passant à la limite dans l'égalité de la question précédente, on trouve $\ell = \ell + \frac{1}{8}(1 - \ell)$. On en déduit que $\ell = 1$.

d) De plus, l'événement $(Y = 0)$ a pour complémentaire $\bigcup_{n\geq 3} B_n = \bigcup_{n\geq 3} U_n$. Comme $(U_n)_n$ est une suite croissante d'événements :

$$P(Y = 0) = 1 - P(\bigcup_{n\geq 3} U_n) = 1 - \lim_{n\to+\infty}(u_n) = 1 - 1 = 0$$

4. a) On déduit de la question 3. b) que pour tout $n \geqslant 3$, $v_{n+1} = v_n - \frac{1}{8}v_{n-2}$. Il s'ensuit que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, v_n = 8(v_{n+2} - v_{n+3})$$

b) On somme ces égalités pour n variant de 1 à N. On a alors $\sum_{n=1}^{N} v_n = 7 - 8v_{N+3}$. Comme la suite (v_n) tend vers 0, en faisant tendre N vers l'infini, on trouve :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = 7$$

Exercice 3.08.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = \begin{cases} t\,\mathrm{e}^{-t} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$.

1. Montrer que f est une densité de probabilité.

On admet qu'il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et une variable aléatoire X réelle de densité f définie sur cet espace.

2. Soit F la restriction à $\mathbb{R}^+$ de la fonction de répartition de X. Montrer que F est une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $[0, 1[$. On note F^{-1} sa bijection réciproque.

Soit U une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de loi uniforme sur $[0, 1[$. On pose $Z = F^{-1}(U)$. Prouver que Z est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ admettant f pour densité.

3. Montrer que X admet un moment d'ordre n, noté $M_n(X) = E(X^n)$, pour tout $n \geqslant 1$ et le calculer.

4. Pour u réel, on pose sous réserve d'existence, $L(u) = E(\mathrm{e}^{uX})$, espérance de la variable aléatoire e^{uX}.

Déterminer l'ensemble D de définition de L et calculer $L(u)$ pour tout $u \in D$.

5. a) Justifier que L est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur D et calculer $L^{(n)}(0)$ pour tout entier n. Comparer $M_n(X)$ et $L^{(n)}(0)$.

b) Montrer que pour tout $u \in\,]-1, 1[$, $E(\mathrm{e}^{uX}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M_n(X)}{n!} u^n$.

Solution

1. On sait (cours) que la fonction f est une densité (loi γ).
Soit X réelle de densité f sur l'espace probabilisé $\Big(\Omega, \mathcal{A}, P\Big)$ et F_X sa fonction de répartition. (Il est facile mais inutile d'expliciter F_X)

2. Soit F la restriction de F_X à $\mathbb{R}_+$.

F est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, et $\forall x \in \mathbb{R}_+, F'(x) = x\mathrm{e}^{-x}$. On en déduit que F est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, comme de plus F est continue sur $\mathbb{R}_+$ et que $F(0) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$, on en déduit que F est bijective de $\mathbb{R}_+$ sur $[0, 1[$.
On note F^{-1} sa bijection réciproque. On a l'équivalence :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \forall\, u \in [0, 1[, F(x) = u \iff x = F^{-1}(u)$$

Z est bien définie et pour tout réel $y \in \mathbb{R}$, on a :
• si $y < 0$, $(Z \leqslant y) = (F^{-1}(U) \leqslant y) = \emptyset$, car F^{-1} est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.
• si $y \geqslant 0$, $(Z \leqslant y) = (F^{-1}(U) \leqslant x) = (U \leqslant F(x)) \in \mathcal{A}$, car U est une variable aléatoire.

En conséquence : $\forall y \in \mathbb{R}$, $(Z \leqslant y) \in \mathcal{A}$, ce qui prouve que Z est une variable aléatoire.
Pour tout réel $y \in \mathbb{R}$, on a :
• si $y < 0$, $P(Z \leqslant y) = P(\emptyset) = 0 = F_X(y)$
• si $y \geqslant 0$, $P(Z \leqslant y) = P(F^{-1}(U) \leqslant y) = P(U \leqslant F(y)) = F(y) = F_X(y)$, car U est une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1[$.

Les deux variables aléatoires X et Z ayant même fonction de répartition, ont même loi.

3. Pour tout entier n, sous réserve d'absolue convergence, le moment d'ordre n de X est donné par :

$$M_n(X) = \int_0^{+\infty} t^n t\mathrm{e}^{-t}dt = \int_0^{+\infty} t^{n+1}\mathrm{e}^{-t}dt = \Gamma(n+2) = (n+1)!$$

4. La fonction $t \mapsto t.\mathrm{e}^{ut}\mathrm{e}^{-t}$ admet une intégrale convergente en $+\infty$ pour $u < 1$ et la formule du transfert donne :

$$L(u) = E(\mathrm{e}^{uX}) = \int_0^{+\infty} t.\mathrm{e}^{ut}\mathrm{e}^{-t}\, dt = \int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t(1-u)}dt$$

Donc $L(u)$ existe si et seulement si $u < 1$, et par une intégration par parties ou par un changement de variable affine :

$$L(u) = \frac{1}{(1-u)^2}$$

5. a) La fonction rationnelle $u \mapsto \dfrac{1}{(1-u)^2}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son domaine de définition et pour tout entier n :

$$L^{(n)}(u) = \frac{(n+1)!}{(1-u)^{n+2}}, \text{ d'où } L^{(n)}(0) = (n+1)!$$

On en déduit que pour tout entier n, $M_n(X) = L^{(n)}(0)$.

b) On a $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{M_n(X)}{n!}u^n = \sum\limits_{n\geq 0}(n+1)u^n$

Or pour tout $u \in]-1,1[$, on sait que la série géométrique dérivée $\sum_{n\geq 1} k.u^{k-1}$ converge de somme $\dfrac{1}{(1-u)^2}$.

On en déduit que pour tout $u \in]-1,1[$, $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)u^n = \dfrac{1}{(1-u)^2}$

On conclut :

$$\forall\, u \in]-1,1[, L(u) = E(\mathrm{e}^{uX}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M_n(X)}{n!}u^n$$

Exercice 3.09.

On considère une succession (éventuellement infinie) de lancers d'une pièce. On suppose que la probabilité d'obtenir Pile lors d'un lancer est $1-x$ et que la probabilité d'obtenir Face est x. Les résultats des différents lancers sont supposés indépendants.

On suppose que cette expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note S_n le nombre de fois où l'on a obtenu Pile au cours des n premiers lancers et T_n le numéro du lancer où l'on obtient Pile pour la n-ième fois.

1. Préciser la loi de S_n, son espérance et sa variance.

2. a) Pour tout entier k et tout entier non nul n, montrer que :

$$P(T_n = n+k) = \binom{k+n-1}{n-1}(1-x)^n x^k.$$

b) Montrer que $\sum_{k=0}^{\infty} P(T_n = n+k) = 1$. Quelle est la signification de ce résultat ?

c) Montrer que T_n admet une espérance et calculer $E(T_n)$.

d) Calculer de même $E(T_n(T_n+1))$; en déduire la variance de T_n.

3. Soient a un réel strictement positif et λ un réel strictement supérieur à 1. Un joueur joue de la manière suivante : lors du k-ième lancer il joue la somme a^{k-1} euros.

• Si Pile sort, il reçoit la somme de λa^{k-1} euros et il perd sa mise.

• Si Face sort, il perd sa mise.

Puis on passe au lancer suivant ...

On note G_n la somme des gains (positifs ou négatifs) du joueur après son n-ième succès. On suppose $a > 1$.

a) Exprimer G_1 en fonction de a^{T_1}

b) Après avoir justifié son existence, calculer $E(G_1)$.

c) Exprimer G_2 en fonction de a^{T_1} et a^{T_2}.

Solution

1. La variable aléatoire S_n suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, 1-x)$, son espérance vaut $n(1-x)$, sa variance $nx(1-x)$.

