1

ANALYSE

Exercice 1.01.

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^n$ par

$$f(x_1,\dots,x_n)=\exp\big(n+1-\sum_{k=1}^{n}x_k\big)+\sum_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{x_k}$$

1. Montrer que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^n$.

2. Déterminer le gradient ∇f de f. En déduire que f admet un unique point critique noté $\widehat{x}$.

3. a) Calculer la hessienne $\nabla^2 f(\widehat{x})$ de f en ce point critique.
   b) Montrer que $\forall\, X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\setminus\{0\}, {}^tX\nabla^2 f(\widehat{x})X>0$.

4. a) En déduire f admet en $\widehat{x}$ un minimum local.
   b) Ce minimum est-il un minimum global sur $\mathbb{R}^n$?

Solution :

1. La fonction f est de classe C^2 comme somme et composée de fonctions de classe C^2.

2. Un calcul élémentaire donne pour tout $i\in[\![1,n]\!]$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,\dots,x_n)=-\exp\big(n+1-\sum_{k=1}^{n}x_k\big)+\mathrm{e}^{x_i}$$

donc :

$$\nabla f_x=\big(\mathrm{e}^{x_1}-\exp\big(n+1-\sum_{k=1}^{n}x_k\big),\dots,\mathrm{e}^{x_n}-\exp\big(n+1-\sum_{k=1}^{n}x_k\big)\big)$$

Un point critique x est déterminé par $\nabla f_x=0$, soit pour tout $i\in[\![1,n]\!]$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,\dots,x_n) = -\exp\big(n+1-\sum_{k=1}^{n} x_k\big) + \mathrm{e}^{x_i} = 0$$

Ainsi, $\mathrm{e}^{x_1} = \dots = \mathrm{e}^{x_n} = \exp\big(n+1-\sum_{k=1}^{n} x_k\big)$, donc $x_1 = \dots = x_n$ et $x_1 = n+1-nx_1$, donc $x_1 = \dots = x_n = 1$.

$$\widehat{x} = (1,\dots,1)$$

3. a) La matrice hessienne est égale à

$$\nabla^2 f_x = (a_{i,j}),\ \text{avec } a_{i,j} = \begin{cases} \mathrm{e}^{x_i} + \exp\big(n+1-\sum_{k=1}^{n} x_k\big) & \text{si } i=j \\ \exp\big(n+1-\sum_{k=1}^{n} x_k\big) & \text{si } i\neq j \end{cases}$$

et en $\widehat{x} = (1,\dots 1)$,

$$\nabla^2 f_{\widehat{x}} = \mathrm{e}\begin{pmatrix} 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Une matrice symétrique réelle est définie positive si et seulement si ses valeurs propres sont strictement positives. Ici la matrice $\nabla^2 f_{x_0}$ vaut $\mathrm{e}(I+J)$, où J est la matrice composée uniquement de 1. La matrice J est de rang 1 et la somme de chacune de ses lignes est égale à n. Ainsi ses valeurs propres sont 0 et n ; les valeurs propres de $I+J$ sont 1 et $n+1$ et les valeurs propres de $\mathrm{e}(I+J)$ sont e et $\mathrm{e}(n+1)$ qui sont strictement positives. D'où le résultat.

4. a) On sait alors qu'en le point critique $\widehat{x}$ f admet un minimum local. La valeur de ce minimum est $(n+1)\mathrm{e}$.

b) C'est un minimum global. En effet $\lim\limits_{||x||\to+\infty} f(x) = +\infty$, car $f(x) > \sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{x_k}$. Ainsi, il existe $A>0$ tel que si $||x|| \geqslant A$, $f(x) > (n+1)\mathrm{e}+1$. Sur le disque fermé et borné, centré en 0, de rayon A, la fonction f est continue et atteint son minimum. Celui-ci ne peut être atteint au bord car pour $||x|| \geqslant A$, $f(x) > (n+1)\mathrm{e}$. Il est donc atteint en un point de l'intérieur qui est un ouvert, donc au point critique déterminé précédemment.

Exercice 1.02.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $u_n(x) = \dfrac{1}{n+n^2x^2}$.

1. Discuter, selon les valeurs réelles de x, la convergence de la série de terme général $u_n(x)$.

Lorsque cette série converge, on note $f(x)$ sa somme, soit : $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

Dans la suite, on considère un réel $a > 0$.

2. a) Déterminer la limite de $f(x)$ quand $x \to +\infty$.

b) On admet que la fonction f est continue sur $[a, +\infty[$. Justifier la convergence de l'intégrale $J = \displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

3. a) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale $J_n = \displaystyle\int_a^{+\infty} u_n(x)\,dx$ converge et la calculer.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\big|J - \sum_{k=1}^{n} J_k\big| \leqslant \frac{1}{a}\,\big[\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}\big].$$

c) En déduire l'expression de J comme la somme d'une série.

4. a) Justifier que, pour tout entier $n \geqslant 2$, on a :

$$\int_n^{n+1} \frac{dt}{t + t^2x^2} \leqslant \frac{1}{n + n^2x^2} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t + t^2x^2}$$

b) Déterminer deux réels b et c (indépendants de t, mais pouvant dépendre de x) tels que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+^*,\ \frac{1}{t + t^2x^2} = \frac{b}{t} + \frac{c}{1 + tx^2}$$

c) En déduire un encadrement de $f(x)$, puis un équivalent de $f(x)$ quand $x \to 0^+$.

d) En déduire la nature de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$.

Solution :

1. On a $u_n(0) = 1/n$, qui est le terme général d'une série divergente ; pour $x \neq 0$, $u_n(x) \sim \dfrac{1}{n^2x^2}$, qui est le terme général d'une série convergente.

2. a) On a : $0 \leq f(x) \leq \dfrac{1}{x^2} \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$, donc $\lim\limits_{+\infty} f = 0$.

b) $f \in C^0([a, +\infty[)$ et $0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{\pi^2}{6x^2}$ d'intégrale convergente en $+\infty$, donc par la règle de Riemann J converge.

3. a) $u_n \in C^0([a, +\infty[)$ et $u_n(x) \sim \dfrac{1}{n^2x^2}$, donc J_n converge encore par application de la règle de Riemann.
Par le changement de variable affine $x \mapsto x\sqrt{n} = t$, on a :

$$J_n = \frac{1}{n}\int_a^{+\infty} \frac{dx}{1 + nx^2} = \frac{1}{n\sqrt{n}}\int_{a\sqrt{n}}^{+\infty} \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{1}{n\sqrt{n}}\Big[\arctan(t)\Big]_{a\sqrt{n}}^{+\infty}$$

$= \frac{1}{n\sqrt{n}}\big(\frac{\pi}{2} - \arctan(a\sqrt{n})$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\big|J - \sum_{k=1}^{n} J_k\big| = \int_a^{+\infty} \big[\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)\big]dx \leqslant \int_a^{+\infty} \big[\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2x^2}\big]dx$$
$$= \big[\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}\big]\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{a}\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

c) Comme $\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^2}$ converge, son reste tend vers 0, donc $\sum_{k\geqslant 1} J_k$ converge vers J, soit :

$$J = \sum_{n=1}^{+\infty} J_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \big[\frac{1}{n\sqrt{n}}\big(\frac{\pi}{2} - \arctan(a\sqrt{n})\big)\big]$$

4. a) L'encadrement demandé est une conséquence banale de la décroissance de $t \mapsto \frac{1}{t + t^2x^2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Par identification : $\frac{1}{t + t^2x^2} = \frac{1}{t} - \frac{x^2}{1 + tx^2}$.

c) La convergence de $\sum_{n\geq 1} u_n(x)$ garantit celle des intégrales, d'où en sommant pour $n \geqslant 2$:

$$\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t + t^2x^2} \leqslant f(x) - \frac{1}{1 + x^2} \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t + t^2x^2}$$

Soit :

$$\int_2^{+\infty} (\frac{1}{t} - \frac{x^2}{1 + tx^2})\,dt \leqslant f(x) - \frac{1}{1 + x^2} \leqslant \int_1^{+\infty} (\frac{1}{t} - \frac{x^2}{1 + tx^2})\,dt$$

ou encore :

$$\Big[-\ln\frac{1 + tx^2}{t}\Big]_2^{+\infty} \leqslant f(x) - \frac{1}{1 + x^2} \leqslant \Big[-\ln\frac{1 + tx^2}{t}\Big]_1^{+\infty}$$

C'est-à-dire :

$$\ln(\frac{1 + 2x^2}{2}) - \ln(x^2) \leqslant f(x) - \frac{1}{1 + x^2} \leqslant \ln(1 + x^2) - \ln(x^2)$$

En regardant les termes prépondérants, on obtient par encadrement d'équivalents : $f(x) \underset{0^+}{\sim} -2\ln x$.

d) La convergence de l'intégrale $\int_0^1 \ln(x)dx$ donne, par la règle d'équivalence pour les intégrales de fonctions de signe fixe, la convergence de l'intégrale définissant I.

Exercice 1.03.

Soit f la fonction définie par $f(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{t + \sin t}$

1. Déterminer le domaine de définition D_f de f.

2. Montrer que f est de classe C^1 sur D_f.

3. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

4. Montrer que l'on peut prolonger f par continuité en $x=0$.
On note $\widetilde{f}$ la fonction ainsi prolongée.

5. Montrer que $\widetilde{f}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer $\widetilde{f}'(0)$.

6. La fonction $\widetilde{f}$ est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}$?

Solution :

1. On étudie $\varphi : t \to t+\sin t$. On a $\varphi'(t) = 1+\cos t \geqslant 0$, nul seulement en des points isolés, et $\lim\limits_{-\infty}\varphi = -\infty$, $\lim\limits_{+\infty}\varphi = +\infty$, ce qui montre que φ est une bijection croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ s'annulant en 0, donc seulement en 0.
Ainsi pour tout $x \neq 0$, $\dfrac{1}{t+\sin t}$ est continue sur $[x, 2x]$ et $D_f = \mathbb{R}^*$.

2.Notons F une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{t+\sin t}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$. Par le théorème fondamental du calcul intégral, comme $f(x) = F(2x) - F(x)$, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ et :

$$f'(x) = \frac{2}{2x+\sin(2x)} - \frac{1}{x+\sin(x)}$$

3. Pour tout $t > 1$, $\dfrac{1}{t+1} \leqslant \dfrac{1}{t+\sin t} \leqslant \dfrac{1}{t-1}$. Ainsi :

$$x > 1 \implies \int_x^{2x} \frac{dt}{t+1} \leqslant f(x) \leqslant \int_x^{2x} \frac{dt}{t-1}, \text{ d'où :}$$

$$x > 1 \implies \ln\frac{2x+1}{x+1} \leqslant f(x) \leqslant \ln\frac{2x-1}{x-1}$$

En faisant tendre x vers $+\infty$, il vient $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ln 2$.

La fonction φ est impaire, le changement de variable $t = -u$ donne donc :

$$f(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{dt}{t+\sin t} = \int_x^{2x} \frac{du}{u+\sin u} = f(x)$$

Donc f est paire et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ln 2$.

4. On écrit : $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{t+\sin t} - \int_x^{2x} \frac{dt}{2t} = \int_x^{2x} \frac{t-\sin t}{t(t+\sin t)}dt$.
Or un développement limité au voisinage de 0 et à l'ordre 3 donne : $\dfrac{t-\sin t}{t(t+\sin t)} \sim \dfrac{t}{12}$, qui tend vers 0. Ainsi la fonction $t \mapsto \dfrac{t-\sin t}{t(t+\sin t)}$ admet

un prolongement par continuité en 0 et est donc continue sur $[-2,2]$ et ainsi majorée par une constante C.
Il vient donc pour $|x| \leq 1$:

$$\Big|\int_x^{2x} \frac{dt}{t+\sin t} - \int_x^{2x} \frac{dt}{2t}\Big| \leqslant C|x|$$

ce qui montre que $\big|f(x) - \frac{\ln 2}{2}\big| \leqslant C|x|$. Ainsi $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \frac{\ln 2}{2}$.

5. Le calcul de f' a été fait précédemment. Après réduction, il vient :

$$f'(x) = \frac{2\sin x(1-\cos x)}{(2x+\sin(2x))(x+\sin(x))}$$

Effectuant un développement limité au voisinage de 0, il vient $f'(x) \underset{(0)}{\sim} \frac{x}{8}$.

Ainsi la fonction $\widetilde{f}$ est-elle dérivable en 0 (théorème des fonctions de classe C^1) et $\widetilde{f}'(0) = 0$.

6. On a déjà vu que la fonction $\widetilde{f}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, car elle l'est en 0 et l'est banalement ailleurs.

Exercice 1.04.

1. Soit $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ une série à termes réels strictement positifs, telle que :

$$\lim_{n\to+\infty} \big(\frac{u_{n+1}}{u_n}\big) = 0$$

a) Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \implies u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}\, u_n$.

b) En déduire que la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge.

Soit un réel $q \in\,]-1,1[$. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$f_n(x) = (1-qx)(1-q^2x)\cdots(1-q^nx) = \prod_{k=1}^{n} \big(1-q^kx\big)$$

2. a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite $\big(f_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. On note $f(x)$ sa limite.

b) Vérifier que $\forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) = (1-qx)f(qx) \quad (1)$.

3. On suppose que f admet un développement limité à tout ordre N en 0, noté :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n\, x^n + o\big(x^N\big) \qquad N \in \mathbb{N}.$$

a) Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{q^n}{q^n-1}\, a_{n-1}$ et en déduire l'expression de a_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Justifier que la série de terme général $a_n\,x^n$ converge pour tout x réel. On note $g(x)$ sa somme.

c) On admet que g est continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que $g = f$.

Solution :

1. a) Le résultat demandé n'est autre que la définition quantifiée de la limite avec $\varepsilon = 1/2$, et $u_n > 0$.

b) Par récurrence, $n \geq n_0 \implies 0 \leqslant u_n \leqslant \big(\frac{1}{2}\big)^{n-n_0}\, u_{n_0}$, d'où la convergence par comparaison à une série géométrique convergente.