2. a) Obtenir l'événement $(T_r = k+r)$, c'est avoir obtenu exactement $r-1$ pile durant les $k+r-1$ premiers lancers, et pile au lancer de rang $k+r$. On obtient donc, pour tout entier k et tout entier non nul r :

$$P(T_r = k+r) = \binom{k+r-1}{r-1}(1-x)^{r-1}x^k(1-x) = \binom{k+r-1}{r-1}(1-x)^r x^k$$

b) Ainsi, en utilisant les formules de référence du cours :

$$E(T_n) = \sum_{k=0}^{\infty}(k+n)\binom{k+n-1}{k-1}(1-x)^n x^k = n(1-x)^n \sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+n}{n}x^k$$
$$= \frac{n}{1-x}$$

c) On trouve :

$$E(T_n(T_n+1)) = \sum_{k=0}^{\infty}(k+n)(k+n+1)\binom{k+n-1}{n-1}(1-x)^n x^k$$
$$= n(n+1)(1-x)^n \sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+n+1}{n+1}x^k = \frac{n(n+1)}{(1-x)^2}$$

D'où l'on déduit, $V(T_n) = E(T_n^2) - E^2(T_n) = \dfrac{nx}{(1-x)^2}$

[Notons que l'on peut obtenir ces résultats sans calculs, en remarquant que T_n est la somme de n variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi géométrique de paramètre $1-x$ (temps d'attente pour obtenir un premier pile ou un nouveau pile après en avoir obtenu un)]

3. On note G_n la somme des gains (positifs ou négatifs) du joueur après son n-ième succès. On suppose $a > 1$.

a) Si $T_1 = k$, $G_1 = -\sum_{i=1}^{k} a^{i-1} + \lambda a^{k-1} = \dfrac{1-a^k}{a-1} + \lambda a^{k-1}$. D'où l'on déduit que :

$$G_1 = \frac{1-a^{T_1}}{a-1} + \lambda a^{T_1-1}$$

b) Comme T_1 suit la loi $\mathcal{G}(1-x)$, on a :

$$E(a^{T_1}) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n P(T_1 = n) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n x^{n-1}(1-x) = \frac{a(1-x)}{1-ax}$$

D'o : $E(G_1) = \dfrac{-1+\lambda(1-x)}{1-ax}$.

c) On montre de même que $G_2 = \dfrac{1-a^{T_2}}{a-1} + \lambda(a^{T_2-1} + a^{T_1-1})$.

On en déduirait : $E(G_2) = \dfrac{(\lambda(1-x)-1)(a+1-2ax)}{(1-ax)^2}$.

Exercice 3.10.

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Un rat se trouve dans une boîte. Sur les cloisons de cette boîte sont dessinées $n-1$ fausses portes et cette boîte comporte également une vraie porte lui permettant de sortir de la boîte (on suppose $n \geqslant 2$).
Lorsque le rat s'aperçoit qu'il a choisi une fausse porte, il revient au centre de la boîte pour un nouvel essai.
On note X la variable aléatoire représentant le nombre d'essais faits par l'animal pour trouver la porte qui lui permet de sortir.

1. On suppose que le rat ne possède pas de mémoire. Déterminer la loi de X.

2. Dans cette question, le rat ne possède toujours pas de mémoire, et à chaque erreur, on dessine une nouvelle fausse porte. Au départ, la cage possède une fausse porte et la vraie porte.
Déterminer, dans ce cas, la loi de X. Cette variable aléatoire admet-elle une espérance ?

3. On suppose, dans cette question, le rat sans mémoire pendant les ℓ premiers essais (avec $\ell \in \mathbb{N}^*$), puis possédant une mémoire immédiate ensuite : à partir du $(\ell+1)$-ième essai, et tant qu'il n'est pas sorti, il évite alors la dernière porte essayée pour l'essai suivant.

a) On pose $X' = Y \times \mathbf{1}_{[Y \leq \ell]} + (\ell + Z) \times 1_{[Y > \ell]}$, où Y et Z sont deux variables aléatoires, telles que Y suit une loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{n}$ et Z une loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{n-1}$.

Déterminer la loi de X' et vérifier que $\sum_{k=1}^{\infty} P(X' = k) = 1$.

b) Montrer que X suit la même loi que X'.

c) Proposer un algorithme de simulation de la variable aléatoire X.

Solution

1. La variable aléatoire X représente le nombre d'essais pour obtenir le premier succès. Ainsi $X \hookrightarrow \mathcal{G}(1/n)$

2. On regarde ce qui se passe pour des petites valeurs :
$\rightarrow$ On a $P(X=1) = 1/2$.

$\rightarrow$ On a : $(X=2)=E_1\cap S_2$ et $P(X=2)=P_{E_1}(S_2)P(E_1)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$.
$\rightarrow$ De manière générale, on a $(X=k)=S_k\cap E_{k-1}\cap\cdots\cap E_1$ et, par la formule des probabilités composées :

$$P(X=k)=P_{E_{k-1}\cap\cdots\cap E_1}(S_k)\times P_{E_{k-2}\cap\cdots\cap E_1}(E_{k-1})\times\cdots\times P_{E_1}(E_2)\times P(E_1)$$
$$=\frac{1}{k+1}\times\frac{k-1}{k}\times\cdots\times\frac{1}{2}=\frac{1}{k(k+1)}.$$

De manière évidente $E(X)$ n'existe pas.

3. Par définition de X', on a $(X'=k)=\begin{cases}Y=k & \text{si } k\leqslant\ell\\ Z=k-\ell & \text{si } k>\ell\end{cases}$.

et $P(X'=k)=\begin{cases}\frac{1}{n}\big(1-\frac{1}{n}\big)^{k-1} & \text{si } k\leqslant\ell\\ \big(1-\frac{1}{n}\big)^{\ell}\times\frac{1}{n-1}\big(1-\frac{1}{n-1}\big)^{j} & \text{si } k=\ell+j\end{cases}$

On vérifie que l'on définit ainsi une loi de probabilité. En effet :

$$\sum_{k=1}^{\infty}P(X'=k)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\ell}\big(1-\frac{1}{n}\big)^{k-1}+\big(1-\frac{1}{n}\big)^{\ell}\times\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{\infty}\big(1-\frac{1}{n-1}\big)^{j}$$
$$=1-\big(1-\frac{1}{n}\big)^{\ell}+\big(1-\frac{1}{n}\big)^{\ell}=1.$$

b) Il est évident que X suit la loi de X'.

c) Simulation de la loi géométrique de paramètre p :

```
Function geom(p :real) : integer ;
Var a : integer ; x := real
Begin
  a := 1 ; x := random ;
  while x>p
    Begin a := a+1 ; x := random end ;
  geom := a end ;
```

Il reste à utiliser cette idée.

```
Function simul(l,n :integer) : integer ;
Var a : integer ; x := real
Begin
  a := 1 ; x := random ;
  while x>1/n and a<=l
    Begin
    a := a+1 ; x := random end ;
  b := 0 ;
  If a>l
    Begin
    b := b+1 ;
    x := random
```

```
    end ;
simul := a+l+b
end ;
```

Exercice 3.11.

On considère une variable aléatoire réelle discrète X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et } \forall\, k \in \mathbb{N}, P(X = k) = \frac{a^k}{(1+a)^{k+1}}.$$

où $a > 0$ est fixé.

1. Vérifier que l'on a bien défini une loi de probabilité.

Dans toute la suite, on désigne par Y une variable aléatoire indépendante de X, définie sur le même espace probabilisé, et suivant la même loi que X.

2. On considère la variable aléatoire $Z = X + Y$.

   a) Déterminer la loi de Z.

   b) Trouver l'espérance de la variable aléatoire $S = \dfrac{1}{1+Z}$.

   c) Déterminer $E\big(\dfrac{X}{1+Z}\big)$.

3. On considère maintenant la variable aléatoire $T = \inf(X, Y)$, définie par : pour tout $\omega \in \Omega, T(\omega) = \min(X(\omega), Y(\omega))$.

   a) Déterminer $P(X \leqslant n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   b) Prouver que la loi de T est donnée par $T(\Omega) = \mathbb{N}$ et :

$$\forall\, m \in \mathbb{N}, P(T = m) = \frac{1+2a}{(1+a)^2}\big(\frac{a}{1+a}\big)^{2m}.$$

Solution

1. On a :

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) = \frac{1}{1+a}\sum_{k=0}^{\infty}\big(\frac{a}{1+a}\big)^k = \frac{1}{1+a}\times\frac{1}{1-\frac{a}{1+a}} = 1.$$

Ceci prouve que l'on a bien affaire à une loi de de probabilité, puisque la positivité est évidente.

2. a) Comme les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, il vient :

$$P(Z = n) = P(X + Y = n) = P(\bigcup_{k=0}^{n}(X = k) \cap (Y = n - k))$$
$$= \sum_{k=0}^{n}\frac{a^k}{(1+a)^{k+1}}\times\frac{a^{n-k}}{(1+a)^{n-k+1}} = \frac{(n+1)a^n}{(1+a)^{n+2}}$$

b) En utilisant le théorème de transfert, on trouve :

$$E(S) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} P(Z=n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+a)^2} \big(\frac{a}{1+a}\big)^n$$
$$= \frac{1}{(1+a)^2} \times \frac{1}{1-\frac{a}{1+a}} = \frac{1}{1+a}.$$

c) Comme X et Y suivent la même loi, il vient par symétrie :

$$E\big(\frac{X}{1+Z}\big) = E\big(\frac{X}{1+X+Y}\big) = E\big(\frac{Y}{1+X+Y}\big) = E\big(\frac{Y}{1+Z}\big).$$

d) Avec les questions b) et c) on voit que : $2E\big(\frac{X}{1+Z}\big) + E(S) = 1$, d'où :

$$E\big(\frac{X}{1+Z}\big) = \frac{1}{2}\big(1 - E(S)\big) = \frac{a}{2(1+a)}$$

3. On considère maintenant la variable $T = \inf(X, Y)$.

a) La formule sur la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique donne $P(X \leqslant n) = 1 - \big(\frac{a}{1+a}\big)^{n+1}$.

b) On a :

$$P(T \leqslant m) = 1 - P(T > m) = 1 - P(X > m)P(Y > m) = 1 - P(X > m)^2$$
$$= 1 - \Big(\frac{a}{1+a}\Big)^{2(m+1)}$$

Si $m \geqslant 1$, on en déduit que :

$$P(T = m) = \big(\frac{a}{1+a}\big)^{2m} - \big(\frac{a}{1+a}\big)^{2m+2} = \frac{1+2a}{(1+a)^2}\big(\frac{a}{1+a}\big)^{2m}.$$

Comme $P(T=0) = P(T \leqslant 0)$, on voit que la formule reste valable pour $m = 0$.

Exercice 3.12.

On effectue une suite indéfinie de lancers d'une pièce équilibrée. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par p_n la probabilité qu'au cours des n premiers lancers le résultat « Pile » n'ait pas été obtenu trois fois de suite.

1. a) Calculer p_1, p_2 et p_3. Dans la suite on pose $p_0 = 1$.

b) Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 3, on a :

$$p_n = \frac{1}{2}p_{n-1} + \frac{1}{4}p_{n-2} + \frac{1}{8}p_{n-3} \qquad (*)$$

2. a) Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, la série $\sum p_n x^n$ est convergente.

b) Pour $x \in [0,1]$, calculer la somme de la série $\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$.

3. a) Montrer que l'équation $(E) : 8x^3 - 4x^2 - 2x - 1 = 0$ admet une unique racine réelle ; on la note r. Montrer que $0 < r < 1$.

b) Montrer que l'équation (E) admet deux racines complexes conjuguées, ω et $\overline{\omega}$, de module strictement inférieur à r.

c) Montrer que la suite (p_n) est une combinaison linéaire des trois suites $(r^n), (\omega^n)$ et $(\overline{\omega}^n)$. (On pourra montrer que le $\mathbb{C}$–espace vectoriel des suites complexes vérifiant la relation $(*)$ est de dimension 3).

d) En déduire la convergence et la limite de la suite $(p_n)_n$.

Solution

1. a) On trouve $p_1 = p_2 = 1$ et $p_3 = \frac{7}{8}$, puisque l'événement contraire «obtenir trois Pile consécutifs» se réalise avec la probabilité $\frac{1}{8}$.

b) Si $n \geqslant 4$, on n'a pas encore conclu au bout de trois tirages et on a donc pu obtenir F_1 ou P_1F_2 ou $P_1P_2F_3$. A l'issue de chacune de ces séquences on est alors revenu au point de départ.
Ainsi, notons A l'événement «ne pas obtenir 3 Pile consécutifs au cours des n premiers lancers» :
$p_n = P_{F_1}(A)P(F_1) + P_{(P_1 \cap F_2)}(A)P(P_1 \cap F_2) + P_{(P_1 \cap P_2 \cap F_3)}(A)P(P_1 \cap P_2 \cap F_3)$
soit : $p_n = \frac{1}{2}\, p_{n-1} + \frac{1}{4}\, p_{n-2} + \frac{1}{8}\, p_{n-3}$

2. a) Comme $0 \leqslant p_n \leqslant 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a pour $0 \leqslant x < 1$, $0 \leqslant p_n x^n \leqslant x^n$. On en déduit la convergence de la série $\sum p_n x^n$.

b) Par convergence des séries en question, on peut écrire :
$$\sum_{n=3}^{\infty} p_n x^n = \frac{x}{2}\Big(\sum_{n=3}^{\infty} p_{n-1}x^{n-1}\Big) + \frac{x^2}{4}\Big(\sum_{n=3}^{\infty} p_{n-2}x^{n-2}\Big) + \frac{x^3}{8}\Big(\sum_{n=3}^{\infty} p_{n-3}x^{n-3}\Big).$$
Soit, en notant $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$:
$$S(x) - 1 - x - x^2 = \frac{x}{2}\big(S(x) - 1 - x\big) + \frac{x^2}{4}\big(S(x) - 1\big) + \frac{x^3}{8}\, S(x)$$
Soit :
$$S(x) = \frac{2x^2 + 4x + 8}{8 - 4x - 2x^2 - x^3}$$

3. a) Soit $P(x) = 8x^3 - 4x^2 - 2x - 1$. On a :
$$P'(x) = 24x^2 - 8x - 2 = 24(x - \tfrac{1}{2})(x + \tfrac{1}{6}).$$
Ceci permet d'étudier les variations de P sur $\mathbb{R}$ et d'en déduire que $P(x) < 0$ pour $x \leqslant 1/2$, puis que P est strictement croissante sur $[1/2, +\infty[$.
Comme $P(0)P(1) < 0$, l'équation (E) admet une unique racine réelle r appartenant à $]0, 1[$.

b) On remarque d'abord que P étant un polynôme réel de degré 3, ayant une racine réelle, il admet deux racines complexes conjuguées ω et $\overline{\omega}$.

Soit donc ω tel que $P(\omega) = 0$.
Alors $8\omega^3 = 4\omega^2 + 2\omega + 1$ entraîne que

$$8|\omega|^3 \leqslant 4|\omega|^2 + 2|\omega| + 1$$

donc $P(|\omega|) < 0$, ce qui d'après les variations de P entraîne que $|\omega| < r$.

c) Le $\mathbb{C}$–espace vectoriel $\mathcal{S}$ des suites complexes vérifiant la relation $(*)$ est de dimension 3.
$\star$ On montre en effet facilement que c'est un sous-espace vectoriel de l'espace des suites sur $\mathbb{C}$.
$\star$ l'application qui à (x, y, z) associe **LA** suite de $\mathcal{S}$ dont les trois premiers termes sont x, y et z est un isomorphisme de $\mathbb{C}^3$ sur $\mathcal{C}$.

Montrons que les trois suites $(r^n)_n, (\omega^n)_n, (\overline{\omega}^n)_n$ forment un système libre : si pour tout $n \geqslant 0$, on a :

$$\lambda r^n + \mu\omega^n + \nu\overline{\omega}^n = 0$$

on divise par r^n, puis on fait tendre n vers l'infini pour obtenir $\lambda = 0$. En faisant alors $n = 0$, puis $n = 1$, comme $\omega \neq \overline{\omega}$, il vient $\mu = \nu = 0$.

d) On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n = \lambda r^n + \mu\omega^n + \nu\overline{\omega}^n$.
Comme les racines sont toutes de module < 1, il vient : $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = 0$

Exercice 3.13.

Soit $(A_n)_n$ une suite d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
On note B l'événement $\bigcap\limits_{n\geq 1} \bigcup\limits_{k\geq n} A_k$.
On rappelle que cet événement est en fait :

$$B = \{\omega \in \Omega \mid \omega \text{ appartient à une infinité des } A_n\}.$$

1. On suppose que la série $\sum\limits_k P(A_k)$ converge. Montrer que $P(B) = 0$.

2. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires i.i.d. centrées admettant un moment d'ordre 4. On pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.

a) Montrer que $E(S_n^4) = nE(X_1^4) + 3n(n-1)(E(X_1^2))^2$.

b) Soit $\varepsilon > 0$. Donner une majoration de la probabilité $P(|S_n| \geqslant \varepsilon n)$. En déduire la limite en probabilité de la suite $\left(\frac{S_n}{n}\right)_n$.

c) En utilisant la question 1, montrer que sur un ensemble de probabilité 1, on a $\lim \frac{S_n}{n} = 0$.

Solution

1. Pour tout entier m, on a : $\bigcap_{n=1}^{m} \bigcup_{k\geq n} A_k = \bigcup_{k=m}^{\infty} A_k$. La série $\sum P(A_n)$ est convergente. Donc $\lim\limits_{m\to\infty} \sum\limits_{k=m}^{\infty} P(A_k) = 0$.
Or $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) \leqslant P(A) + P(B)$, donne par une récurrence simple $P(A_m \cup A_{m+1} \cup \ldots \cup A_n) \leqslant P(A_m) + P(A_{m+1}) + \cdots + P(A_n)$ et par passage à la limite par σ-additivité :

$$P\big(\bigcup_{k=m}^{\infty} A_k\big) \leqslant \sum_{k=m}^{\infty} P(A_k)$$

ce qui montre que $P(B) = \lim\limits_{m\to\infty} P\big(\bigcap_{n=1}^{m} \bigcup_{k\geq n} A_k\big) = 0$.