2. a) • S'il existe n_0 , $x = 1/q^{n_0}$, alors $\forall\, n \geq n_0$, $f_n(x) = 0$ et la suite $(f_n(x))$ est constante à partir d'un certain rang, donc convergente ;

• sinon, $\forall\, n, f_n(x) \neq 0$ et $\ln|f_n(x)| = \sum_{k=1}^{n} \ln|1 - q^k x|$ converge absolument car à partir d'un certain rang $|q^k x| < 1$ puis $\lim_{k\to\infty} q^k x = 0$ et $|\ln|1-q^k x|| \underset{(\infty)}{\sim} |q^k x| \geqslant 0$, qui est le terme général d'une série géométrique convergente.
D'autre part $\lim_{n\to\infty}(1 - q^n x) = 1$ implique que $f_n(x)$ est de signe constant à partir d'un certain rang, donc $\big(f_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la relation s'obtient par passage à la limite dans la relation

$$f_n(x) = (1 - qx) \prod_{k=2}^{n} (1 - q^{k-1}qx) = (1 - qx)\, f_{n-1}(qx)$$

3. a) Par substitution dans la relation précédente et identification par unicité du développement limité, on a : $\sum_{n=0}^{N} a_n x^n + o(x^N) = (1 - qx)\big[\sum_{n=0}^{N} a_n (qx)^n + o(x^N)\big]$, donc :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, a_n = a_n q^n - a_{n-1} q^n \text{ et } a_0 = f(0) = 1$$

d'où par récurrence $a_n = \dfrac{q^n}{q^n - 1}\, a_{n-1} = \dfrac{q^{n\,(n+1)/2}}{\prod_{k=1}^{n}(q^k - 1)}$.

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\dfrac{|a_{n+1}\, x^{n+1}|}{|a_n\, x^n|} = \Big|\dfrac{q^{n+1}\, x}{q^{n+1} - 1}\Big| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui assure la convergence absolue de la série.

4. g vérifie la relation (1) (cf. 3.a) et $g(0) = f(0) = 1$, d'où, par récurrence et continuité de g en 0, on écrit pour tout n :

$$g(x) = \Big[\prod_{k=1}^{n}(1-q^k x)\Big]\, g(q^n x) = f_n(x)\, g(q^n x)$$

puis on fait tendre n vers l'infini et à la limite :

$$g(x) = f(x)\, g(0) = f(x)$$

Exercice 1.05.

Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, avec $n > p$, et posons $q = n - p$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on considère l'équation d'inconnue réelle y :

$$(E) : y^n + xy^p - 1 = 0.$$

1. Démontrer que $\forall\, x \in \mathbb{R}$, l'équation (E) admet une racine unique y_x dans $\mathbb{R}_+^*$.

2. Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$ définie par : $x \longmapsto f(x) = y_x$ où y_x est défini dans la première question.
Montrer que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner l'expression de $f'(x)$ en fonction de x et $f(x)$.

3. Calculer le développement limité à l'ordre 2 de f en 0.

4. Montrer que f admet une limite, que l'on calculera, lorsque x tend vers $+\infty$.

5. Démontrer que $f(x) \sim x^{-\frac{1}{p}}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Solution :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, posons $\Psi_x(y) = y^n + xy^p - 1$, fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
On a $\Psi_x'(y) = ny^{n-1} + pxy^{p-1} = y^{p-1}(ny^q + px)$.
$\rightarrow$ Si x est positif ou nul, Ψ_x croît.
$\rightarrow$ Si x est strictement négatif Ψ_x commence par décroître avant de croître.
Comme $\lim\limits_{0} \Psi_x(y) = -1$ et que $\lim\limits_{+\infty} \Psi_x(y) = +\infty$, on en déduit que Ψ_x ne prend qu'une fois la valeur 0 sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. L'équation (E) montre que pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$ on a $x = \dfrac{1-y^n}{y^p} = \Phi(y)$.
On a Φ qui est C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\Phi'(y) = \dfrac{-ny^n - (1-y^n)p}{y^{p+1}} = \dfrac{-ny^q - px}{y}$.
On a $\Phi' < 0$ et Φ est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ et définit une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$. Elle admet une fonction réciproque qui n'est autre que la fonction f qui est aussi C^∞. On a :

$$f'(x) = -\frac{y}{ny^q + px} = -\frac{f(x)}{nf(x)^q + px}$$

3. On a, $f(x) = a + bx + cx^2 + o(x^2)$.
On obtient immédiatement $a = f(0) = 1, b = f'(0) = -\frac{1}{n}$, puis on utilise :

$$(1 - \frac{1}{n}x + cx^2 + o(x^2))^n + x(1 - \frac{1}{n}x + cx^2 + o(x^2))^p - 1 = 0.$$

Ce qui conduit à : $ncx^2 + \frac{n-1}{2n}x^2 - \frac{p}{n}x^2 = 0$ puis

$$c = -\frac{n-1-2p}{2n^2} = -\frac{q-p-1}{2n^2}$$

4. L'examen de la fonction Φ montre que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

5. On a donc, $xy^p \underset{+\infty}{\sim} 1$, d'où $f(x) \underset{+\infty}{\sim} x^{-\frac{1}{p}}$.

Exercice 1.06.

1. Montrer que pour tout $x > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{1 + x\,\mathrm{e}^t}\,dt$ converge.

On note f l'application définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : pour tout $x > 0$,

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{1 + x\,\mathrm{e}^t}\,dt$$

2. Montrer que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.

3. a) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, puis un équivalent de $f(x)$ pour x au voisinage de $+\infty$.

b) Déterminer $\lim\limits_{x\to0} f(x)$.

4. a) En utilisant le changement de variable $u = x.\mathrm{e}^t$ que l'on justifiera, montrer que :

$$f(x) = \ln x(\ln x - \ln(1 + x)) + \int_x^{+\infty} \frac{\ln u}{u(1 + u)}\,du$$

b) En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $f'(x)$. Retrouver ainsi le sens de variations de f.

Solution :

1. Soit $x > 0$. La fonction $\varphi : t \mapsto \dfrac{t}{1 + x\mathrm{e}^t}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et positive.
Au voisinage de $+\infty$, $\varphi(t) \sim \dfrac{t}{x}\,\mathrm{e}^{-t}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} t.\mathrm{e}^{-t}dt$ converge. Ainsi f est-elle bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Si $0 < x < y$, alors, pour $t \geqslant 0$, $\dfrac{t}{1 + x\mathrm{e}^t} \geqslant \dfrac{t}{1 + y\mathrm{e}^t}$ ce qui entraîne la décroissance de f.

3. a) Comme $1 + x\mathrm{e}^t \geqslant x\mathrm{e}^t$, il vient : $0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t}dt = \frac{1}{x}$ (calcul simple ou référence probabiliste) ce qui montre que :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

Montrons que $\frac{1}{x}$ est équivalent à $f(x)$ au voisinage de $+\infty$. En effet :

$$\left|f(x) - \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t}dt\right| = \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+x\mathrm{e}^t)(x\mathrm{e}^t)}dt \leqslant \frac{1}{x^2}\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-2t}dt = \frac{C}{x^2}$$

Donc $f(x) - \frac{1}{x} = o\big(\frac{1}{x}\big)$ et $f(x) \underset{+\infty)}{\sim} \frac{1}{x}$

b) Soit $A > 0$. On peut écrire :

$$f(x) \geqslant \int_0^A \frac{t}{1+x\mathrm{e}^t}dt \geqslant \frac{1}{1+x\mathrm{e}^A}\int_0^A tdt = \frac{A^2}{2(1+x\mathrm{e}^A)}$$

Or $\lim\limits_{x\to 0} \frac{A^2}{2(1+x\mathrm{e}^A)} = \frac{A^2}{2}$, et comme ceci est vérifié pour tout A, il s'ensuit que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$$

4. a) Le changement de variable proposé est de classe C^1 et bijectif. Il vient

$$f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\ln(u/x)}{u(1+u)}du = \int_x^{+\infty} \frac{\ln(u)}{u(1+u)}du - \ln(x)\int_x^{+\infty} \frac{1}{u(1+u)}du$$

Or, pour $A > 0$:

$$\int_x^A \frac{1}{u(1+u)}du = \int_x^A \frac{du}{u} - \int_0^A \frac{du}{1+u} = -\ln(x) + \ln(1+x) - \ln\big(1+\frac{1}{A}\big)$$

et, en prenant la limite lorsque A tend vers $+\infty$:

$$\int_x^{+\infty} \frac{1}{u(1+u)}du = \ln(1+x) - \ln(x)$$

Finalement $f(x) = \ln x(\ln x - \ln(1+x)) + \int_x^{+\infty} \frac{\ln u}{u(1+u)}du$.

b) La fonction $x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{\ln u}{u(1+u)}du$ est dérivable (intégrale fonction de sa borne inférieure), et :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x}(\ln x - \ln(1+x)) + \ln x\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1+x}\right) - \frac{\ln x}{x(1+x)} \\ &= \frac{1}{x}(\ln x - \ln(1+x)) < 0. \end{aligned}$$

On retrouve bien la décroissance de f.

Exercice 1.07.

Dans tout l'exercice, E désigne l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et $2\pi-$périodiques, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions f vérifiant :

$$f \in C^0(\mathbb{R}) \text{ et } \forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x+2\pi) = f(x)$$

Pour toute fonction f de E, on pose : $c(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\,dt$.

1. a) Montrer que toute fonction de E est bornée.

b) En déduire que, pour toute fonction f de E et tout réel α strictement plus grand que 1, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t^\alpha}\,dt$ est convergente.

2. a) Montrer, pour toute fonction f de E, l'égalité suivante :

$$\int_x^{x+2\pi} f(t)\,dt = \int_0^{2\pi} f(t)\,dt$$

b) En déduire que pour toute fonction f de E, les primitives de f sont $2\pi-$périodiques si et seulement si $c(f) = 0$.

3. On considère une fonction f appartenant à E et on note g la fonction définie par :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, g(t) = f(t) - c(f).$$

a) Montrer que g appartient à E et que $c(g) = 0$.

b) Montrer que l'intégrale : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{g(t)}{t}\,dt$ est convergente.

c) On suppose dans cette question que $c(f) \neq 0$. Déterminer un équivalent simple de $\displaystyle\int_1^{x} \frac{f(t)}{t}\,dt$ quand x est au voisinage de $+\infty$.

4. On considère dans cette question la fonction f définie, pour tout réel t, par : $f(t) = |\sin(t)|$.

a) Vérifier que f est un élément de E.

b) En déduire que : $\displaystyle\int_1^{x} \frac{|\sin(t)|}{t}\,dt \underset{(x\to+\infty)}{\sim} \frac{2}{\pi}\ln(x)$.

c) Quelle est la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t}\,dt$?

d) Quelle est la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$?

Solution :

1. a) Soit f une fonction de E. Comme f est continue, elle est bornée sur l'intervalle fermé borné $[0, 2\pi]$, il existe donc un réel M positif, tel que :

$$\forall\, y \in [0, 2\pi],\ |f(y)| \leq M$$

Soit x un réel donné. Il existe alors un entier relatif k tel que $x + 2k\pi$ appartienne à $[0, 2\pi]$. Comme f est $2\pi-$périodique, $f(x) = f(x + 2k\pi)$ et, $x + 2k\pi$ étant dans $[0, 2\pi]$, on a bien $f(x) \leq M$.

b) D'après ce qui précède, on a : $\left|\frac{f(t)}{t^\alpha}\right| \leq \frac{M}{t^\alpha}$. La fonction $t \mapsto \frac{M}{t^\alpha}$ est, à un scalaire près, une fonction de Riemann et pour $\alpha > 1$ son intégrale en $+\infty$ est convergente. Le critère de comparaison des intégrales de fonctions positives permet de conclure à la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{f(t)}{t^\alpha}\right| dt$.

Enfin, comme la convergence absolue entraîne la convergence, on peut bien conclure à la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t^\alpha} dt$.

2. a) On écrit : $\displaystyle\int_x^{x+2\pi} f(t)\, dt = \int_x^0 \ldots + \int_0^{2\pi} \ldots + \int_{2\pi}^{x+2\pi} \ldots$.

Dans la dernière intégrale, on effectue le changement de variable $t = u + 2\pi$ et par périodicité de f la première et la dernière intégrale se détruisent. On obtient ainsi le résultat escompté.

b) Soit F une primitive d'une fonction f de E. On a alors, pour tout réel x, $F(x + 2\pi) - F(x) = \displaystyle\int_x^{x+2\pi} f(t)dt = \int_0^{2\pi} f(t)dt = 2\pi c(f)$.

On en déduit : F est $2\pi-$périodique si, et seulement si, $\forall\, x, F(x+2\pi)-F(x) = 0$, soit si et seulement si $c(f) = 0$.

3. a) La fonction g est continue comme somme de fonctions continues.

Ensuite, $g(x + 2\pi) = f(x + 2\pi) - c(f) = f(x) - c(f) = g(x)$.

Enfin, $\frac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} g(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} c(f)dt = c(f) - c(f) = 0$.

On a donc $c(g) = 0$.

b) Soit A un réel plus grand que 1 et considérons : $\displaystyle\int_1^A \frac{g(t)}{t} dt$.

Notons G une primitive de g. On a alors, en intégrant par parties :

$$\int_1^A \frac{g(t)}{t} dt = \left[\frac{G(t)}{t}\right]_1^A + \int_1^A \frac{G(t)}{t^2} dt$$

$\star$ Comme g appartient à E et que $c(g) = 0$, la primitive G de g est $2\pi-$périodique (question 2.b)) et évidemment continue. G est donc dans E. On en déduit qu'elle est bornée. Alors, comme G est bornée : $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \frac{G(t)}{t} = 0$.

$\star$ L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{G(t)}{t^2}dt$ converge.

Conclusion, le second membre de l'égalité possède une limite finie en $+\infty$ et l'intégrale est convergente.

c) On a : $\displaystyle\int_1^x \frac{f(t)}{t}dt = \int_1^x \frac{f(t)-c(f)}{t}dt + \int_1^x \frac{c(f)}{t}dt.$

Soit $\displaystyle\int_1^x \frac{f(t)}{t}dt = \int_1^x \frac{g(t)}{t}dt + c(f)\ln(x).$

Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_1^x \frac{g(t)}{t}dt = L$ et que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} c(f)\ln(x) = \pm\infty$, $(c(f)\neq 0)$ on en déduit :

$$\int_1^x \frac{f(t)}{t}dt \underset{(+\infty)}{\sim} c(f)\ln(x)$$

4. a) f est évidemment continue et $2\pi-$périodique, $c(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} |\sin(t)|dt = \frac{2}{\pi}$.

b) En utilisant le résultat obtenu à la fin de la question 3, on a bien le résultat demandé.

c) L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t}dt$ diverge, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t}dt$ diverge.

d) Une intégration par parties de renforcement de convergence prouve la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt$, donc aussi celle de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt$.

Exercice 1.08.

Pour toutes fonctions f, g continues sur $\mathbb{R}$ telles que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)g(x-t)|\,dt$ converge, on pose $(f\star g)(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\,dt.$

1. On suppose dans cette question que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt$ converge et que g est bornée sur $\mathbb{R}$. Montrer que $f\star g$ est définie et bornée sur $\mathbb{R}$.