2. a) Par linéarité de l'espérance

$$E\big(S_n^4\big) = \sum_i \sum_j \sum_k \sum_\ell E(X_i X_j X_k X_\ell)$$

Les variables (X_i) étant identiquement distribuées **indépendantes** et d'espérance nulle, on ne prend en compte dans ce produit que les termes ne contenant aucun facteur à la puissance 1, donc que les termes en X_i^4 et en $X_i^2 X_j^2$, avec $i < j$.

$\to$ Pour $1 \leqslant i \leqslant n$, il y a un terme en X_i^4 ;

$\to$ Pour $1 \leqslant i < j \leqslant n$, il y a $\binom{4}{2} = 6$ termes en $X_i^2 X_j^2$, car dans l'expression :

$$(X_1 + \cdots + X_n)(X_1 + \cdots + X_n)(X_1 + \cdots + X_n)(X_1 + \cdots + X_n)$$

on doit choisir les deux facteurs dans lesquels on choisit X_i et dans les deux autres on choisit donc X_j.

Ainsi :

$$E(S_n^4) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i^4) + \sum_{i<j} 6\times E(X_i^2 X_j^2)$$

La première somme comporte n termes et la seconde en comporte $\binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$, de plus X_i^2 et X_j^2 sont indépendantes et toutes les variables ont même loi. Par conséquent :

$$E(S_n^4) = nE(X_1^4) + 3n(n-1)(E(X_1^2))^2$$

b) Comme $V(X_1^2) \geqslant 0$, on a :
$(E(X_1^2))^2 \leqslant E(X_1^4)$, et $E(S_n^4) \leqslant (3n^2 - 2n)E(X_1^4)$.

Par l'inégalité de Markov :

$$P(|S_n| \geqslant \varepsilon n) = P(S_n^4 \geqslant \varepsilon^4 n^4) \leqslant \frac{E(S_n^4)}{\varepsilon^4 n^4} \underset{(\infty)}{\sim} \frac{3}{\varepsilon^4 n^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Ainsi, $\big(\dfrac{S_n}{n}\big)_n$ tend en probabilité vers 0.

c) Montrons que $\left(\frac{S_n}{n}\right)_n$ tend p.s. vers 0.

Soit $\varepsilon > 0$ et A_n l'événement $\left\{\omega \in \Omega / \frac{|S_n|}{n} \geqslant \varepsilon\right\}$. La série $\sum P(A_n)$ est convergente.
Par la question précédente une infinité dévénements A_n se produisent avec la probabilité 0, c'est-à-dire qu'ils se produisent un nombre fini de fois avec la probabilité 1.

Donc, à partir d'un moment N, les événements $\left(\frac{|S_n|}{n} < \varepsilon\right)$ se produisent avec une probabilité de 1. Ce qui signifie que la suite $\left(\frac{S_n}{n}\right)_n$ tend vers 0 p.s.

Exercice 3.14.

1. a) Montrer que la fonction $]0, \frac{\pi}{2}[\to]0, 1[, t \mapsto \sin(t)$ réalise une bijection de classe $\mathcal{C}^\infty$. On note h sa bijection réciproque.

b) Montrer que h est dérivable sur $]0, 1[$ et exprimer $h'(x)$ en fonction de x.

On définit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par :

$$\text{pour tout } x \text{ réel : } f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}} & \text{si } x \in]0,1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. a) Soient deux réels a et b tels que : $0 < a \leqslant b < 1$. Montrer que :

$$\int_a^b f(t)\,dt = 2\big(h(\sqrt{b}) - h(\sqrt{a})\big)$$

b) Montrer l'existence et calculer la valeur de $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$.

3. a) Déterminer la constante k de telle sorte que la fonction $g = kf$ soit une densité de probabilité d'une variable aléatoire réelle.

Désormais on note X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de densité g.

b) Déterminer la fonction de répartition G de X.

c) Pour $x \in \mathbb{R}$, exprimer $G(1-x)$ en fonction de $G(x)$. En déduire $P(X < \frac{1}{2})$.

4. Déterminer la loi de la variable aléatoire $h(\sqrt{X})$.

Solution

1. La fonction est continue et strictement croissante : elle réalise une bijection de $]0, \pi/2[$ sur son image $]0, 1[$. Elle est dérivable et sa dérivée ne s'annule pas d'où :

$$\forall\, x \in]0,1[, h'(x) = \frac{1}{\cos(h(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ donc } h \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty$$

2. a) Le changement de variable : $u = \sqrt{t}$ donne :

$$\int_a^b f(t)\,dt = 2\int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = 2(h(\sqrt{a}) - h(\sqrt{b}))$$

b) la fonction f est continue sur $]0, 1[$.

$\rightarrow$ En 0 : $f(t) \sim \dfrac{1}{\sqrt{t}}$,

$\rightarrow$ En 1 : $f(t) \sim \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$,

Donc l'intégrale proposée est convergente et :

$$\int_0^1 f(t)\,dt = \lim_{a\to 0, b\to 1} 2(h(\sqrt{a}) - h(\sqrt{b})) = \pi$$

3. a) Pour tout réel k, kf est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

La fonction kf est positive, $\displaystyle\int_0^1 kf(t)dt = k\pi$. Donc kf est une densité de probabilité si et seulement si $k = \dfrac{1}{\pi}$

b) Un calcul élémentaire donne $G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} x \leqslant 0 \\ \displaystyle\int_0^x g(t)dt = \frac{2}{\pi}h(\sqrt{x}) & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

c) Pour tout $x \in \mathbb{R}, g(x) = g(1-x)$ entraîne :

$$G(1-x) = \int_{-\infty}^{1-x} g(t)\,dt = 1 - \int_{1-x}^{+\infty} g(t)\,dt = 1 - \int_{-\infty}^{x} g(u)du = 1 - G(x)$$

(on a effectué le changement de variable $t = 1 - u$)

D'où : $G(0.5) = 1 - G(0.5) \implies G(0.5) = P(X < \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$

4. Si $t < 0$: $P[h(\sqrt{X}) \leqslant t] = 0$,

Si $0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{2}$: $P(h(\sqrt{X}) \leqslant t) = P(X \leqslant \sin^2(t)) = G(\sin^2(t)) = \dfrac{2}{\pi}h(\sin(t))$

soit :

$$P(h(\sqrt{X}) \leqslant t) = \frac{2}{\pi}t$$

Si $t > \dfrac{\pi}{2}$: $P(h(\sqrt{X}) \leqslant t) = 1$.

Ainsi $h(\sqrt{X})$ suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0, \pi/2]$.

Exercice 3.15.

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et $U_n = \inf_{1\leq k\leq n} X_k$.

1. Soit n un entier naturel non nul.

a) Déterminer la loi de U_n.

b) Reconnaître la loi de S_n, puis en donner une densité. Montrer que pour tout $x > 0$

$$P(S_n > x) = \mathrm{e}^{-\lambda x} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k x^k}{k!}$$

2. Soit N une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendante des variables (X_i) et qui suit la loi géométrique de paramètre p, avec $0 < p < 1$. On définit S et U par :

$$\text{pour tout } \omega \in \Omega, S(\omega) = S_{N(\omega)}(\omega) \quad \text{et} \quad U(\omega) = U_{N(\omega)}(\omega).$$

On admet que S et U sont deux variables aléatoires.

a) Montrer que U est une variable aléatoire à densité et déterminer une densité de U.

b) Déterminer la loi de S (on admettra que l'on peut permuter l'ordre des sommations rencontrées).

Solution

1. a) Si $x < 0$, on a $P(U_n \leqslant x) = 0$.

Si $x \geqslant 0$, alors, par indépendance :

$$P(U_n > x) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i > x) = (\mathrm{e}^{-\lambda x})^n = \mathrm{e}^{-\lambda n x}$$

Ainsi U_n suit la loi exponentielle de paramètre $n\lambda$.

b) On sait que S_n suit la loi $\Gamma\left(\frac{1}{\lambda}, n\right)$. Une densité de S_n est donnée par :

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant 0 \\ \dfrac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-1} \mathrm{e}^{-\lambda t} & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

On remarque que pour tout $n \geqslant 1$ et $t > 0$, $f'_{n+1}(t) = \lambda f_n(t) - \lambda f_{n+1}(t)$.

Si l'on note F_n la fonction de répartition de S_n, alors, en intégrant l'égalité ci-dessus sur $[0, x]$, il vient :

$$\frac{1}{\lambda} f_{n+1}(x) = F_n(x) - F_{n+1}(x)$$

On termine par télescopage.