2. On suppose dans cette question que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2\,dt$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2\,dt$ convergent. Montrer que $f\star g$ est définie et bornée sur $\mathbb{R}$.

3. Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $\lambda_n = \displaystyle\int_{-1}^{1} (1-t^2)^n \, dt$ et

$$h_n(t) = \begin{cases} \dfrac{(1-t^2)^n}{\lambda_n} & \text{si } t \in [-1,1] \\ 0 & \text{si } t \notin [-1,1] \end{cases}$$

a) Montrer, à l'aide du changement de variable $t = \cos\theta$, que

$\lambda_n = 2\displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^{2n+1} \, d\theta$.

On admet que $\lambda_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{n}}$ *lorsque* n *tend vers* $+\infty$.

b) Montrer que h_n est une densité de probabilité.

c) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} h_n(t)\, dt = \lim_{n\to+\infty} \int_{\varepsilon}^{+\infty} h_n(t)\, dt = 0$$

d) Déterminer pour tout réel x, $\lim\limits_{n\to+\infty} (f \star h_n)(x)$ pour f continue et bornée sur $\mathbb{R}$.

Solution :

1. Pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, $|f(t)g(x-t)| \leqslant K|f(t)|$. Comme $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(t)|dt$ converge, les théorèmes de comparaison des intégrales de fonctions continues positives permettent de conclure à l'existence de $(f \star g)(x)$ pour tout réel x et au fait que $(f \star g)(x) \leqslant \displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(t)|dt$.

2. Pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, $|f(t)g(x-t)| \leqslant \dfrac{1}{2}\left(|f(t)|^2 + |g(x-t)|^2\right)$. Or $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt$ converge ainsi que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |g(x-t)|^2 dt$ par un changement de variable évident.
Les théorèmes de comparaison des intégrales de fonctions continues positives permettent de conclure comme dans la question précédente.

3. Le changement de variable $t = \cos\theta$ de classe C^1 donne

$$\int_{-1}^{1} (1-t^2)^n dt = \int_0^{\pi} (\sin\theta)^{2n+1} d\theta = 2\int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^{2n+1} d\theta$$

Montrons le résultat admis dans l'énoncé :
Posons $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^n d\theta$. Alors, une intégration par parties donne

$$W_n = \left[-(\sin\theta)^{n-1}\cos\theta \right]_0^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^{n-2}\cos^2\theta d\theta$$

soit ; $W_n = \dfrac{n-1}{n} W_{n-2}$.

La suite (W_n) est décroissante (car sur $[0, \pi/2]$, $0 \leqslant \sin\theta \leqslant 1$) et la relation précédente donne $nW_nW_{n-1} = (n-1)W_{n-1}W_{n-2}$, donc :

$$nW_nW_{n-1} = W_1W_0 = \frac{\pi}{2}$$

Finalement $W_n \leqslant W_{n-1} \leqslant W_{n-2} = \dfrac{n}{n-1} W_n$. Ceci entraîne que $\dfrac{W_{n-1}}{W_n}$ tend vers 1, donc $W_n \sim W_{n-1}$ et $nW_nW_{n-1} = \pi/2$ entraîne que $W_n^2 \sim \dfrac{\pi}{2n}$ et $W_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$ Ainsi $\lambda \sim 2\sqrt{\dfrac{\pi}{2(2n+1)}} \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{n}}$.

b) La fonction h_n est continue et positive sur $\mathbb{R}$ et son intégrale est égale à 1 de par sa définition.

c) On a $\displaystyle\int_\varepsilon^{+\infty} h_n(t)dt = \frac{1}{\lambda_n}\int_\varepsilon^1 (1-t^2)^n \leqslant \frac{(1-\varepsilon^2)^n}{\lambda_n} \leqslant \frac{1}{\lambda_n}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_\varepsilon^{+\infty} h_n(t)dt = 0$. Même démonstration pour $\displaystyle\int_{-\infty}^{-\varepsilon} h_n(t)dt$.

d) La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et bornée par K. Soit $\varepsilon > 0$.
Il existe $\delta > 0$ tel que $|t| < \delta$ entraîne $|f(x-t) - f(x)| < \varepsilon/3$. On peut alors écrire :

$$\begin{aligned}
|(f \star h_n)(x) - f(x)| &= \Big|\int_{\mathbb{R}} f(x-t)h_n(t)dt - \int_{\mathbb{R}} f(x)h_n(t)dt\Big| \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}} |f(x-t) - f(x)|h_n(t)dt \\
&\leqslant \int_{-\infty}^{-\delta} \ldots + \int_{-\delta}^{+\delta} \ldots + \int_{\delta}^{+\infty} \ldots = I_1 + I_2 + I_3
\end{aligned}$$

$\to$ Or, par la continuité de f en x et la positivité de h_n, $I_2 \leqslant \dfrac{\varepsilon}{3}\displaystyle\int_{\mathbb{R}} h_n(t)dt = \frac{\varepsilon}{3}$.

$\to$ comme $|f| \leqslant K$: $I_1 \leqslant 2K\displaystyle\int_{-\infty}^{-\delta} h_n(t)dt$ et $I_3 \leqslant 2K\displaystyle\int_{-\delta}^{+\infty} h_n(t)dt$

Par la question c, il existe N tel que si $n \geqslant N$, $I_1 \leqslant \dfrac{\varepsilon}{3}, I_3 \leqslant \dfrac{\varepsilon}{3}$.

Finalement, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N tel que pour $n \geqslant N, |(f \star h_n)(x) - f(x)| < \varepsilon$.
Donc $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} (f \star h_n)(x) = f(x)$.

Exercice 1.09.

Pour tout entier naturel n, on note $\mathbb{C}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à n. On définit par récurrence la suite de polynômes $(T_n)_n$ par :

$$T_0 = 1,\ T_1 = X,\ T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X), \forall\, n \geqslant 0.$$

Dans cet exercice, on identifiera polynôme et fonction polynomiale associée.

On rappelle que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\cos a + \cos b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$.

1. Expliciter T_2, T_3 et T_4.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos t) = \cos(nt)$.

b) Montrer que $T_n(X) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} X^{n-2k}(X^2-1)^k$.

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, T_n possède exactement n racines distinctes.

Dans toute la suite, n désigne un entier naturel non nul. On note $x_1, \ldots, x_n$ les racines de T_n.

Pour $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, continue sur $[0,1]$, on note $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [-1,1]} |f(x)|$.

4. Calculer $\|T_n\|_\infty$.

5. On pose $S_n = \frac{1}{2^{n-1}} T_n$ et $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des polynômes unitaires de degré n qui possèdent n racines distinctes sur $[-1, 1]$. On souhaite montrer que

$$\forall\, P \in \mathcal{P}_n, \|S_n\|_\infty \leqslant \|P\|_\infty.$$

a) Calculer $\|S_n\|_\infty$.

b) Montrer le résultat annoncé en raisonnant par l'absurde.

Solution :

1. D'après les définitions :
$T_2 = 2XT_1 - T_0 = 2X^2 - 1, T_3 = 2XT_2 - T_1 = 4X^3 - 3X,$
$T_4 = 2XT_3 - T_2 = 8X^4 - 8X^2 + 1$

2. a) On montre cette propriété par récurrence sur n.

• Pour $n = 0$ et $n = 1$, on a bien $T_0(\cos t) = 1 = \cos(0.t)$ et $T_1(\cos t) = \cos t$.

• Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $T_n(\cos t) = \cos(nt)$ et $T_{n+1}(\cos t) = \cos((n+1)t)$. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} T_{n+2}(\cos t) &= 2\cos(t) T_{n+1}(\cos t) - T_n(\cos t) = 2\cos(t)\cos((n+1)t) - \cos(nt) \\ &= \cos((n+2)t) + \cos(nt) - \cos(nt) = \cos((n+2)t). \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos t) = \cos(nt)$.

b) Soit $x \in [-1, 1]$. On note $x = \cos t$. Alors :

$T_n(x) = T_n(\cos t) = \cos(nt) = \text{Ré}(\mathrm{e}^{int}) = \text{Ré}[(\mathrm{e}^{it})^n]$

$$= \text{Ré} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} i^k \sin^k t \cos^{n-k} t = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} i^{2k} \sin^{2k} t \cos^{n-2k} t$$
$$= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} (-1)^k (1-\cos^2 t)^k \cos^{n-2k} t = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} (-1)^k (1-x^2)^k x^{n-2k}$$
$$= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} (x^2-1)^k x^{n-2k}$$

Ainsi, les polynômes T_n et $\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} (X^2-1)^k X^{n-2k}$ coïncident sur $[-1,1]$. Ces polynômes sont égaux

3. Comme T_n est un polynôme de degré n, il possède au plus n racines distinctes.
Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, notons $x_k = \cos \dfrac{(2k+1)\pi}{2n}$. Alors, $x_k \in [-1,1]$, les nombres x_k sont tous distincts car la fonction cosinus est injective sur $[0,\pi]$ et $T_n(x_k) = \cos(n\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}) = \cos \dfrac{(2k+1)\pi}{2} = 0$.
Nous avons donc identifié tous les zéros du polynôme T_n et T_n possède exactement n racines distinctes toutes dans $[-1,1]$.

4. Pour tout $x \in [-1,1]$, il existe $t \in [0,\pi]$ tel que $x = \cos t$. Alors, $T_n(x) = \cos(nt)$. Ainsi, $\|T_n\|_\infty \leqslant 1$. De plus, $T_n(0) = 1$. Donc $\|T_n\|_\infty = 1$.

5. a) On remarque que S_n est un polynôme unitaire de degré n et que, d'après la question précédente : $\|S_n\|_\infty = \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

b) Soit $P \in \mathcal{P}_n$ tel que $\|P\|_\infty < \|S_n\|_\infty$. On pose $D = S_n - P$.

Comme P et S_n sont dans $\mathcal{P}_n$, ils sont tous deux unitaires et le degré de D est strictement inférieur à n.
De plus, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $D(\cos \dfrac{k\pi}{n}) = P(\cos \dfrac{k\pi}{n}) - \dfrac{(-1)^k}{2^{n-1}}$. Ainsi, D change $n+1$ fois de signe sur $[-1,1]$. D'après le théorème de Rolle, D s'annule donc au moins en n points distincts. Ainsi, $D = 0$ et on obtient une contradiction. Finalement,

$$\forall\, P \in \mathcal{P}_n, \|S_n\|_\infty \leqslant \|P\|_\infty.$$

Exercice 1.10.

Soit f l'application définie par :

$$f : (x,y) \mapsto \frac{1}{1-y^2} \ln\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$$

1. Quel est l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f ?

2. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathcal{D}$.

3. Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$:

$$2yf(x,y) + (1-x^2)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - (1-y^2)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$$

4. Montrer que pour tout $x \geqslant 0$ et pour tout y tel que $0 < y < 1$:

$$\left|\ln\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)\right| \leqslant |\ln y|$$

En déduire que pour tout $x \geq 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x,y)\,dy$ est convergente.

Solution :

1. Pour définir $f(x, y)$, il faut avoir $y \neq 1$, $y \neq -1$ et $\dfrac{x+y}{1+xy} > 0$, donc $x + y$ et $1 + xy$ de même signe et non nuls.

2. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$, car composée, produit, quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, les fonctions apparaissant en dénominateur ne s'annulant pas et la fonction placée dans le logarithme étant strictement positive.

3. On a : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{1}{(x+y)(1+xy)}$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^2-1}{(x+y)(1+xy)(y^2-1)} + \frac{2y}{(y^2-1)^2}\ln\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$$

On vérifie alors facilement la formule demandée.

4. Fixons y dans $]0,1[$ et étudions la fonction $h : x \mapsto \ln\left(\dfrac{x+y}{1+xy}\right)$.

La fonction h est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$, avec $h'(x) = \dfrac{1-y^2}{(x+y)(1+xy)} > 0$.

Par conséquent h est strictement croissante.

De plus $h(0) = \ln y$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = -\ln y$. Donc $|h(x)| \leqslant |\ln y|$, ce qui est le résultat demandé.

Pour x fixé, la fonction, de la variable y, à intégrer est continue sur $]0,1[$.

Au voisinage de $y = 0$, $|f(x,y)| \leqslant |\ln y| = -\ln y$, et la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1/2} \ln y\,dy$ donne la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1/2} f(x,y)\,dy$.

Au voisinage de $y = 1$, $|f(x,y)| \leqslant \dfrac{1}{1+y}\cdot\dfrac{-\ln y}{1-y}$ et la fonction majorante se prolonge par continuité en 1, donc est intégrable sur $[1/2, 1]$.

La convergence de $\displaystyle\int_{1/2}^1 f(x,y)\,dy$ en résulte.

Par disjonction des problèmes, on en déduit que $\displaystyle\int_0^1 f(x,y)\,dy$ est convergente.

Exercice 1.11.

Soit un réel x et un entier naturel $n > 0$; on note :

$$S_n(x) = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(-x)^p}{p+1}$$

1. Montrer que les relations $u_n = S_{2n}(1)$ et $v_n = S_{2n+1}(1)$ pour $n \in \mathbb{N}$ définissent deux suites réelles adjacentes. En déduire la convergence de la suite $(S_n(1))_{n\in\mathbb{N}}$ vers un réel ℓ.

Les questions suivantes sont indépendantes ; elles permettent toutes le calcul de ℓ.

2. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \ln(1+x)$. Pour $x \in [0,1]$ et $k \in \mathbb{N}^*$, exprimer $f^{(k)}(x)$ puis déterminer $\sup\limits_{x\in[0,1]} |f^{(k)}(x)|$.
En déduire la valeur de ℓ par application de l'inégalité de Taylor-Lagrange à f sur $[0,1]$.

3. Établir que, pour tout réel $x \geqslant 0$ et pour tout entier $n > 0$:

$$S_{2n}(x) \leqslant f(x) \leqslant S_{2n+1}(x)$$

et en déduire la valeur de ℓ.

4. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 0$: $S_{2n}(1) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$
En déduire la valeur de ℓ en faisant apparaître une somme de Riemann.

5. Montrer que pour tout entier $n > 0$:

$$S_n(1) = \int_0^1 \frac{1-(-t)^n}{1+t}dt$$

et en déduire la valeur de ℓ.

Solution :

1. On a : $v_n - u_n = S_{2n+1}(1) - S_{2n}(1) = \dfrac{1}{2n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$,
D'autre part : $u_{n+1} - u_n = S_{2n+2}(1) - S_{2n}(1) = \dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{2n+2} \geqslant 0$
et $v_{n+1} - v_n = S_{2n+3}(1) + S_{2n+1}(1) = -\dfrac{1}{2n+1} + \dfrac{1}{2n+3} \leqslant 0$
Les deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes ; elles convergent vers un même réel ℓ. Les deux suites extraites $S_{2n}(1)$ et $S_{2n+1}(1)$ convergent vers la même limite ℓ. Par exhaustion la suite $(S_n(1))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

2. Pour $x \in [0,1]$ et $k \in \mathbb{N}^*$, $f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$.

On montre facilement par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$, $f^{(k)}(x) = \dfrac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$,

d'où $\sup\{|f^{(k)}(x)|, x \in [0,1]\} = (k-1)!$.