2. a) On utilise le système complet d'événements $(N = n)_{n\geq 1}$. Ainsi, pour $x > 0$ et par indépendance :

$$P(U > x) = \sum_{n=1}^{\infty} P((U > x) \cap (N = n)) = \sum_{n=1}^{\infty} P(U_n > x)P(N = n)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} q^n \mathrm{e}^{-n\lambda x} = \frac{p\mathrm{e}^{-\lambda x}}{1 - q\mathrm{e}^{-\lambda x}}.$$

et

$$F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \dfrac{p\mathrm{e}^{-\lambda x}}{1 - q\mathrm{e}^{-\lambda x}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Cette fonction est continue de classe $\mathcal{C}^1$ sauf en 0, monotone croissante, et telle que $\lim\limits_{x\to-\infty} F_U(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to\infty} F_U(x) = 1$, donc U est une variable densité.

b) On agit de la même façon avec S.

$$P(S > x) = \sum_{n=1}^{\infty} P((S > x) \cap (N = n)) = \sum_{n=1}^{\infty} P(S_n > x)P(N = k)$$
$$= p\mathrm{e}^{-\lambda x} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^k}{k!} q^{n-1} = p\mathrm{e}^{-\lambda x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda x)^k}{k!} \sum_{n=k+1}^{\infty} q^{n-1}$$
$$= p\mathrm{e}^{-\lambda x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda x)^k}{k!} \frac{q^k}{1-q} = \mathrm{e}^{-\lambda(1-q)x}$$

Ainsi S suit la loi exponentielle de paramètre λp.

Exercice 3.16.

Soit Y et Z deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, admettant chacune un moment d'ordre 2. On admet alors que l'espérance $E(YZ)$ existe.

1. Montrer que $(E(YZ))^2 \leqslant E(Y^2)E(Z^2)$.

2. Soit X une variable aléatoire ayant un moment d'ordre 2. Soit $\varepsilon > 0$ et $U = \varepsilon - X + E(X)$. Soit $B = \mathbf{1}_{(U>0)}$ la variable aléatoire indicatrice de l'événement $(U > 0)$.

a) Justifier que l'on a $U \leqslant UB$.

b) A l'aide du résultat de la première question appliqué aux variables aléatoires U et B, montrer l'inégalité :

$$P(X - E(X) \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{V(X)}{V(X) + \varepsilon^2}$$

c) Montrer de même que : $P(X - E(X) \leqslant -\varepsilon) \leqslant \dfrac{V(X)}{V(X) + \varepsilon^2}$.

d) Donner un majorant de $P(|X - E(X)| \geqslant \varepsilon)$ et comparer avec le majorant fourni par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Solution

1. La quantité $E((X+\lambda Y)^2)$ est positive pour tout λ. De plus, par linéarité de l'espérance, on a :

$$E((X+\lambda Y)^2) = \lambda^2 E(Y^2) + 2\lambda E(XY) + E(X^2)$$

Ce trinôme du second degré reste positif sur $\mathbb{R}$: son discriminant est donc négatif ou nul ce qui se traduit par l'inégalité demandée.

2. a) Pour tout ω tel que $U(\omega) > 0$, on a $U(\omega)B(\omega) = U(\omega)$.
Pour tout ω tel que $U(\omega) \leqslant 0$, on a : $U(\omega)B(\omega) = 0 \geqslant U(\omega)$.

b) En appliquant l'inégalité de la première question aux variables U et B, on obtient :

$$E^2(U) \leqslant E^2(UB) \leqslant E(U^2)E(B^2)$$

Or $E(U) = \varepsilon$ donc $\varepsilon^2 \leqslant E(U^2)E(B^2)$.
Enfin :
• $E(U^2) = \varepsilon^2 + V(X)$.
• $E(B^2) = E(B) = P(U > 0) = P(X - E(X) < \varepsilon)$.
Ainsi $\varepsilon^2 \leqslant (\varepsilon^2 + V(X))P(X - E(X) < \varepsilon)$.
On termine en prenant la probabilité de l'événement contraire.

c) On recommence ce qui précède en remplaçant la variable X par $-X$, et on trouve :

$$P(-X - E(-X) \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{V(-X)}{\varepsilon^2 + V(-X)}$$

soit :

$$P(X - E(X) \leqslant -\varepsilon) \leqslant \frac{V(X)}{V(X) + \varepsilon^2}$$

En ajoutant les inégalités précédentes membre à membre, on trouve :

$$P(|X - E(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{2V(X)}{V(X) + \varepsilon^2}$$

d) L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev s'écrit $P(|X-E(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{V(X)}{\varepsilon^2}$ et on doit donc comparer $\dfrac{2V(X)}{V(X)+\varepsilon^2}$ et $\dfrac{V(X)}{\varepsilon^2}$.

Il suffit de faire la différence :

$$\frac{2V(X)}{V(X)+\varepsilon^2} - \frac{V(X)}{\varepsilon^2} = \frac{V(X)(\varepsilon^2 - V(X))}{\varepsilon^2(V(X)+\varepsilon^2)}$$

Le majorant obtenu par la nouvelle inégalité est meilleur (plus petit) que celui fourni par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev si et seulement si $\varepsilon^2 < V(X)$.

Exercice 3.17.

Les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On rappelle que pour tout entier naturel a, il existe un unique entier naturel m et un unique m-uplet $(a_0, \dots, a_{m-1}) \in [\![0,9]\!]^m$ tels que $a = \sum_{i=0}^{m-1} a_i 10^i$ et $a_{m-1} \neq 0$. Cette écriture est l'écriture en base 10 de a.
On dispose d'une urne contenant 10 boules indiscernables au toucher et numérotées de 0 à 9. Dans tout cet exercice, n désigne un entier naturel non nul et $[\![0,n]\!]$ l'ensemble des entiers naturels compris entre 0 et n. L'objectif de cet exercice est de proposer une méthode de simulation d'une loi uniforme sur $[\![0,n]\!]$ à l'aide de cette urne.

1. Montrer qu'il existe un unique entier naturel k tel que $10^{k-1} \leqslant n \leqslant 10^k - 1$.

On effectue k tirages successifs, au hasard et avec remise à chaque fois de la boule obtenue avant le tirage suivant, d'une boule de l'urne.
On note $X_0, \dots, X_{k-1}$ les variables aléatoires donnant les résultats successifs des tirages. Enfin, on note $N(\omega) = \sum_{i=0}^{k} X_i(\omega) 10^i$.

2. a) Déterminer $N(\Omega)$.
   b) Déterminer la loi de N.
   c) Calculer $E[N]$.

Soit $(N_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de même loi que N.
Pour tout $\omega \in \Omega$, on note $T(\omega) = \inf\{i \in \mathbb{N}^\star / N_i(\omega) \in [\![0,n]\!]\}$ lorsque l'ensemble précédent est non vide (si cet ensemble est vide on pose $T(\omega) = 0$).
Enfin, pour tout $\omega \in \Omega$, on note $X(\omega) = N_{T(\omega)}(\omega)$.

3. a) Déterminer la loi de T.
   b) Déterminer la loi de X.

Solution

1. La famille $([10^{k-1}, 10^k - 1[, k \geqslant 1)$ est une partition de $[1, +\infty[$. Ainsi, il existe un unique entier naturel k tel que $10^{k-1} \leqslant n < 10^k - 1$.

2. a) Pour tout $i \in [\![0,k]\!]$, $X_i(\omega) \in [\![0,9]\!]$. Ainsi,
$$0 \leqslant \sum_{i=0}^{k-1} X_i(\omega) 10^i \leqslant \sum_{i=0}^{k-1} 9 \cdot 10^i \leqslant 9 \cdot \frac{10^k - 1}{10 - 1} \leqslant 10^k - 1$$
Ainsi, d'après les rappels sur l'écriture décimale des entiers :
$$N(\Omega) = [\![0, 10^k - 1]\!]$$

b) Soit $a \in [\![0, 10^k - 1]\!]$. Notons $a = \sum_{i=0}^{k-1} a_i 10^i$. D'après l'unicité de la décomposition décimale et l'indépendance des lancers,

$$P(N = a) = P((X_0 = a_0) \cap \cdots \cap (X_{k-1} = a_{k-1})) = \prod_{k=0}^{k-1} P(X_i = a_i) = \frac{1}{10^k}$$

Ainsi, N suit la loi uniforme sur $[\![0, 10^k - 1]\!]$.

c) N suivant la loi uniforme sur $[\![0, 10^k - 1]\!]$, on a :

$$E(N) = \frac{10^k - 1}{2}$$

3. a) La loi de T est la loi du temps d'attente d'un premier succès dans une succession d'épreuves indépendantes. Ainsi, T suit la loi géométrique de paramètre $p = P(N \in [\![0, n]\!]) = \frac{n+1}{10^k}$.

b) Soit $a \in [\![0, n]\!]$. Notons $p = 1 - q = \frac{n+1}{10^k}$. En utilisant le système complet d'événements $(T = i)_{i \in \mathbb{N}^*}$:

$$P(X = a) = P(N_T = a) = \sum_{i=1}^{\infty} \big(\prod_{j=1}^{i-1} P(N_j \notin [\![0, n]\!]) \big) P(N_i = a)$$

$$= \frac{1}{10^k} \sum_{i=1}^{\infty} \big(1 - \frac{n+1}{10^k}\big)^{i-1} = \frac{1}{10^k} \times \frac{1}{\frac{n+1}{10^k}} = \frac{1}{n+1}.$$

Ainsi, X suit la loi uniforme sur $[\![0, n]\!]$.

Exercice 3.18.

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Une urne U_1 contient des boules rouges et blanches en proportions respectives $p \in]0, 1[$ et $q = 1 - p$. Une urne U_2 contient dix jetons numérotés de 0 à 9.

On effectue des tirages avec remise d'une boule de l'urne U_1 jusqu'à obtenir une boule rouge. On note N la variable aléatoire correspondant au nombre de tirages effectués.

On effectue alors N tirages avec remise d'un jeton de l'urne U_2. L'entier compris entre 0 et 9 issu du k-ième tirage sera noté $Y_k(\omega)$. On forme ainsi un nombre réel de $[0, 1]$ défini par :

$$X(\omega) = \sum_{k=1}^{N(\omega)} \frac{Y_k(\omega)}{10^k}$$

(le résultat du k-ième tirage donne donc la k-ième décimale de $X(\omega)$)

1. Déterminer la loi de N.

Un *nombre décimal* de $[0, 1]$ est un réel d de $[0, 1]$ vérifiant : il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $10^m d \in \mathbb{N}$. On note $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres décimaux.

2. Montrer que $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \cap [0,1]$ et que cette inclusion est stricte.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{D}_n$ l'ensemble des décimaux qui s'écrivent sous la forme $0, a_1 a_2 \dots a_n$ où $a_n \neq 0$. Déterminer le cardinal de $\mathbb{D}_n$.

4. a) Calculer $P(X = 0)$.

b) En remarquant que $0{,}375 = 0{,}3750 = 0{,}37500 = \cdots$, montrer que

$$P(X = 0{,}375) = \frac{pq^2}{10^2(10-q)}.$$

c) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $d = 0{,}a_1 \cdots a_n$ un nombre décimal tel que $a_n \neq 0$. Calculer $P(X = d)$.

d) Vérifier que l'on définit bien ainsi une loi de probabilité sur $\mathbb{D}$.

Solution

1. La variable aléatoire N suit la loi géométrique de paramètre p.

2. Soit $d \in \mathbb{D}$. Il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $10^m d = r \in \mathbb{N}$. Ainsi, $p = \dfrac{r}{10^m} \in \mathbb{Q}$. On remarque que $1/3 = 0{,}333\cdots$ n'appartient pas à $\mathbb{D}$.

3. Comme $(a_1, \dots, a_n) \in [\![0,9]\!]^{n-1} \times [\![1,9]\!]$, alors $\operatorname{card} \mathbb{D}_n = 9.10^{n-1}$.

4. a) La famille $(N = m)_{m \geq 1}$ étant un système complet d'événements :

$$P(X = 0) = \sum_{m=1}^{\infty} P_{(N=m)}(X = 0) P(N = m) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{10^m} pq^{m-1} = \frac{p}{10-q}$$

b) Pour obtenir 0,375, alors N doit être au moins égal à 3. Ainsi, en utilisant la remarque et les evénements $(N = m)_{m \geq 3}$:

$$P(X = 0{,}375) = \sum_{m=3}^{\infty} P_{(N=m)}(X = 0{,}375) P(N = m)$$

$$P(X = 0{,}375) = \sum_{m=3}^{\infty} P(Y_1 = 3, Y_2 = 7, Y_3 = 5, Y_4 = 0, \dots, Y_m = 0) pq^{m-1}$$

(si $m = 3$, la liste s'arrête Y_3)

$$P(X = 0{,}375) = \sum_{m=3}^{\infty} \frac{1}{10^m} pq^{m-1} = \frac{pq^2}{10^2(10-q)}$$

c) En reprenant le système complet d'événement $(N = m)_{m \geq 1}$, on obtient plus généralement :

$$\begin{aligned} P(X = d) &= \sum_{m=1}^{\infty} P_{(N=m)}(X = d) P(N = m) \\ &= \sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{10^m} pq^{m-1} = \frac{pq^{n-1}}{10^{n-1}(10-q)} \end{aligned}$$

d) En utilisant les notations précédentes :

$$\sum_{d\neq 0} P(X=d) = \sum_{n=1}^{\infty} \text{card}(\mathbb{D}_n) \times \frac{pq^{n-1}}{10^{n-1}(10-q)} = \sum_{n=1}^{\infty} 9.10^{n-1} \times \frac{pq^{n-1}}{10^{n-1}(10-q)}$$
$$= \frac{9p}{10-q} \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = \frac{9}{9-p}$$

et $\sum_{d\in\mathbb{D}} P(X=d) = 1$.

Exercice 3.19.

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et toutes de même loi uniforme sur $[0,1]$.
On suppose que toutes les variables U_n et V_n (pour $n \in \mathbb{N}^*$) sont indépendantes.

1. Pour tout réel $x \in]0,1]$, calculer l'intégrale : $J(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{t\,(x-t)}} dt$.

[On pourra justifier et utiliser le changement de variable (à x fixé) :

$$\varphi :]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}\ , \theta \mapsto t = \frac{x}{2}\ \sin\theta + \frac{x}{2}\ ]$$

2. a) Déterminer la loi de U_n^2.

b) Justifier que la variable $U_n^2 + V_n^2$ possède une densité h, que l'on exprimera sous forme d'une intégrale.

c) Déterminer $h(x)$ pour $x \in [0,1]$.

3. On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, X_n = \begin{cases} 1 & \text{si } U_n^2 + V_n^2 \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
Déterminer la loi de X_n.

4. a) Prouver que la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, Z_n = \frac{4}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k$, converge en probabilité vers la constante π.

Soit $\alpha \in]0,1[$ et $\delta > 0$.

b) Montrer qu'il existe un entier n_0, qu'on exprimera en fonction de α et δ, tel que

$$\forall\, n \geq n_0, P(|Z_n - \pi| > \delta) \leqslant \alpha.$$

Solution

1. Si $x \in]0,1]$ et $t \in]0,x[$, alors $x - t \in]0,1[$; l'intégrale est convergente (règle de Riemann).
Effectuons le changement de variable de classe $\mathcal{C}^1$ bijectif $\varphi :]-\pi/2, \pi/2[\to]0,x[$ défini dans l'énoncé. Comme $\cos\theta \geq 0$, il vient :

$$J(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{\frac{x^2}{4} - (t - \frac{x}{2})^2}} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\frac{x}{2}\cos(\theta)d\theta}{\sqrt{\frac{x^2}{4}(1 - \sin^2\theta)}} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dt = \pi.$$

2. a) Pour $z \in]0,1]$, $P(U_n^2 \leq z) = \sqrt{z}$; donc une densité de U_n^2 est :

$$f_Z(z) = \frac{1}{2\sqrt{z}} \text{ si } z \in]0,1], \text{ et 0 sinon.}$$

b) $(U_n^2 + V_n^2)(\Omega) = [0,2]$;

Les variables aléatoires U_n^2 et V_n^2 sont indépendantes de même loi à densité (nulle en dehors de $[0,1]$) donc, par convolution :

$\to h(z) = 0$ si $[z \leq 0$ ou $z \geq 2]$

$\to h(z) = \int_0^z f_Z(t) f_Z(z-t)\, dt$ sinon.

c) $0 \leq z \leqslant 1 \implies h(z) = \int_0^z \frac{dt}{4\sqrt{t(z-t)}} = \frac{\pi}{4}$.

3. X_n suit une loi de Bernoulli de paramètre :

$$P(X_n = 1) = P(U_n^2 + V_n^2 \leq 1) = \int_0^1 \frac{\pi}{4}\, dz = \frac{\pi}{4}$$

4. a) Les variables aléatoires $4X_n$ sont indépendantes, équidistribuées et d'espérance finie, donc d'après la loi faible des grands nombres,$(Z_n)_n$ tend en probabilité vers $E(4X_1) = \pi$.

b) Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebicheff

$$P(|Z_n - \pi| > \delta) \leqslant \frac{V(Z_n)}{\delta^2} = \frac{\pi(4-\pi)}{n\delta^2}, \text{ d'où } n_0 = \left\lceil \frac{\pi(4-\pi)}{\alpha\delta^2} \right\rceil$$

o $\lceil x \rceil$ désigne le plus petit entier au moins égal x.

Exercice 3.20.