La fonction f est de classe C^∞ sur $[0,1]$; on applique l'inégalité de Taylor-Lagrange à f à l'ordre n :

$$|f(1) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}| \leqslant \frac{1}{(n+1)!} \sup\{|f^{(n+1)}(x)|, x \in [0,1]\} = \frac{1}{(n+1)!} n!$$

$$\leqslant \frac{1}{n+1}$$

soit $|\ln(2) - S_n(1)| \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(1) = \ln(2)$

3. Soit un réel $x \geqslant 0$ et un entier $n > 0$:

Soit la fonction : $f_1(x) = \ln(1+x) - S_{2n}(x) = \ln(1+x) - \sum\limits_{k=1}^{2n} \dfrac{(-1)^{k-1}x^k}{k}$.

Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et

$$f_1'(x) = \frac{1}{1+x} - \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1}x^{k-1} = \frac{1}{1+x} - \frac{1-(-x)^{2n}}{1+x} = \frac{x^{2n}}{1+x} \geqslant 0$$

La fonction f_1 est donc croissante sur $\mathbb{R}^+$ et comme $f_1(0) = 0$, elle est positive sur $\mathbb{R}^+$. Ce qui prouve la première inégalité.

On montre, de même, l'inégalité de droite en étudiant la fonction f_2 définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f_2(x) = S_{2n+1}(x) - \ln(1+x)$, et on obtient : $S_{2n}(x) \leqslant f(x) \leqslant S_{2n+1}(x)$.

En particulier pour $x = 1$ et en passant à la limite : $\ell = \ln(2)$.

4. On montre le résultat par récurrence :

→ L'initialisation est banale.

→ On suppose la propriété vraie au rang n : $\sum\limits_{k=n+1}^{2n} \dfrac{1}{k} = S_{2n}(1)$. Alors

$$\sum_{k=n+2}^{2n+2} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = S_{2n}(1) + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}$$

$$= S_{2n+2}(1)$$

ce qui prouve l'hérédité et donne la conclusion.

On reconnaît une somme de Riemann :

$$S_{2n}(1) = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}$$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n}(1) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx = \ln(2)$

5. Soit $n > 0$. On a : $\dfrac{1-(-t)^n}{1+t} = \sum_{p=0}^{n-1}(-t)^p$, donc :

$$\int_0^1 \frac{1-(-t)^n}{1+t}dt = \sum_{p=0}^{n-1}\int_0^1 (-t)^p dt = \sum_{p=0}^{n-1}\frac{(-1)^{p-1}}{p} = S_n(1)$$

et : $S_n(1) = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t} - \int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t}dt = \ln(2) - \int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t}dt$

Or, pour tout $t \in [0,1]$, $|\dfrac{(-t)^n}{1+t}| = \dfrac{t^n}{1+t} \leqslant t^n$

et

$$0 \leqslant |\int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t}dt| \leqslant \int_0^1 |\frac{(-t)^n}{1+t}|dt \leqslant \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}dt \leqslant \int_0^1 t^n dt \leqslant \frac{1}{n+1}$$

ce qui entraîne que $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t}dt = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(1) = \ln(2)$.

Exercice 1.12.

Soit r un réel strictement positif. On considère un réel strictement positif u_0 et on définit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ en posant :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{r+u_n^2}$$

1. Etudier la fonction $x \mapsto x^3 + rx - 1$ et montrer qu'elle s'annule en un seul point ℓ. En déduire que la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{1}{r+x^2}$ admet un seul point fixe (*i.e.* il existe un unique x_0 tel que $f(x_0) = x_0$).

2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(f(x))$.

a) Que vaut $g(x)$?

b) Montrer qu'il existe trois réels a, b et c que l'on déterminera, tels que pour tout x réel on a :

$$(1-rx)(r+x^2)^2 - x = (x^3+rx-1)(ax^2+bx+c)$$

c) Déterminer la fonction $x \mapsto h(x) = g(x) - x$.

3. On prend pour r la valeur 1.

a) Montrer que g admet un seul point fixe.

b) Que peut-on dire de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$?

4. On prend pour r la valeur $1/2$.

a) Montrer que g admet trois points fixes. On notera α et β les deux points fixes qui sont différents de ℓ avec $\alpha < \beta$.

b) On pose $E = \{\alpha, \beta, \ell\}$. Montrer que f laisse l'ensemble E invariant (i.e que l'on a $f(E) = E$).

En déduire que $\alpha < \ell < \beta$.

c) Etudier le signe de la fonction h définie par $h(x) = g(x) - x$.

d) Etudier la convergence des suites $(u_{2n})_{n\geq 0}$ et $(u_{2n+1})_{n\geq 0}$ en fonction de la valeur initiale u_0.

Solution :

1. Une étude immédiate montre que l'application $x \mapsto x^3 + rx - 1$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. L'étude de ses limites en $\pm\infty$ montre qu'elle s'annule en un unique point ℓ.
Il en résulte que la fonction f admet un unique point fixe ℓ.

2. a) Un calcul immédiat donne, pour tout x réel :

$$g(x) = \frac{(r + x^2)^2}{r(r + x^2)^2 + 1}$$

b) En effectuant le produit du membre de droite et par identification, il vient :

$$(1 - rx)(r + x^2)^2 - x = (x^3 + rx - 1)(-rx^2 + x - r^2)$$

c) La fonction h est définie par :

$$h(x) = \frac{(1 - rx)(r + x^2)^2 - x}{r(r + x^2)^2 + 1} = \frac{(x^3 + rx - 1)(-rx^2 + x - r^2)}{r(r + x^2)^2 + 1}$$

Remarquons que le discriminant Δ du trinôme $-rx^2+x-r^2$ est égal à $1-4r^3$.

3. a) Lorsque $r = 1$, Δ est négatif. La fonction h n'admet qu'un seul zéro qui est ℓ. La fonction g admet donc ℓ comme unique point fixe.

b) La suite (u_n) est bornée par construction. La fonction g étant croissante, les deux suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones (et bornées). Elles convergent donc chacune vers l'unique point fixe de g.
La suite (u_n) converge donc vers ℓ.

4. a) Lorsque $r = 1/2$, Δ est strictement positif. La fonction h a trois zéros et la fonction g admet trois points fixes α, β, ℓ. Un calcul immédiat donne :

$$\alpha = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, \beta = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

b) Posons $E = \{\alpha, \beta, \ell\}$. On remarque que :

$$f(\alpha) = f(g(\alpha)) = g(f(\alpha)),\ f(\beta) = f(g(\beta)) = g(f(\beta)).$$

L'application f étant injective, les points $f(\alpha), f(\beta)$, ℓ sont trois points distincts, invariants par g. Comme f admet un unique point fixe, il vient :

$$f(\alpha) = \beta,\ \ f(\beta) = \alpha$$

On considère alors les différentes possibilités pour ordonner α, β et ℓ, et en appliquant f, on a nécessairement $\alpha < \ell < \beta$.

c) Le signe de h est immédiat :

$$\operatorname{sgn}(h(x)) = \begin{cases} +1 & \text{si } x \in]-\infty, \alpha[\cup]\ell, \beta[\\ -1 & \text{si } x \in]\alpha, \ell[\cup]\beta, +\infty[\end{cases}$$

d) Il faut distinguer plusieurs cas :

$\star$ $0 < u_0 < \alpha$. On a alors $h(u_0) > 0$ et donc $u_2 > u_0$. La fonction g étant croissante, la suite (u_{2n}) est croissante et majorée par α.

Elle converge vers un point fixe de g qui ne peut être que α.

Comme f est décroissante, la suite (u_{2n+1}) est décroissante (car $u_{2n+1} = f(u_{2n})$) et minorée par $\beta = f(\alpha)$. Elle converge donc vers β.

$\star$ $u_0 = \alpha$. Les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont constantes égales respectivement à α et β.

$\star$ $\alpha < u_0 < \ell$. Le tableau des signes de h et un raisonnement identique à celui du premier cas montrent que la suite (u_{2n}) est décroissante et converge vers α, alors que la suite (u_{2n+1}) est croissante et converge vers β.

$\star$ $u_0 = \ell$. La suite (u_n) est constante égale à ℓ.

$\star$ $\ell < u_0 < \beta$. La suite (u_{2n}) est croissante et converge vers β, alors que la suite (u_{2n+1}) est décroissante et converge vers α.

$\star$ $u_0 = \beta$. Les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont constantes égales respectivement à β et α.

$\star$ $u_0 > \beta$. La suite (u_{2n}) est décroissante et converge vers β, alors que la suite (u_{2n+1}) est croissante et converge vers α.

Exercice 1.13.

Soient $a > 0$ et $b \geqslant 0$. Soit la suite (u_n) définie par récurrence par :

$$u_0 \in]0, +\infty[, \forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = (au_n + b)^{\frac{1}{2}}.$$

1. On suppose $b = 0$.

   a) Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = a\big(\frac{u_0}{a}\big)^{2^{-n}}$.

   b) Étudier la convergence de la suite (u_n).

   c) Déterminer la nature de la série $\sum 2^n(u_n - a)$.

2. On suppose $b > 0$ et on note $a^* = \dfrac{a + (a^2 + 4b)^{\frac{1}{2}}}{2}$.

   a) Montrer que si (u_n) converge, alors elle converge vers a^*.

   b) Montrer que (u_n) converge vers a^*.

c) Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - a^*| \leqslant \dfrac{a}{2\min(a^*, u_{n+1})}|u_n - a^*|$.

d) En déduire la nature de la série $\sum 2^n(u_n - a^*)$.

Solution :

1. a) Récurrence facile.

b) On a : $u_n = a\exp\big(\frac{1}{2^n}\ln\frac{u_0}{a}\big)$; l'exposant tend vers 0 donc l'exponentielle tend vers 1.

c) Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2^n}\ln\dfrac{u_0}{a} = 0$, on a :

$$2^n(u_n - a) = 2^n a\big(e^{\frac{1}{2^n}\ln\frac{u_0}{a}} - 1\big) \underset{(n\to+\infty)}{\sim} a\ln\frac{u_0}{a}.$$

Si $u_0 \neq a$ la série diverge grossièrement ; si $u_0 = a$ la série (nulle) converge.

2. a) Comme la fonction $f : x \to \sqrt{ax+b}$ est continue la limite éventuelle ℓ de (u_n) vérifie :

$$\ell = \sqrt{a\ell + b} \Longleftrightarrow \begin{cases} \ell \geqslant 0 \\ \ell^2 = a\ell + b \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \ell \geqslant 0 \\ \ell = \dfrac{a + (a^2+4b)^{\frac{1}{2}}}{2} \text{ ou } \dfrac{a - (a^2+4b)^{\frac{1}{2}}}{2} \\ (\text{car } a^2 + 4b > 0) \end{cases}$$

Soit $\ell = a^*$ $\quad(\text{car } \dfrac{a - (a^2+4b)^{\frac{1}{2}}}{2} < 0)$.

b) La fonction f est croissante, sa représentation graphique coupe la droite $y = x$ en a^*, est au-dessus avant a^* et au-dessous après a^*. Par conséquent :

• si $u_0 \leqslant a^*$, alors $u_1 \geqslant u_0$ puis par récurrence évidente, $u_n \leqslant u_{n+1}$ pour tout n. La suite est croissante et majorée, donc converge.

• si $u_0 \geqslant a^*$, alors $u_1 \leqslant u_0$ puis par récurrence évidente, $u_n \geqslant u_{n+1}$ pour tout n. La suite est décroissante et minorée, donc converge.

c) D'après l'inégalité des accroissements finis, on a :

$$|u_{n+1} - a^*| = |f(u_n) - f(a^*)| \leqslant \sup_{[u_n, a^*]} |f'| \times |u_n - a^*|\,.$$

Or $f'(x) = \dfrac{a}{2\sqrt{ax+b}}$; ainsi f' est décroissante positive ; donc :

$$\sup_{[u_n,a^*]} |f'| = \begin{cases} \dfrac{a}{2\sqrt{au_n+b}} = \dfrac{a}{2u_{n+1}} & \text{si } u_n \leqslant a^* \\ \dfrac{a}{2\sqrt{aa^*+b}} = \dfrac{a}{2a^*} & \text{si } u_n \geqslant a^* \end{cases}$$

Dans tous les cas, on a donc bien : $|u_{n+1} - a^*| \leqslant \dfrac{a}{2\min(a^*, u_{n+1})}|u_n - a^*|$.

d) • Si $u_0 = a^*$, alors $\sum 2^n(u_n - a)^*$ est la série nulle (convergente).

• Si $u_0 > a^*$, alors $u_n > a^*$ pour tout n et par récurrence évidente, on a : $|2^n(u_n - a^*)| \leqslant \left(\frac{a}{2a^*}\right)^n |u_0 - a^*|$.
Comme $0 < \frac{a}{2a^*} < \frac{1}{2}$, par comparaison avec une série géométrique convergente, la série $\sum 2^n(u_n - a)^*$ est absolument convergente, donc convergente.
• Si $u_0 < a^*$, alors $u_n < a^*$ pour tout n et la suite (u_n) converge vers a^*, donc :
$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a}{2u_{n+1}} = \frac{a}{2a^*} < \frac{1}{2}$.
Donc $\frac{a}{2u_{n+1}} < \frac{3}{4}$ à partir d'un certain rang et on peut raisonner comme dans le cas précédent (comparaison à une série géométrique de raison $\frac{3}{4}$)
Ainsi, dans tous les cas, la série converge.

Exercice 1.14.

Pour tout $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = \prod\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{x}{k}}$

On pose également $I_n = \int_0^1 f_n(x)dx$.

Pour toute suite $(h_n)_{n\geq 1}$ positive, on définit $J_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+h_n x}$.

1. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} h_n = +\infty$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n$.

2. Trouver une suite $(h_n)_{n\geq 1}$ pour laquelle $\forall\, n \geqslant 1, I_n \leqslant J_n$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

3. Déterminer deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ toutes deux équivalentes à $(\ln n)_n$, telles que pour tout $x \in [0,1]$

$$\mathrm{e}^{-xu_n} \leqslant f_n(x) \leqslant \mathrm{e}^{-xv_n}$$

(on pourra utiliser $\ln(f_n(x))$).

4. a) Montrer que I_n est équivalent à $\frac{1}{\ln n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
b) Déterminer la nature de la série $\sum I_n$.