Dans cet exercice, N désigne un entier naturel non nul et k un entier naturel fixé supérieur strictement à 2.

On considère une urne contenant N boules numérotées de 1 à N, indiscernables au toucher.

On pratique dans cette urne des tirages successifs d'une boule avec remise et on arrête les tirages dès qu'on a obtenu k boules consécutives portant le même numéro.

On suppose que l'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On note T la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir l'arrêt des tirages (on admet que T est bien une variable aléatoire).

1. a) Donner $T(\Omega)$.

b) Déterminer les valeurs de $P(T = k)$ et $P(T = k + 1)$.

c) Donner la valeur de $P(T = k + 2)$.

2. a) Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$, $(T = m + k) \subset (T > m)$.

b) En déduire que pour tout $m \in \mathbb{N}$, $P(T = m + k) = \frac{N-1}{N^k} P(T > m)$.

c) A l'aide de la formule précédente, montrer que, pour tout entier naturel n tel que $n \geqslant k + 1$:

$$P(T = n + 1) = P(T = n) - \frac{N-1}{N^k} P(T = n - k + 1)$$

3. Compléter le programme suivant pour qu'il simule les tirages décrits précédemment et qu'il calcule et affiche la valeur prise par T.

```
Program escp2014 ;
Var x, y, k, c, N, t : integer ;
Begin
Randomize ; Readln(k, N) ;
c : = 1 ; t : = 1 ; x : = random(N) + 1 ;
While (c < k) do begin
y : = random(N) + 1 ;
If (y = x) then c : ------ else If (c > 1) then c : = ------ ;
x : = y ;
t : = ------ ;
end ;
Writeln(t) ; end.
```

Solution

1. a) Le premier tirage donnant une boule quelconque (probabilité égale à 1 !), réaliser $(T = k)$ c'est tirer $k - 1$ fois consécutivement la même boule que celle tirée en premier.
On a donc, par indépendance : $P(T = k) = \frac{1}{N^{k-1}}$.

b) Réaliser $(T = k + 1)$, c'est tirer une première boule (probabilité égale à 1), puis une boule différente (probabilité égale à $\frac{N-1}{N}$) et tirer ensuite $k - 1$ fois de suite la même boule que la deuxième (à chaque fois ceci se produit avec la probabilité $1/N$).
On a donc, par indépendance : $P(T = k + 1) = \frac{N-1}{N^k}$.

c) Comme $k > 2$, on a $P(T = k + 2) = \frac{N^2(N-1)}{N^{k+2}} = \frac{N-1}{N^k}$ (on choisit la boule qui permet de gagner de N façons, cette boule est obtenue du tirage de

rang 3 au tirage de rang $k+2$, le tirage de rang 2 a dû amener une autre boule (sinon on s'arrête trop tôt) et le résultat du tirage de rang 1 est quelconque).

2. a) Comme k est strictement positif, on a l'inclusion : $(T = m+k) \subset (T > m)$.

b) On en déduit que $(T = m+k) \cap (T > m) = (T = m+k)$. Par conséquent, on obtient :

$$P(T = m+k) = P_{(T>m)}(T = m+k)P(T > m)$$

Or, par indépendance, on a $P_{(T>m)}(T = m+k) = P(T = k+1)$. En effet, la $(m+1)$-ème boule doit être distincte de la m-ème, puis ensuite, on doit tirer $k-1$ fois la même boule que la $(m+1)$-ème.

Finalement : $P(T = m+k) = \dfrac{N-1}{N^k} P(T > m)$.

c) Pour $m = n-k$ (qui est bien supérieur ou égal à 1), on trouve :

$$P(T = n) = \frac{N-1}{N^k} P(T > n-k)$$

Pour $m = n+1-k$ (qui est bien supérieur ou égal à 1), on trouve :

$$P(T = n+1) = \frac{N-1}{N^k} P(T > n+1-k)$$

En soustrayant membre à membre, on a :

$$P(T = n+1) - P(T = n) = \frac{N-1}{N^k} \left(P(T > n+1-k) - P(T > n+1-k)\right)$$

Comme T est à valeurs entières, on obtient :

$$P(T = n+1) - P(T = n) = -\frac{N-1}{N^k} P(T = n+1-k)$$

3.
```
Program escp2014 ; Var x, y, k, c, N, t : integer ;
Begin
Randomize ; Readln(k, N) ;
c : = 1 ; t : = 1 ; x : = random(N) + 1 ;
While (c < k) do
begin
y : = random(N) + 1 ;
If (y = x) then c : = c + 1 else If (c > 1) then c : = 1 ;
x : = y ;
t : = t + 1 ;
end ;
Writeln(t) ;
end.
```

Exercice 3.21.

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ et $(Y_n)_{n\geq 1}$ deux suites de variables aléatoires. On suppose que la suite (X_n) *converge en loi* vers une variable aléatoire X et que la suite (Y_n) *converge en probabilité* vers une constante θ.

Partie A. On veut montrer dans cette partie que la suite (X_n+Y_n) converge en loi vers $X+\theta$.

1. Montrer que l'on peut supposer que $\theta = 0$.
On suppose donc désormais que (Y_n) *converge en probabilité vers* 0.

Soit $\varepsilon > 0$ et x un point de continuité de la fonction de répartition de X.

2. a) En utilisant le système complet d'événements $\{(|Y_n| > \varepsilon), (|Y_n| \leqslant \varepsilon)\}$, montrer que :

$$P(X_n + Y_n \leqslant x) \leqslant P(X_n \leqslant x + \varepsilon) + P(|Y_n| > \varepsilon)$$

b) Montrer de même que $P(X_n \leqslant x - \varepsilon) \leqslant P(X_n + Y_n \leqslant x) + P(|Y_n| > \varepsilon)$.

c) En déduire que $P(X_n \leqslant x-\varepsilon)-P(|Y_n| > \varepsilon) \leqslant P(X_n \leqslant x+\varepsilon)+P(|Y_n| > \varepsilon)$.

3. Montrer que $(X_n + Y_n)$ converge en loi vers X.

Partie B. On veut montrer dans cette partie que la suite (X_nY_n) converge en probabilité vers θX.

1. Montrer que l'on peut supposer que $\theta = 0$.
On suppose donc désormais que (Y_n) *converge en probabilité vers* 0.

2. Soit M un réel strictement positif et $\varepsilon > 0$. En utilisant le système complet d'événements $\{(|Y_n| > 1/M), (|Y_n| \leqslant 1/M)\}$, montrer que :

$$P(|X_nY_n| > \varepsilon) \leqslant P(|X_n| > \varepsilon M) + P(|Y_n| > 1/M)$$

3. En utilisant le fait que (Y_n) tend en probabilité vers 0, montrer que (X_nY_n) converge en probabilité vers 0.

Solution

Partie A.

1. On peut supposer $\theta = 0$ en écrivant $X_n + Y_n = (X_n + \theta) + (Y_n - \theta)$ et $(Y_n - \theta)_n$ tend en probabilité vers 0.

2. a) En utilisant le système complet proposé, il vient :

$P(X_n + Y_n \leqslant x) =$

$$P((X_n + Y_n \leqslant x) \cap (|Y_n| \leqslant \varepsilon)) + P((X_n + Y_n \leqslant x) \cap (|Y_n| > \varepsilon))$$

$$P(X_n + Y_n \leqslant x) \leqslant P(X_n \leqslant x + \varepsilon) + P(|Y_n| > \varepsilon)$$

En effet :
$(X_n + Y_n \leqslant x) \cap (|Y_n| > \varepsilon) \subset (|Y_n| > \varepsilon)$

et
$$(X_n+Y_n\leqslant x)\cap(|Y_n|\leqslant\varepsilon)=(X_n\leqslant x-Y_n)\cap(-\varepsilon\leqslant Y_n\leqslant\varepsilon)\subset(X_n\leqslant x+\varepsilon)$$

b) Avec le même raisonnement, il vient :
$$P(X_n\leqslant x-\varepsilon)=P((X_n\leqslant x-\varepsilon)\cap(|Y_n|\leqslant\varepsilon))+P((X_n\leqslant x-\varepsilon)\cap(|Y_n|>\varepsilon))$$
$$P(X_n\leqslant x-\varepsilon)\leqslant P(X_n+Y_n\leqslant x)+P(|Y_n|>\varepsilon)$$

c) Ainsi, par les deux inégalités précédentes :
$$P(X_n\leqslant x-\varepsilon)-P(|Y_n|>\varepsilon)\leqslant P(X_n+Y_n\leqslant x)\leqslant P(X_n\leqslant x+\varepsilon)-P(|Y_n|>\varepsilon)$$

3. Pour ε petit, avec $x\pm\varepsilon$ point de continuité de F_X, on sait que :
$$\lim_{n\to\infty}P(X_n\leqslant x\pm\varepsilon)=P(X\leqslant x\pm\varepsilon)\text{ et }\lim_{n\to\infty}P(|Y_n|>\varepsilon)=0$$
Donc par les inégalités vues en 2. c), $(X_n+Y_n)_n$ converge en loi vers X.

Partie B.

1. On peut supposer $\theta=0$ en écrivant $X_nY_n=X_n(Y_n-\theta)+\theta X_n$, car $\lim\limits_{n\to\infty}\theta X_n=\theta X$. Il suffit donc de montrer que $X_n(Y_n-\theta)$ converge en probabilité vers 0 et par la partie précédente que (X_nY_n) converge en probabilité vers 0.

2. On écrit :
$$P(|X_nY_n|>\varepsilon)=$$
$$P((|X_nY_n|>\varepsilon)\cap(|Y_n|>1/M))+P((|X_nY_n|>\varepsilon)\cap(|Y_n|\leqslant1/M))$$
$$P(|X_nY_n|>\varepsilon)\leqslant P((|X_nY_n|>\varepsilon)\cap(|Y_n|>1/M))+P(|Y_n|\leqslant1/M)$$
$$\leqslant P(|X_n|>\varepsilon M)+P(|Y_n|\leqslant1/M)$$

3. Or pour tout M,
$$\lim_{n\to\infty}P(|Y_n|\leqslant1/M)=0\text{ et }\lim_{n\to\infty}P(|X_n|>\varepsilon M)=P(|X|>\varepsilon M),$$
cette dernière quantité étant aussi petite que l'on veut si M est grand.

On conclut alors comme dans la partie A.

Exercice 3.22.

On pose, pour tout x réel :
$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-x^2/2},\quad\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(t)\,dt,\quad\Psi(x)=1-\Phi(x)$$

1. Montrer que, pour tout $x>0$:

a) $\Psi(x)\leqslant\dfrac{\varphi(x)}{x}$.

b) $\dfrac{\Psi(x)}{\varphi(x)}=\mathrm{e}^{x^2/2}\displaystyle\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2/2}dt\leqslant\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

2. Résoudre l'équation différentielle $f'(x)-xf(x)=0$, d'inconnue $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

3. Soit h une fonction définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant : il existe une constante $C>0$ telle que pour tous x,y réels : $|h(x)-h(y)|\leqslant C|x-y|$ (on dit que h est lipschitzienne).
Soit Z une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

a) Montrer que $E(h(Z))$ existe.

b) Montrer que pour tout y réel : $|h(y)-E(h(Z))|\leqslant C\left(|y|+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)$

4. La fonction h étant donnée comme dans la question précédente, on cherche à résoudre l'équation différentielle, d'inconnue $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$:

$$\forall\, x\in\mathbb{R},\, f'(x)-xf(x)=E(h(Z))-h(x)\qquad(*)$$

On pose $f_h : x\mapsto \mathrm{e}^{x^2/2}\displaystyle\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2/2}(h(t)-E(h(Z)))dt$.

a) Montrer que f_h est bien définie sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que f_h vérifie l'équation $(*)$ et qu'elle est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

c) Montrer que $\sup\limits_{x\geq 0}|f_h(x)|\leqslant 2C$.

Solution

1. a) On a, pour $x>0$:

$$\begin{aligned}\Psi(x)&=\int_x^{+\infty}\varphi(t)dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^{+\infty}\frac{-t\mathrm{e}^{-t^2/2}}{-t}dt\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big[\frac{\mathrm{e}^{-t^2/2}}{-t}\Big]_x^{+\infty}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t^2/2}}{t^2}dt\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\mathrm{e}^{-x^2/2}}{x}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t^2/2}}{t^2}dt\leqslant\frac{\varphi(x)}{x}\end{aligned}$$

b) On étudie la fonction $g : x\to \mathrm{e}^{x^2/2}\displaystyle\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2/2}dt$. Sa dérivée g' vérifie, pour $x>0$:

$$g'(x)=x\Big(\frac{\Psi(x)}{\varphi(x)}-\frac{1}{x}\Big)\leqslant 0$$

ce qui entraîne la décroissance de g sur $\mathbb{R}^+$ et :

$$g(x)\leqslant g(0)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2/2}dx=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

2. C'est une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre dont les solutions sont de la forme $x\mapsto C.\mathrm{e}^{x^2/2}$.

3. a) Si h est lipchitzienne, on a $|h(x) - h(0)| \leqslant C|x| \implies |h(x)| \leqslant C|x| + |h(0)|$. Cela entraîne l'existence de $E(h(X))$, puisque X admet une espérance.

b) Utilisons le théorème de transfert :

$$\begin{aligned}|h(y) - E(h(Z))| &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big|\int_{-\infty}^{+\infty}(h(y) - h(t))\mathrm{e}^{-t^2/2}dt\Big| \\ &\leqslant C\int_{-\infty}^{+\infty}|y-t|\frac{\mathrm{e}^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dt \\ &\leqslant C\Big(|y| + \int_{-\infty}^{+\infty}|t|\frac{\mathrm{e}^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\Big) = C\big(|y| + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\big)\end{aligned}$$

4. a) La fonction f_h est bien définie par la question précédente et le fait que Z admette une espérance.

b) La fonction f_h est le produit de fonctions dérivables, et :

$$f_h'(x) = xf_h(x) - (h(x) - E(h(Z)))$$

La fonction f_h vérifie donc l'équation différentielle $(*)$.
De plus, par la question 3.

$$|f_h(x)| \leqslant \mathrm{e}^{x^2/2}\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2/2}C\big(|t| + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\big)dt$$

Or, par la question 1. b), $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\mathrm{e}^{x^2/2}\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2/2} \leqslant 1$,
et pour $x \geqslant 0$:

$$\mathrm{e}^{x^2/2}\int_x^{+\infty}|t|\mathrm{e}^{-t^2/2}dt = \mathrm{e}^{x^2/2}\int_x^{+\infty}t\mathrm{e}^{-t^2/2}dt \leqslant \mathrm{e}^{x^2/2}.\mathrm{e}^{-x^2/2} = 1$$

Donc f_h est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

c) Cette question est évidente, par les deux majorations obtenues ci-dessus.

5

QUESTIONS COURTES

Soit $n \geqslant 2$ un entier naturel, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Dire si les implications suivantes sont vraies ou fausses et justifier la réponse :

a) Si A est inversible, alors pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ il existe un unique $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $AX = Y$.

b) Si A est inversible, alors pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ il existe un $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $AX = Y$.

c) Si pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ il existe un unique $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $AX = Y$, alors A est inversible.

d) Si pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ il existe un $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $AX = Y$, alors A est inversible.

e) Si A est inversible, alors il existe un unique $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $AX = U$.

f) S'il existe un unique $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $AX = U$, alors A est inversible.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes la même loi géométrique de paramètre $p > 0$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

a) Justifier que la variable aléatoire $\frac{1}{S_n}$ admet une espérance, qu'on notera m.

b) Calculer l'espérance de $\frac{S_k}{S_n}$ en fonction de m.

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que ${}^tA \times A = {}^tB \times B$.

1. Montrer que A et B ont même rang.

2. On suppose B inversible. Montrer qu'il existe U telle que ${}^tU \times U = I_n$ et $A = U \times B$.

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. Soit f une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 telle que f et f' soient bornées.

Existence et calcul de $E(Xf(X) - f'(X))$.

On considère une suite infinie de lancers d'une pièce, la probabilité d'obtenir Pile étant égale à $0 < p < 1$ et celle d'obtenir Face égale à $1 - p$.
Soit X_n le résultat du n-ième lancer.

Les événement $A_n = [X_n \neq X_{n-1}]$ sont-ils indépendants ?

Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Soit (a, b) une famille orthonormée de E. Soit f l'application définie par

$$f : x \to \langle x, a\rangle b - \langle x, b\rangle a.$$

1. Montrer que $\mathrm{Im}(f) = (\mathrm{Ker}(f))^{\perp}$.

2. L'application f est-elle diagonalisable ?

Soit p un réel de $]0,1[$ et U une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant la loi uniforme sur $]0,1]$ et X la variable aléatoire définie par :

$$X = \left\lfloor \frac{\ln(U)}{\ln(1-p)} \right\rfloor + 1$$

où $\lfloor y \rfloor$ désigne la partie entière de y

Déterminer la loi de X.

Soient deux variables aléatoires discrètes X, Y à valeurs dans $\mathbb{R}$, indépendantes de même loi, et admettant une espérance $M \neq 0$ et une variance $V \neq 0$.
Calculer l'espérance et la variance de XY en fonction de M et V.
Les variables $X + Y$ et XY sont-elles indépendantes ?

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit A une matrice donnée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et soit $\phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ une application linéaire. On définit l'application $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ f(M) = M - \phi(M)A.$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\phi(A)$ pour que f soit bijective.