Solution :

1. Avec $h_n > 0$, on a : $J_n = \frac{1}{h_n}\Big[\ln(1+xh_n)\Big]_0^1 = \frac{\ln(1+h_n)}{h_n}$, et par négligeabilité classique : $\lim\limits_{n\to\infty} J_n = 0$.

2. On a : $A_n = (1+x)(1+\frac{x}{2})\cdots(1+\frac{x}{n}) \geqslant 1 + x\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

Or, par comparaison série-intégrale, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geqslant \int_1^{n+1} \frac{dt}{t} = \ln(n+1)$. Ainsi, il suffit de choisir $h_n = \ln(n+1)$. Il vient également $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

3. Comme $f_n(x) > 0$ sur $[0,1]$, on a :
$\ln f_n(x) = -\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{x}{k}\right) \implies \frac{d}{dx}(\ln f_n(x)) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x+k}$
En intégrant : $\int_0^x (-\ln f_n(t))dt = \sum_{k=1}^{n} \int_0^x \frac{dt}{t+k}$
Comme $t \in [0,1]$, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+t} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, donc :

$$x \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \leqslant -\ln f_n(x) \leqslant x \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Il suffit de poser $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}$, puis de composer les inégalités par la fonction croissante exponentielle.

4. a) On intègre la dernière inégalité. Il vient : $\int_0^1 \mathrm{e}^{-xu_n} dx \leqslant I_n \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}^{-xv_n} dx$,
soit $\frac{1-\mathrm{e}^{-u_n}}{u_n} \leqslant I_n \leqslant \frac{1-\mathrm{e}^{-v_n}}{v_n}$.
Comme $\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, on obtient :

$$\frac{1-\mathrm{e}^{-u_n}}{u_n} \underset{(\infty)}{\sim} \frac{1}{u_n} \underset{(\infty)}{\sim} \frac{1-\mathrm{e}^{-v_n}}{v_n}$$

et par encadrement d'équivalents : $I_n \underset{(\infty)}{\sim} \frac{1}{u_n} \underset{(\infty)}{\sim} \frac{1}{\ln n}$

b) La série $\sum I_n$ diverge, car $n \geqslant 2 \implies \frac{1}{\ln n} \geqslant \frac{1}{n-1} > 0$. On conclut par la règle de comparaison des séries à termes positifs.

Exercice 1.15.

1. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t^2x}}{1+t^2} dt$ converge pour tout $x \geqslant 0$. On pose alors :

$$h(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t^2x}}{1+t^2} dt$$

Calculer $h(0)$.

2. a) Montrer que pour tout $u \geqslant 0, |\mathrm{e}^{-u} - 1 + u| \leqslant \frac{u^2}{2}$.

b) Montrer que h est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que pour tout $x > 0$,

$$h'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{t^2 \mathrm{e}^{-t^2 x}}{1+t^2} dt$$

(on pourra revenir à la définition de la dérivée de h en x).

On admet que h est continue sur $\mathbb{R}^+$.

3. Montrer qu'il existe une constante A telle que pour tout $x \geqslant 0$, $h(x) - h'(x) = \dfrac{A}{\sqrt{x}}$

4. On pose pour tout $x \geqslant 0$, $g(x) = \mathrm{e}^{-x} h(x)$.

a) Montrer que : $g(x) = \dfrac{\pi}{2} - A\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}} dt$.

b) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

c) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\, dt$.

Solution :

1. La fonction $\varphi : t \to \dfrac{\mathrm{e}^{-tx}}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ et pour tout $x \geqslant 0$, on a :

$$0 \leqslant \varphi(t) \leqslant \frac{1}{1+t^2}$$

dont l'intégrale converge sur $\mathbb{R}^+$. De plus $h(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$.

2. a) On utilise l'inégalité de Taylor à l'ordre 2, soit :

$$|\mathrm{e}^{-u} - 1 + u| \leqslant \frac{u^2}{2} \sup_{u \geq 0}(\mathrm{e}^{-u}) = \frac{u^2}{2}$$

b) On remarque que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2 \mathrm{e}^{-t^2 x}}{1+t^2} dt$ converge pour tout $x > 0$.

Soit a réel tel que $x \pm a > 0$:

$$h(x+a) - h(x) + a\int_0^{+\infty} \frac{t^2 \mathrm{e}^{-t^2 x}}{1+t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t^2(x+a)} - \mathrm{e}^{-t^2(x+a)} a t^2 \mathrm{e}^{-t^2 x}}{1+t^2} dt$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\left|h(x+a) - h(x) + a\int_0^{+\infty} \frac{t^2 \mathrm{e}^{-t^2 x}}{1+t^2} dt\right| &\leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t^2 x}(e^{-t^2 a} - 1 + a t^2)}{1+t^2} dt \\ &\leqslant \frac{a^2}{2}\int_0^{+\infty} \frac{t^4 \mathrm{e}^{-t^2 x}}{1+t^2} dt = \frac{a^2 C_x}{2}\end{aligned}$$

Ceci répond à la question, en prenant la limite lorsque a tend vers 0.

3. Par la question précédente, en posant $u = t\sqrt{x}$, changement de variable linéaire :

$$h(x) - h'(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2 x} dt = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2} du$$

4. a) On a $g'(x) = (h'(x) - h(x))\mathrm{e}^{-x} = -\dfrac{A}{\sqrt{x}}\mathrm{e}^{-x}$
et
$g(x) = g(0) + \displaystyle\int_0^x g'(t)dt = h(0) - A\int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}dt = \frac{\pi}{2} - A\int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}dt$

b) Comme $0 \leqslant g(x) \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2 x} = \frac{A}{\sqrt{x}}$, il vient $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

c) En réunissant les questions précédentes, il vient

$$\frac{\pi}{2} = A\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}dt = A\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2} du = A^2$$

Comme $A > 0$, on conclut $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2} du = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Exercice 1.16.

Pour toutes suites numériques $u = (u_n)_{n\geq 0}$ et $v = (v_n)_{n\geq 0}$, on définit la suite $w = (w_n)_{n\geq 0}$ par : $\forall\, n \in \mathbb{N}, w_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$.
On note alors $w = u \star v$.

1. Dans cette question, la suite (u_n) est définie par : $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, et (v_n) est une suite de réels positifs, décroissante à partir du rang 1 et de limite nulle.

a) Établir, pour tout couple d'entiers naturels (n, m) tels que $n < m$, l'inégalité : $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{m} u_k \leqslant u_n$.

b) Soit n un entier strictement supérieur à 1. Montrer que :

$$w_{2n} \leqslant v_0 u_{2n} + 2v_n + v_1 u_n$$

c) Montrer que la suite (w_n) converge vers une limite à déterminer.

d) Soit b la suite définie par : $b_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$. Montrer que la suite $b \star v$ est convergente de limite nulle.

2. Dans cette question, A désigne l'ensemble des suites $a = (a_n)_{n\geq 0}$ de réels positifs vérifiant : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, a_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1})$
$b = (b_n)$ est la suite de la question 1.d, et $c = (c_n)$ la suite définie par :

$$\begin{cases} c_0 = a_0 \\ c_n = a_n + \dfrac{a_{n-1}}{2} \quad \text{si } n \geqslant 1 \end{cases}$$

a) Montrer que la suite (c_n) est convergente . On note ℓ sa limite.

b) Montrer que $a = b \star c$.

c) Soit d la suite définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}, d_n = c_n - \ell$. Montrer que la suite $b \star d$ tend vers 0.

3. Dans cette question, les suites u et v sont définies par : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \ln(n+1), \quad v_n = \frac{1}{n+1}$$

Écrire un programme en Pascal qui calcule et rend, pour tout n, le réel w_n.

Solution :

1. a) On a :

$$\sum_{k=n+1}^{m} \left(\frac{1}{2}\right)^k \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \times \frac{1}{1-1/2} = \left(\frac{1}{2}\right)^n = u_n$$

b) Il vient :

$$w_{2n} = \sum_{k=0}^{2n} u_k v_{2n-k} = v_0 u_{2n} + \sum_{k=0}^{2n-1} u_k v_{2n-k}$$

$$w_{2n} = v_0 u_{2n} + \sum_{k=0}^{n} u_k v_{2n-k} + \sum_{k=n+1}^{2n-1} u_k v_{2n-k}$$

$$w_{2n} \leqslant v_0 u_{2n} + v_n \sum_{k=0}^{n} u_k + v_1 \sum_{k=n+1}^{2n-1} u_k \leqslant v_0 u_{2n} + 2v_n + v_1 u_n$$

c) Les suites (u_n) et (v_n) tendent vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Ainsi $\lim\limits_{n\to\infty} w_{2n} = 0$.

On montre comme dans la question précédente que

$$w_{2n+1} \leqslant v_0 u_{2n+1} + 2v_{n+1} + v_1 u_n,$$

ce qui montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} w_{2n+1} = 0$. Par exhaustion $(w_n)_n$ converge de limite nulle.

d) Écrivons $|(b \star v)_n| \leqslant \sum\limits_{k=0}^{n} |b_k||v_{n-k}| = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = w_n$, ce qui donne le résultat demandé.

2. a) La suite (c_n) est positive. Comme $a \in A$:

$$c_{n+1} = a_{n+1} + \frac{a_n}{2} \leqslant \frac{a_n + a_{n-1}}{2} + \frac{a_n}{2} = a_n + \frac{a_{n-1}}{2} = c_n$$

La suite (c_n) est décroissante minorée et converge donc vers une limite ℓ.

b) On montre par récurrence que $a_n = (b \star c)_n$.

- c'est vérifié pour $n = 0$.
- supposons cette relation vérifiée pour n. Alors

$$a_{n+1} = c_{n+1} + \frac{a_n}{2} = c_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1} c_{n-k} = c_{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1} \left(-\frac{1}{2}\right)^k c_{n+1-k}$$

$$a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \left(-\frac{1}{2}\right)^k c_{n+1-k}$$

ce qui prouve l'hérédité. On conclut par le principe de récurrence.

c) La suite d tend vers 0. Il faut montrer qu'alors $b \star d$ tend vers 0.

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N tel que $n \geqslant N$ entraîne $|d_n| \leqslant \varepsilon$.

On a :

$$\begin{aligned}|(b\star d)_n| &\leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{|d_k|}{2^{n-k}} = \sum_{k=0}^{N} \frac{|d_k|}{2^{n-k}} + \sum_{k=N+1}^{n} \frac{|d_k|}{2^{n-k}} \\ &\leqslant (\max_{0\leq k\leq N} |d_k|) \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{2^{n-k}} + \varepsilon \sum_{k=N+1}^{n} \frac{1}{2^{n-k}} \\ &\leqslant (\max_{0\leq k\leq N} |d_k|) \sum_{k=n-N}^{n} \frac{1}{2^{k}} + 2\varepsilon \leqslant \frac{C_N}{2^{n-N+1}} + 2\varepsilon\end{aligned}$$

Cette dernière quantité tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

3. Une proposition de fonction :

```
Function escp2013(n : integer) : real ;
Var i,k : integer ;
w : real ;
Begin
For f := 0 to n do
      begin
      w := 0 ;
      for i := 0 to k do w := w+ln(i+1)/(k-i+1)
      end ;
escp2013 := w
end ;
```

Exercice 1.17.

On considère l'ensemble $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0 \text{ et } y > 0\}$ et la fonction f définie sur U par :

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

1. Justifier que U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

2. Déterminer le gradient de f en un point quelconque de U.

3. a) Montrer que les coordonnées x et y d'un point critique sont solutions du système d'équations

$$\begin{cases} 3(x + y) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} \\ x - y = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{y^2} \end{cases}$$

b) Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(t) = t - \dfrac{1}{t^2}$ est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$. En déduire qu'il n'y a qu'un seul point critique M dans l'ouvert U. Déterminer ce point critique.

c) Quelle est la nature de ce point critique ?

4. Déterminer les valeurs propres de la hessienne de f en tout point de U. Écrire l'égalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 en M. Que peut-on en déduire ?

5. On veut étudier les extremums de f sur U sous la contrainte $\mathcal{C}$ donnée par $x - y = -1$.

a) Montrer que les coordonnées des points critiques de f sous la contrainte $\mathcal{C}$ vérifient un système d'équations que l'on déterminera.

b) A l'aide de l'étude d'une fonction, prouver qu'il y a un seul point critique sous la contrainte $\mathcal{C}$ (que l'on ne cherchera pas à déterminer). Quelle est sa nature ?

Solution :

1. Si $(a, b) \in U$, il est clair que la boule ouverte $B = B((a, b), \frac{1}{2}\min(a, b))$ est contenue dans U. En effet, si $(x, y) \in B$ on a $|x-a|^2+|y-b|^2 \leqslant \frac{1}{4}\min(a, b)^2$, d'où $|x - a| \leqslant \frac{1}{2}\min(a, b) \leqslant \frac{1}{2}a$ et par conséquent $x \geqslant a - \frac{1}{2}a = \frac{a}{2} > 0$ (de la même manière $y > 0$). L'ensemble U est donc bien ouvert.

2. Si $M = (x, y) \in U$, on a $\nabla f_M = (2x + y - \frac{1}{x^2}, 2y + x - \frac{1}{y^2})$.

3. a) D'après le cours, un point $M = (x, y) \in U$ est donc critique si et seulement si :

$$\begin{cases} 2x + y - \frac{1}{x^2} &= 0 \\ 2y + x - \frac{1}{y^2} &= 0 \end{cases}$$

En faisant la somme et la différence de ces deux équations, on obtient le système souhaité.

b) Comme $g'(t) = 1 + \frac{2}{t^3}$, on voit que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, comme $\lim\limits_{t\to 0^+} g(t) = -\infty$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = +\infty$, la fonction g réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$. La deuxième équation du système obtenu en a) peut s'écrire $g(x) = g(y)$ pour x et y dans $\mathbb{R}_+^*$, on a donc nécessairement $x = y$.
En reportant cette égalité dans la première équation, on obtient $x = y = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$.

c) Avec les notations de Monge, on a $rt-s^2 = 4\times(1+3)(1+3)-1 = 63 > 0$, par conséquent f admet un minimum local au point $M = (\frac{1}{\sqrt[3]{3}}, \frac{1}{\sqrt[3]{3}})$.

4. Si $M = (x, y) \in U$, on voit que la hessienne de f au point M est donnée par

$$\nabla^2 f_M = \begin{pmatrix} 2(1 + \frac{1}{x^3}) & 1 \\ 1 & 2(1 + \frac{1}{y^3}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$$

avec $a, b > 1$. On voit facilement que les valeurs propres sont $\lambda_1 = \frac{a + b + \sqrt{4 + (a-b)^2}}{2} > 0$ et $\lambda_2 = \frac{a + b - \sqrt{4 + (a-b)^2}}{2} > 0$ puisque $a, b > 1$.
L'égalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 en M nous dit que $f(M + H) = f(M) + \langle \nabla f_M, H \rangle + \frac{1}{2} q_{M+\theta H}(H) = f(M) + \frac{1}{2} q_{M+\theta H}(H)$ où $\theta \in [0, 1]$.
Comme les valeurs propres de la hessienne sont strictement positives en tout point de U, on a $q_{M+\theta H}(H) > 0$ pour tout $H \neq 0$. Par conséquent, f admet un minimum global en M qui vaut $3^{\frac{4}{3}}$.

5. a) Si $\mathcal{H} = \{(x, y); x - y = 0\}$, un point $A = (x, y) \in U$ est critique sous la contrainte $\mathcal{C}$ si ∇f_A est orthogonal à $\mathcal{H}$. On obtient donc le système

$$\begin{cases} 3(x + y) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \\ y = x + 1 \end{cases}$$

On voit immédiatement que ceci est équivalent à l'équation $h(x) = 0$ où

$$h(t) = 6t + 3 - \frac{1}{t^2} - \frac{1}{(1+t)^2}.$$

Or $h'(t) = 6 + \frac{2}{t^3} + \frac{2}{(1+t)^3} > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\lim\limits_{t \to 0^+} h(t) = -\infty$, $\lim\limits_{t \to +\infty} h(t) = +\infty$.
La fonction h est donc une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, il existe un unique point critique $A = (x_0, x_0 + 1)$ où x_0 est l'unique solution de l'équation $h(x) = 0$.

b) Comme ∇f_A est orthogonal à $\mathcal{H}$ et que la hessienne a des valeurs propres strictement positives en tout point de U, on sait avec l'égalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 en A que le point A est un minimum global de f sous la contrainte $\mathcal{C}$.

2

ALGÈBRE

overfullrule=0pt

Exercice 2.01.

Dans tout cet exercice n est un entier naturel non nul, E désigne l'espace vectoriel des fonctions polynomiales réelles de degré inférieur ou égal à n. On pose, pour tout $(P,Q) \in E^2$

$$\langle P,Q\rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}\,dt$$

1. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

2. Soit $\mathcal{B} = (B_0, B_1, \ldots, B_n)$, avec pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, $B_i(X) = \dfrac{X^i}{i!}$. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de E et calculer, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\langle B_i, B_j\rangle$.

3. Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on pose

$$f_k(t) = t^k\mathrm{e}^{-t} \text{ et } L_k(t) = (-1)^k \frac{f_k^{(k)}(t)}{k!}\mathrm{e}^t$$

où $f_k^{(k)}$ désigne la dérivée $k^{\text{ème}}$ de la fonction f_k.

a) Montrer que L_k est une fonction polynomiale. Déterminer son degré et ses coefficients.

b) Montrer que $\mathcal{L} = (L_0, L_1, \ldots, L_n)$ est une base orthonormée de E.

c) Écrire la matrice de passage A de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{L}$.

4. Soit T l'application définie sur E par : pour tout $P \in E$, $T(P) = P(X-1)$.

a) Montrer que T est un endomorphisme inversible de E. Déterminer T^{-1}.

b) Écrire la matrice de T dans la base canonique de E et la comparer à A.

Solution :

1. C'est une question standard. L'intégrale existe en raison du peu de poids de e^{-t} en $+\infty$. L'application est bilinéaire symétrique par linéarité de l'intégrale et commutativité du produit polynomial. Elle est positive car $P^2(t)\mathrm{e}^{-t}$ l'est sur $\mathbb{R}^+$ et définie positive car $t \mapsto P^2(t)\mathrm{e}^{-t}$ est positive continue non identiquement nulle si $P \neq 0$.

2. La famille $(B_0, \ldots, B_n)$ de polynômes de E est échelonnée en degrés : elle est libre. De plus elle est de cardinal $n+1 = \dim E$: c'est une base de$E$. Enfin

$$\langle B_i, B_j \rangle = \frac{1}{i!j!}\int_0^{+\infty} t^{i+j}\mathrm{e}^{-t}dt = \frac{(i+j)!}{i!j!}$$

3. a) On calcule $f_k^{(k)}$ à l'aide de la formule de Leibniz :

$$\begin{aligned} f_k^{(k)}(t) &= \frac{d^k}{dt^k}(t^k\mathrm{e}^{-t}) = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\frac{d^j}{dt^j}(t^k)(-1)^{k-j}\mathrm{e}^{-t} \\ &= \Big(\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}\frac{k!}{(k-j)!}t^{k-j}\Big)\mathrm{e}^{-t} \end{aligned}$$

Ainsi L_k est-il un polynôme de degré k de coefficient dominant $\frac{1}{k!}$, défini par :

$$L_k(t) = \sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}\frac{1}{(k-j)!}t^{k-j}$$

b) La famille $\mathcal{L}$ est une base car échelonnée en degré et de cardinal $n+1$. Soit $p < k$. Une intégration par parties (directement avec la borne infinie, car on constate que le passage à la limite est sans histoires) donne :

$$\begin{aligned} \langle L_k, L_p \rangle &= \frac{(-1)^k}{k!}\int_0^{+\infty} f_k^{(k)}(t)L_p(t)dt \\ &= \frac{(-1)^k}{k!}\Big[f_k^{(k-1)}(t)L_p(t)\Big]_0^{\to+\infty} - \frac{(-1)^k}{k!}\int_0^{+\infty} f_k^{(k-1)}(t)L_p'(t)dt \end{aligned}$$

Remarquons que pour $0 \leqslant j < k$

$f_k^{(j)}(t) = \mathrm{e}^{-t}\sum_{i=0}^{j}(-1)^{j-i}\binom{j}{i}k(k-1)\cdots(k-i+1)t^{k-i}$ et $f_k^{(j)}(0) = 0$, car $k-i > 0$ pour $i \in [\![0, j]\!]$.

Ainsi le crochet de cette intégration par parties est nul en 0, et de limite nulle en $+\infty$, par négligeabilité classique, donc :

$$\langle L_k, L_p \rangle = \frac{(-1)^{k+1}}{k!}\int_0^{+\infty} f_k^{(k-1)}(t)L_p'(t)dt$$

En réitérant ce processus, on arrive à :

$$\langle L_k, L_p\rangle = \frac{(-1)^{2k}}{k!}\int_0^{+\infty} f_k^{(0)}(t)L_p^{(k)}(t)dt = 0$$

puisque $p < k$ et que le degré de L_p est égal à p.
Enfin, pour $p = k$, on arrive ainsi à :
$\langle L_k, L_k\rangle = \frac{1}{k!}\int_0^{+\infty} f_k^{(0)}(t)L_k^{(k)}(t)dt = \frac{1}{k!}\int_0^{+\infty} t^k \mathrm{e}^{-t}dt = 1$ (intégrale de référence du cours de probabilité)

La matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{L}$ a comme colonnes les coordonnées des polynômes $L_0, \ldots, L_n$ dans la base $(B_0, \ldots, B_n)$. Il suffit de se reporter à l'écriture de L_k dans cette base, soit :

$$L_k(t) = \sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}\frac{1}{(j)!}t^j = \sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}B_j$$

4. a) L'application T est clairement un endomorphisme de E inversible d'inverse $P \mapsto P(X+1)$.

b) On a, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$,

$$(X-1)^k = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^{k-j}X^j = (-1)^k\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^j X^j$$

La matrice associée à T dans la base $(1, X, \ldots, X^n)$ est donc obtenue à partir de la matrice A définie dans la question précédente, en multipliant la k-ième colonne par $(-1)^k$, pour tout k.

Exercice 2.02.

Dans cet exercice $E = \mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne canonique.
Soit $u = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ tel que $||u|| = 1$. On note $D = \mathrm{Vect}(u)$ et p la projection orthogonale sur D.

1. Soit $x \in E$.

a) Exprimer $p(x)$ en fonction de u et x.

b) Écrire la matrice P de p dans la base canonique de E.

On note $M = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de E canoniquement associé à M.

2. Montrer que $\ker f = D$ et $\mathrm{Im}\, f = D^\perp$.

3. a) Exprimer M^2 en fonction de P et I.

b) En déduire les valeurs propres de f^2.

c) L'endomorphisme f est-il diagonalisable sur $\mathbb{R}$?

4. On pose pour tout t réel $g_t = I + (\sin t)f + (1 - \cos t)f^2$.

a) Exprimer f^3 en fonction de f.

b) Calculer $g_t \circ g_{t'}$ pour $(t, t') \in \mathbb{R}^2$.

c) En déduire que pour tout t réel, g_t est bijectif et déterminer son inverse.

Solution :

1. a) On sait que l'on a alors : $p(x) = \langle x, u\rangle u$.

b) En utilisant pour x respectivement e_1, e_2, e_3, il vient $P = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$

2. $\star$ Pour $X = {}^t(\,x \quad y \quad z\,)$, on a $MX = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} -cy + bz = 0 \\ cx - az = 0 \\ -bx + ay = 0 \end{cases}$

Supposons par exemple $a \neq 0$, le système donne alors $y = \dfrac{b}{a}x, z = \dfrac{c}{a}x$ et donc (x, y, z) est colinéaire à (a, b, c). Le résultat est bien entendu le même si on a $b \neq 0$ ou $c \neq 0$ et comme $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, l'une au moins de ces coordonnées est non nulle. Ainsi

$$\operatorname{Ker} f = D$$

$\star$ Soit $y \in \operatorname{Im} f$, il existe x tel que $y = f(x)$ et la matrice M étant antisymétrique, pour tout $z \in D = \operatorname{Ker} f$, on a, avec des notations évidentes : $\langle z, f(x)\rangle = {}^tZMX = {}^tX{}^tMZ = -{}^tXMZ = -\langle x, f(z)\rangle = 0$. Cela montre que $f(x)$ est orthogonal à z, donc que $\operatorname{Im} f \subseteq D^\perp$.
On termine avec le théorème du rang qui montre que $\dim D^\perp = 2$.

3. a) Après calcul $M^2 = P - I$.

b) Les valeurs propres de M^2 sont celles de P décalées de -1, par conséquent $\operatorname{Sp}(f^2) = \{-1, 0\}$.

c) Si λ est une valeur propre de f, alors λ^2 est une valeur propre de f^2. Donc $\lambda \in \{0, i, -i\}$.
Si f était diagonalisable sur $\mathbb{R}$, sa seule valeur propre serait 0 et f serait nulle, ce qui est exclu. Donc f est non diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

4. a) On sait que $M^2 = P - I$. En calculant MP, on trouve $M^3 + M = 0$ soit $f^3 + f = 0$

b) En utilisant les formules trigonométriques et $f^3 = -f, f^4 = f^2$, il vient

$$g_t \circ g_{t'} = I + \sin(t + t')f + (1 - \cos(t + t'))f^2 = g_{t+t'}$$

c) Ainsi, comme $g_0 = I$, $(g_t)^{-1} = g_{-t}$.

Exercice 2.03.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note

$$C(M) = \{N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \text{ telles que } MN = NM\}.$$

1. Montrer que, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, l'ensemble $C(M)$ est un espace vectoriel.

2. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et I_n la matrice identité. Déterminer $C(\lambda I_n)$ et préciser sa dimension.

On note $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{C}$ de degré au plus $n-1$.
Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ des nombres complexes deux-à-deux distincts. On pose :

$$\varphi : \mathbb{C}_{n-1}[X] \to \mathbb{C}^n, P \mapsto (P(\lambda_1), \ldots, P(\lambda_n)).$$

3. Montrer que l'application φ est bijective.

Dans toute la suite, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ désigne une matrice dont les valeurs propres sont $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$.

4. Soit $B \in C(A)$.

a) Montrer que tout vecteur propre de A est un vecteur propre de B.

b) En déduire que B est diagonalisable.

5. En déduire que $C(A) = \{Q(A), Q \in \mathbb{C}_{n-1}[X]\}$.

Solution :

1. On montre sans difficulté que $C(M)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, car l'application $N \mapsto MN - NM$ est clairement linéaire et $C(M)$ est son noyau.

2. Comme la matrice identité commute avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors

$$C(\lambda I_n) = \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \text{ et } \dim C(\lambda I_n) = n^2.$$

3. L'application φ est linéaire.
Montrons que l'application φ est injective :
Soit $P \in \operatorname{Ker} \varphi$. Alors, $\varphi(P) = 0$, soit $\forall\, i \in [\![1, n]\!]$, $P(\lambda_i) = 0$.
Ainsi, P est un polynôme de degré au plus $n-1$ qui possède n racines distincts, donc $P = 0$.

Finalement, φ est injective et $\dim \mathbb{C}_{n-1}[X] = \dim \mathbb{C}^n = n$, donc, d'après le théorème du rang, φ est bijective.

4. a) Soit e un vecteur propre de A. Ainsi, il existe $\lambda \in \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ tel que $Ae = \lambda e$. Comme $B \in C(A)$, alors $A(Be) = B(Ae) = \lambda(Be)$.
Donc $Be \in \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)$. Or, comme les valeurs propres de A sont toutes distinctes, A est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont de dimension 1. Ainsi, $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) = \mathrm{Vect}\{e\}$, et il existe $\mu \in \mathbb{C}$ tel que $Be = \mu e$.
De plus, e n'est pas le vecteur nul, donc e est un vecteur propre de B.

b) Comme A est diagonalisable, il existe une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{C}^n$ constituée de vecteurs propres de A. D'après la question précédente, la matrice de B dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$ est également diagonale et A et B sont donc diagonalisables dans une même base.

5. Notons $\mathbb{C}_{n-1}[A] = \{P(A),\ P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]\}$.

- Comme A commute avec toutes ses puissances, alors $\mathbb{C}_{n-1}[A] \subset C(A)$.
- Soit $B \in C(A)$. D'après la question précédente, il existe une matrice de changement de base P et $(\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{C}^n$ tels que

$$A = P^{-1}\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)P \text{ et } B = P^{-1}\,\mathrm{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)P.$$

Or, la fonction φ étant injective, il existe un polynôme $Q \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $Q(\lambda_i) = \mu_i$. Finalement, $Q\left(\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\right) = \mathrm{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ et $Q(A) = B$.
Ainsi : $C(A) = \mathbb{C}_{n-1}[A]$.

Exercice 2.04.

On note I_n la matrice identité d'ordre n. Soit $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ une application **non constante** telle que, pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\varphi(AB) = \varphi(A)\varphi(B).$$

1. a) Montrer que $\varphi(I_n) = 1$ et $\varphi(0) = 0$.

b) Montrer que si A est inversible, alors $\varphi(A) \neq 0$.

c) Comparer $\varphi(A)$ et $\varphi(B)$ lorsque A et B sont deux matrices semblables.

2. On suppose dans cette question que $n = 2$ et que l'application suivante $\psi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ est de classe C^1.

$$\psi : (a, b, c, d) \to \varphi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)$$

a) Calculer $\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$ (*on pourra utiliser* $\varphi\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$.)

b) Soit l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \varphi\left(\begin{pmatrix} \mathrm{e}^t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$.

Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f' = \alpha f$. En déduire une expression de f en fonction de α.

c) Montrer que, pour tout $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$, on a : $\varphi\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\right) = (\lambda_1\lambda_2)^\alpha$.

d) Calculer $\left|\varphi\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\right)\right|$ pour tout $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.

3. On revient au cas général (n quelconque). On admet l'existence de matrices $J_0, J_1, \ldots, J_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifient la propriété suivante : une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de rang $r \in [\![1, n]\!]$ si et seulement s'il existe $P, Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversibles telles que $A = PJ_rQ$.

a) Pour tout $r \in [\![1, n-1]\!]$ montrer qu'il existe deux matrices A et B de rang r telles que AB soit de rang $r-1$.

b) En déduire que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible si et seulement si $\varphi(A) \neq 0$.

Solution :

1. a) Pour toute matrice A telle que $A^2 = A$ (en particulier I_n et 0), on voit que $\varphi(A)$ est solution de l'équation $x^2 = x$ donc vaut 0 ou 1.
Par l'absurde, si on avait $\varphi(I_n) = 0$, alors on aurait

$$\varphi(A) = \varphi(AI_n) = \varphi(A)\varphi(I_n) = 0$$

pour tout A donc l'application φ serait constante (nulle), ce qui est exclu : donc $\varphi(I_n) = 1$.
Par l'absurde, si on avait $\varphi(0) = 1$, alors on aurait

$$\varphi(A) = \varphi(A)\varphi(0) = \varphi(A0) = \varphi(0) = 1$$

pour tout A donc l'application φ serait constante, ce qui est exclu ; donc $\varphi(0) = 0$.

b) Si A inversible alors $1 = \varphi(I_n) = \varphi(AA^{-1}) = \varphi(A)\varphi(A^{-1})$; ainsi $\varphi(A) \neq 0$.

c) Si $A = PBP^{-1}$, alors :

$$\begin{aligned}\varphi(A) &= \varphi(PBP^{-1}) = \varphi(P)\varphi(B)\varphi(P^{-1}) = \varphi(P)\varphi(P^{-1})\varphi(B)\\ &= \varphi(PP^{-1}B) = \varphi(B).\end{aligned}$$

2. a) On a $0 = \varphi(0) = \varphi\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \varphi\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)\varphi\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$

$$= \left[\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)\right]^2$$

car $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont semblables. Donc $\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 0$.

b) La fonction f est de classe C^1 comme composée de fonctions C^1. On vérifie facilement que pour tout (x,t), $f(x+t)=f(x)f(t)$.
En dérivant par rapport à x puis en évaluant en $x=0$ on obtient $f'(t)=f'(0)f(t)$.
Comme $f(0)=\varphi(I_n)=1$, en posant $\alpha=f'(0)$ et en résolvant l'équation différentielle, on a :

$$\forall\, t\in\mathbb{R}, f(t)=\mathrm{e}^{\alpha t}.$$

c) Les matrices $\begin{pmatrix}1&0\\0&\mathrm{e}^t\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}\mathrm{e}^t&0\\0&1\end{pmatrix}$ sont semblables donc :

$$\forall\, t\in\mathbb{R},\ \varphi\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&\mathrm{e}^t\end{pmatrix}\right)=\mathrm{e}^{\alpha t}.$$

Pour $\lambda_1,\lambda_2>0$, on a donc :

$$\begin{aligned}\varphi\left(\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}\right)&=\varphi\left(\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\ln\lambda_1}&0\\0&1\end{pmatrix}\right)\varphi\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&\mathrm{e}^{\ln\lambda_2}\end{pmatrix}\right)=\mathrm{e}^{\alpha\ln\lambda_1}\mathrm{e}^{\alpha\ln\lambda_2}\\&=(\lambda_1\lambda_2)^\alpha.\end{aligned}$$

d) Pour $\lambda_1,\lambda_2\neq 0$, comme $\lambda_1^2,\lambda_2^2>0$, d'après le b), on a :

$$\begin{aligned}\left|\varphi\left(\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}\right)\right|^2&=\varphi\left(\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}\right)\varphi\left(\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}\right)=\varphi\left(\begin{pmatrix}\lambda_1^2&0\\0&\lambda_2^2\end{pmatrix}\right)\\&=(\lambda_1^2\lambda_2^2)^\alpha=\left(|\lambda_1\lambda_2|^\alpha\right)^2.\end{aligned}$$

Si $\lambda_2=0$ (et de même si $\lambda_1=0$), d'après le a), on a :

$$\varphi\left(\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}\right)=\varphi\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right)\varphi\left(\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&1\end{pmatrix}\right)=0.$$

Finalement (avec la convention $0^\alpha=0$ même si $\alpha\leqslant 0$), on a :

$$\left|\varphi\left(\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}\right)\right|=|\lambda_1\lambda_2|^\alpha.$$

3. a) Il suffit de prendre pour A et B les matrices diagonales – comportant chacune r fois le nombre 1 sur la diagonale et $n-r$ fois le nombre 0 – suivantes ;
$A=\mathrm{diag}(1,\dots,1,0,\dots,0),\quad B=\mathrm{diag}(0,1,\dots,1,0,\dots,0)$.

b) Compte-tenu du 1.b), il suffit de montrer que si A n'est pas inversible, alors $\varphi(A)=0$. D'après la propriété admise au début de la question, on voit que, pour une matrice A de rang r, on a $\varphi(A)\neq 0$ si et seulement si $\varphi(J_r)\neq 0$. Il suffit donc de montrer que $\varphi(J_0)=\cdots=\varphi(J_{n-1})=0$.
Notons r le plus petit entier tel que $\varphi(J_r)\neq 0$ et supposons par l'absurde que $r<n$. Alors d'après la question précédente, il existe A et B de rang r tels que AB est de rang $r-1$. Or ceci est absurde car alors on aurait $0=\varphi(AB)=\varphi(A)\varphi(B)$ avec $\varphi(A)\neq 0$ et $\varphi(B)\neq 0$. D'où le résultat.

Exercice 2.05.

On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$) muni du produit scalaire canonique donné par $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, pour $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$.
On dit qu'une matrice A, appartenant à l'ensemble $\mathcal{M}_n$ des matrices carrées d'ordre $n \in \mathbb{N}$ et à coefficients réels, est positive si et seulement si elle est symétrique et vérifie la condition suivante :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n,\ \langle Ax, x\rangle \geqslant 0$$

Soient A, B deux matrices symétriques de $\mathcal{M}_n$, on écrira $A \leqslant B$ si et seulement si la matrice $B - A$ est positive. On admettra qu'une matrice est positive si et seulement si elle est symétrique et a toutes ses valeurs propres dans $\mathbb{R}_+$.

On rappelle que la forme linéaire tr définie sur $\mathcal{M}_n$ par $\mathrm{tr}(M) = \sum_{k=1}^{n} m_{k,k}$ avec $M = (m_{i,j})_{0\leq i,j\leq n}$ vérifie $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ pour tout couple de matrices $(A, B) \in \mathcal{M}_n^2$.

1. On se place dans $\mathbb{R}^2$ et on considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Montrer que $0 \leqslant A \leqslant B$, mais que l'inégalité $A^2 \leqslant B^2$ est fausse.

b) Vérifier que l'on a $\mathrm{tr}(A^2) \leqslant \mathrm{tr}(B^2)$.

2. Soient A une matrice positive de $\mathcal{M}_n$ et P une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n$. Montrer que la matrice ${}^tPAP$ est positive et que $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}({}^tPAP)$. En déduire que $\mathrm{tr}(A) = \sum_{k=1}^{n} \langle Ae_k, e_k\rangle$ pour toute base orthonormale $(e_k)_{k=1,\ldots,n}$ de $\mathbb{R}^n$.

3. Soit A une matrice positive de $\mathcal{M}_n$. Justifier l'existence d'une base orthonormale $(e_k)_{k=1,\ldots,n}$ de vecteurs propres de A. Montrer que $\mathrm{tr}(AB) \geqslant 0$ pour toute matrice positive B.

4. Soient A, B, C, D quatre matrices positives de $\mathcal{M}_n$ telles que $A \leqslant B$ et $C \leqslant D$.

a) En utilisant la question précédente, montrer que $\mathrm{tr}(AC) \leqslant \mathrm{tr}(BC)$.

b) Prouver que $\mathrm{tr}(AC) \leqslant \mathrm{tr}(BD)$. En déduire que si $0 \leqslant A \leqslant B$, alors $\mathrm{tr}(A^2) \leqslant \mathrm{tr}(B^2)$.

Solution :

1. La matrice A est symétrique et ses valeurs propres sont 0 et 1. D'après le critère donné dans l'énoncé, elle est positive. La matrice B est symétrique

et la matrice $B - A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a pour valeurs propres 0 et 2, elle est donc positive. On a donc bien $0 \leqslant A \leqslant B$.
Un calcul simple donne $B^2 - A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.
Ses valeurs propres sont $\lambda_1 = 3 - \sqrt{10} < 0$ et $\lambda_2 = 3 + \sqrt{10} > 0$. Elle n'est donc pas positive et par conséquent l'inégalité $A^2 \leqslant B^2$ est fausse.

2. Si on revient à l'exemple des deux matrices A et B données dans la question 1, on observe que $\mathrm{tr}(A^2) = 1 \leqslant \mathrm{tr}(B^2) = 7$.

3. Soient A une matrice positive de $\mathcal{M}_n$ et P une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n$. Il est clair que la matrice ${}^tPAP$ est symétrique et on a $\langle {}^tPAPu, u\rangle = \langle A(Pu), (Pu)\rangle \geqslant 0$ puisque A est positive.
Le rappel fait montre que $\mathrm{tr}({}^tPAP) = \mathrm{tr}(AP^tP) = \mathrm{tr}(A)$ puisque $P^tP = I$. Comme la matrice de passage entre deux bases orthonormales est orthogonale, on obtient immédiatement avec l'égalité précédente $\mathrm{tr}(A) = \sum_{k=1}^{n} \langle Ae_k, e_k\rangle$ pour toute base orthonormale $(e_k)_{k=1,\ldots,n}$ de $\mathbb{R}^n$.

4. L'existence d'une base orthonormale $(e_k)_{k=1,\ldots,n}$ de vecteurs propres de A est une conséquence directe du cours puisque A est symétrique réelle.
Avec la question 3, on voit que :

$$\mathrm{tr}(AB) = \sum_{k=1}^{n} \langle ABe_k, e_k\rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle Be_k, Ae_k\rangle = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle Be_k, e_k\rangle \geqslant 0$$

car les valeurs propres λ_k de A sont positives et les produits scalaires $\langle Be_k, e_k\rangle$ sont positifs puisque B est positive.

5. a) Comme $B - A$ est positive, on a d'après la question précédente :

$$0 \leqslant \mathrm{tr}((A - B)C) = \mathrm{tr}(AC) - \mathrm{tr}(BC)$$

ce qui donne bien l'inégalité souhaitée.

b) De manière analogue, on montre que $\mathrm{tr}(BC) \leqslant \mathrm{tr}(BD)$ et en récapitulant on obtient bien $\mathrm{tr}(AC) \leqslant \mathrm{tr}(BD)$. En posant $C = A$ et $D = B$, on trouve $\mathrm{tr}(A^2) \leqslant \mathrm{tr}(B^2)$ pour tout couple de matrices positives (A, B) vérifiant $0 \leqslant A \leqslant B$.

Exercice 2.06.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, note E_n le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions réelles de classe C^n sur $[0, 1]$ et E_0 le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions réelles continues sur $[0, 1]$.

On note N_2 l'ensemble des fonctions f de E_2 vérifiant $f(0) = f(1) = 0$.

On considère l'application u définie sur N_2 par $\forall\, f \in N_2, u(f) = f''$.

1. Montrer que u est une application linéaire injective de N_2 dans E_0.

2. Soit $g \in E_0$. Pour tout $x \in [0,1]$, on pose $G(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 |x-t|g(t)\,dt$.

a) Montrer que $G \in E_2$ et exprimer G'' en fonction de g.

b) Montrer que u réalise un isomorphisme de N_2 sur E_0.

c) On note u^{-1} la bijection réciproque de u. Vérifier que pour tout x de $[0,1]$:

$$u^{-1}(g)(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 |x-t|g(t)\,dt - \frac{1}{2}\int_0^1 tg(t)dt - \frac{x}{2}\int_0^1 (1-2t)g(t)\,dt$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note P_n l'espace vectoriel des fonctions polynomiales réelles de degré inférieur ou égal à n. On note N_n le sous-espace vectoriel de P_n constitué des fonctions polynomiales $P \in P_n$ vérifiant $P(0) = P(1) = 0$.

Pour tout entier naturel k et tout réel x, on pose $e_k(x) = x^k$ et $f_k(x) = x^{k+1}(x-1)$.
On note $\mathcal{B} = (e_0, e_1, \ldots, e_n)$.
On considère enfin l'application linéaire v définie par

$$v(P) = P''$$

a) Montrer que $\mathcal{C} = (f_0, f_1, \ldots, f_n)$ est une base de N_{n+2}.

b) Écrire la matrice A de v relativement aux bases $\mathcal{C}$ et $\mathcal{B}$. Montrer que A est inversible.

c) Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $k \in \mathbb{N}$. Simplifier la somme $\sum_{j=0}^{k} f_j(x)$.

d) Expliciter l'inverse de A.

Solution :

1. On commence par remarquer que u est une application linéaire.
Si $f \in N_2$, f'' est continue sur $[0,1]$, donc $u(f) = f'' \in E_0$.
Soit $f \in \ker(u)$. Alors, $f'' = 0$. Il existe donc deux constantes a et b telles que pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) = ax + b$. Comme $f(0) = f(1) = 0$, on trouve $a = b = 0$. Donc, u est injective.

2. a) Pour tout $x \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} G(x) &= \frac{1}{2}\Big(\int_0^x (x-t)g(t)dt + \int_x^1 (t-x)g(t)dt\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(x\int_0^x g(t)dt - \int_0^x tg(t)dt - \int_1^x tg(t)dt + x\int_1^x g(t)dt\Big) \end{aligned}$$

Sous cette forme, on voit que la fonction G est dérivable sur $[0,1]$ et pour tout $x \in [0,1]$:

$$G'(x) = \frac{1}{2}(xg(x) + \int_0^x g(t)dt - xg(x) - xg(x) + xg(x) + \int_1^x g(t)dt)$$
$$= \frac{1}{2}(\int_0^x g(t)dt + \int_1^x g(t)dt)$$

Ainsi G' est dérivable sur $[0,1]$ et, pour tout $x \in [0,1]$, $G''(x) = g(x)$, fonction qui est, par définition, continue sur $[0,1]$. En conclusion, $G \in E_2$ et $G'' = g$.

b) Soit $g \in E_0$. On cherche un antécédent H à g dans N_2.
Posons $H : x \to G(x) + ax + b$, où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
On remarque que $u(H) = H'' = G'' = g$.
Reste à déterminer a et b pour que H soit dans N_2. Comme G est dans E_2, H est aussi dans E_2. Reste à fixer a et b pour avoir $H(0) = H(1) = 0$, ce qui équivaut à $\frac{1}{2}\int_0^1 tg(t)dt + b = 0$ et $\frac{1}{2}\int_0^1 (1-t)g(t)dt + a + b = 0$.
On trouve $a = \frac{1}{2}\int_0^1 (2t-1)g(t)dt$ et $b = -\frac{1}{2}\int_0^1 tg(t)dt$.
Avec ce choix de a et b, on obtient donc une fonction $H \in N_2$ telle que $g = u(H)$. L'application linéaire u, dont nous avons déjà montré l'injectivité, est ainsi surjective et u réalise un isomorphisme de N_2 sur E_0.

c) Soit $g \in E_0$. D'après la question précédente, pour tout $x \in [0,1]$,
$u^{-1}(g)(x) = G(x) + ax + b$ avec $a = \frac{1}{2}\int_0^1 (2t-1)g(t)dt$ et $b = -\frac{1}{2}\int_0^1 tg(t)dt$.

3. a) On commence par remarquer que les fonctions f_i appartiennent à N_{n+2}.
Comme la famille $\mathcal{C}$ est une famille de polynômes à degrés échelonnés, c'est une famille libre.
Soit $P \in N_{n+2}$, P admet alors 0 et 1 comme racines, ce qui implique qu'il existe un polynôme $Q \in P_n$ tel que pour tout $x \in [0,1]$ $P(x) = x(x-1)Q(x)$.
En écrivant $Q(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, on obtient $P = \sum_{k=0}^{n} a_k f_k$, ce qui montre que la famille $\mathcal{C}$ est également génératrice de N_{n+2}.

b) On a $v(f_0) = 2e_0$ et pour tout $k \in [\![1,n]\!]$,
$v(f_k) = (k+2)(k+1)e_k - (k+1)ke_{k-1}$. D'où la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 6 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -k(k+1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & (k+1)(k+2) & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & -n(n+1) \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & (n+1)(n+2) \end{pmatrix}$$

La matrice A est une matrice triangulaire supérieure sans 0 sur la diagonale. Donc A est inversible.

c) Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{j=0}^{k} f_j(x) = \sum_{j=0}^{k} (x^{j+2} - x^{j+1}) = x^{k+2} - x$.

d) On applique les résultats trouvés dans la question 2(c). Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$,

$$u^{-1}(e_k)(x) = \frac{1}{2}\int_0^x (x-t)t^k dt + \frac{1}{2}\int_x^1 (t-x)t^k dt$$
$$- \frac{1}{2}\int_0^1 t^{k+1} dt - \frac{x}{2}\int_0^1 (1-2t)t^k dt.$$

Après calculs, $u^{-1}(e_k)(x) = \dfrac{x^{k+2} - x^k}{(k+1)(k+2)} = \dfrac{1}{(k+1)(k+2)} \sum_{j=0}^{k} f_j(x)$.

D'où : $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \dots & \frac{1}{n(n+1)} & \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ 0 & \frac{1}{6} & \dots & \frac{1}{n(n+1)} & \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{n(n+1)} & \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{(n+1)(n+2)} \end{pmatrix}$

Exercice 2.07.

Soit f un endomorphisme non nul d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension 3, tel que :

$$f^3 + f = 0.$$

On admet que f possède au moins une valeur propre réelle.

1. Montrer que $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Ker}(f^2 + id)$.

2. Montrer que $\dim \operatorname{Ker}(f^2 + id) \geqslant 1$. Soit $x \in \operatorname{Ker}(f^2 + id)$, $x \neq 0$; montrer que $(x, f(x))$ est une famille libre de $\operatorname{Ker}(f^2 + id)$.

3. Déterminer les valeurs propres de f et les dimensions des sous-espaces propres associés. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

4. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Résoudre l'équation $u^2 = f$, où l'inconnue u est un endomorphisme de E.

Solution :

1. Montrons que tout $x \in E$ s'écrit de manière unique $x = y + z$, avec $(y, z) \in \operatorname{Ker} f \times \operatorname{Ker}(f^2 + id)$ par analyse/synthèse.
Si x possède une telle écriture alors :

$$f^2(x) = f^2(y) + f^2(z) = -z \text{ car } y \in \operatorname{Ker} f \text{ et } z \in \operatorname{Ker}(f^2 + id).$$

donc $z = -f^2(x)$ et $y = x + f^2(x)$.
Réciproquement, tout x s'écrit clairement sous la forme : $x = y + z$ avec $z = -f^2(x)$ et $y = x + f^2(x)$ et on a :

$$(f^2 + id)(z) = (-f^4 - f^2)(x) = -f(f^3 + f(x)) = 0 \implies z \in \operatorname{Ker}(f^2 + id)$$

et

$$f(y) = f(x + f^2(x)) = f^3 + f(x) = 0 \implies y \in \operatorname{Ker} f.$$

2. Par l'absurde si $\dim \operatorname{Ker}(f^2 + id) = 0$, alors $f^2 + id$ est injectif, donc bijectif (dimension finie). En composant la relation $f^3 + f = (f^2 + id) \circ f = 0$ par $(f^2 + id)^{-1}$ on a donc $f = 0$ ce qui est contraire aux hypothèses.

Le vecteur x appartient à $\operatorname{Ker}(f^2 + id)$ par hypothèse ; le vecteur $f(x)$ appartient à $\operatorname{Ker}(f^2 + id)$ d'après la relation $f^3 + f = 0$. Si $\lambda x + \mu f(x) = 0$, en appliquant f, on a $\lambda f(x) - \mu x = 0$ d'où, par opérations : $(\lambda^2 + \mu^2)x = 0$, d'où $\lambda = \mu = 0$ car $x \neq 0$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

3. Comme $X^3 + X$ est un polynôme annulateur de f qui a pour seule racine réelle 0 et que, par hypothèse, f admet une valeur propre, alors $\lambda = 0$ est la seule valeur propre de f.

En particulier $\operatorname{Ker} f$ est de dimension au moins 1 ; d'après la question 1 on a donc $\dim \operatorname{Ker}(f^2 + id) = \dim(E) - \dim \operatorname{Ker} f \leqslant 2$. D'après la question précédente $\dim \operatorname{Ker}(f^2 + id) \geqslant 2$ puisque cet espace possède une famille libre de deux vecteurs. Donc $\dim \operatorname{Ker}(f^2 + id) = 2$ et $\dim \operatorname{Ker} f = 1$.

0 est la seule valeur propre de f et f n'est pas l'endomorphisme nul, donc f n'est pas diagonalisable.

4. On prend e_1 une base de $\operatorname{Ker} f$ et une base de $\operatorname{Ker}(f^2 + id)$ formée de $e_2 \neq 0$ et $e_3 = f(e_2)$.
Si u vérifie $u^2 = f$, alors $u \circ f = u^3 = f \circ u$. On en déduit que $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Ker}(f^2 + id)$ sont stables par u, donc la matrice de u dans la base e_1, e_2, e_3 est de la forme :

$$U = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}.$$

5. On a : $U^2 = A \iff \begin{cases} \lambda^2 = 0 \\ a^2 + bc = 0 \\ ad + bd = -1 \\ ac + cd = 1 \\ bc + d^2 = 0 \end{cases}$.

Donc $\lambda = 0$ et on trouve $U = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2.08.

On note E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et telles que pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, la dérivée $k^{\text{ème}}$ de f, notée $f^{(k)}$, est bornée sur $\mathbb{R}$.

On définit une application u sur E en posant :

$$u(f) = f + f'$$

Pour tout $f \in E$, on pose $||f||_\infty = \sup\{|f(x)|, x \in \mathbb{R}\}$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel et que u est un endomorphisme de E.

2. Pour $g \in E$, on pose $G(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-v} g(x - v)dv$.

a) Déterminer le domaine de définition de la fonction G.

b) Montrer que la fonction G est bornée sur son domaine de définition.

c) Montrer que la fonction G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et trouver une relation entre G, G' et g. Conclure que G est dans E.

3. a) Montrer que 1 est valeur propre de u.

b) Déterminer le spectre de u. Préciser les sous-espaces propres de u.

4. a) Montrer que u est un automorphisme de E.

b) On note u^{-1} la bijection réciproque de u. Montrer que pour tout $f \in E$,

$$||u^{-1}(f)||_\infty \leqslant ||f||_\infty.$$

5. Soit $g \in E$ une fonction donnée. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une seule fonction $f \in E$ telle que :

$$g = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}.$$

Solution :

1. On montre facilement que E est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. La linéarité de u provient de la

linéarité de la dérivation. De plus, pour tout $f \in E$, $u(f)$ est dans E car pour tout entier k,
$|u(f)^{(k)}| = |f^{(k)} + f^{(k+1)}| \leqslant |f^{(k)}| + |f^{(k+1)}|$, quantité qui est bornée par hypothèse. Ainsi, u est un endomorphisme de E.

2. a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $v \in \mathbb{R}^+$, $|\mathrm{e}^{-v} g(x-v)| \leqslant ||g||_\infty \mathrm{e}^{-v}$. Or, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-v} dv$ converge. Par comparaison, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-v} g(x-v) dv$ est absolument convergente, donc convergente.
Ainsi, la fonction G est définie sur $\mathbb{R}$.

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|G(x)| \leqslant ||g||_\infty \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-v} dv = ||g||_\infty$. La fonction G est donc bornée sur $\mathbb{R}$.

c) On commence par effectuer dans G le changement de variable $t = x - v$. On obtient alors

$$G(x) = \mathrm{e}^{-x} \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{t} g(t) dt + \mathrm{e}^{-x} \int_0^x \mathrm{e}^{t} g(t) dt.$$

Par conséquent G est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $\forall\, x \in \mathbb{R}$:

$$G'(x) = \mathrm{e}^{-x} \Big(- \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{t} g(t) dt + \mathrm{e}^{x} g(x) \Big) = -G(x) + g(x).$$

On a donc $G' = -G + g$.
La question précédente a prouvé que G est bornée sur $\mathbb{R}$. On montre ensuite par récurrence sur k que pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, $G^{(k-1)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $G^{(k)} = -G^{(k-1)} + g^{(k-1)}$ est bornée sur $\mathbb{R}$. En conclusion, la fonction G est dans E.

3. a) Soit f une fonction constante non nulle. On a bien $f \in E$ et $u(f) = f + f' = f$. Le réel 1 est donc valeur propre de u.

b) Le réel λ est dans le spectre de u si et seulement si il existe une fonction $f \in E \setminus \{0\}$ telle que $u(f) = f + f' = \lambda f$.
On a donc $f' + (1-\lambda) f = 0$. Il existe ainsi un réel k non nul tel que pour tout réel x, $f(x) = k\mathrm{e}^{(\lambda-1)x}$. Supposons d'abord que $k > 0$. Si $\lambda > 1$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, ce qui contredit le fait que f est bornée sur $\mathbb{R}$.
Si $\lambda < 1$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, ce qui aboutit à la même contradiction.
Donc, $\lambda = 1$. De même si $k < 0$. On en déduit que le spectre de u est contenu dans $\{1\}$. Comme la question précédente a montré que 1 est valeur propre de u, on obtient $\mathrm{Sp}(u) = \{1\}$. On remarque au passage que le sous-espace propre associé à 1 est l'ensemble des fonctions constantes.

4. a) Le fait que 0 ne soit pas une valeur propre de u montre déjà que $\mathrm{Ker}(u) = \{0\}$, donc que u est injectif. Il reste à montrer que u est surjectif

(l'espace n'est pas de dimension finie).
Soit $g \in E$. La question 2. a montré que la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-v} g(x-v)dv$ est dans E et vérife $u(G) = G + G' = g$. Ceci montre que u est surjectif. Ainsi u est un automorphisme de E.

b) La question précédente montre que $u^{-1} : g \to G$, où G est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-v} g(x-v)dv$.

Pour tout $g \in E$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $|u^{-1}(g)(x)| \leqslant ||g||_\infty \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-v} dv = ||g||_\infty$, d'où $||u^{-1}(g)||_\infty \leqslant ||g||_\infty$.

5. Notons D l'endomorphisme défini sur E par $D : f \to f'$. On a donc $u = id_E + D$. Comme id_E et D commutent, on peut appliquer la formule du binôme de Newton et écrire :
pour tout entier k, $u^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^k$.
Comme u est bijectif, u^k l'est aussi. Ainsi, pour tout $g \in E$, il existe une seule fonction $f \in E$ telle que $g = u^k(f) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}$.

Exercice 2.09.

On considère l'espace vectoriel $E = C^0[0,1]$ des fonctions à valeurs réelles définies et continues sur l'intervalle $[0,1]$. Pour f et g appartenant à E, on pose

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

1. Vérifier que l'application qui à $(f,g) \in E^2$ associe $\langle f, g \rangle$ définit un produit scalaire sur E.

2. Soient f et g deux fonctions de E.

a) Montrer qu'il existe un réel a et une fonction h dans E qui est orthogonale à g et telle que $f = ag + h$.

b) En déduire que si $|\langle f, g \rangle| = \|f\| \, \|g\|$, alors f et g sont colinéaires.

3. Soit $v_0 \in \mathbb{R}$. On s'intéresse maintenant à l'ensemble F des fonctions de E qui sont de classe C^2 sur $[0,1]$ et telles que : $f(0) = 0$, $f(1) = 0$ et $f'(0) = v_0$.

a) En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral, prouver que

$$v_0 = -\int_0^1 (1-t) f''(t)dt.$$

b) Montrer que $3v_0^2 \leqslant \int_0^1 f''(t)^2 dt$.

4. Montrer qu'il existe une fonction $f \in F$, que l'on déterminera, pour laquelle

$$\int_0^1 f''(t)^2 dt = \min\Big\{\int_0^1 h''(t)^2 dt, h \in F\Big\} = 3v_0^2.$$

5. Soient $(m_0, m_1, v_1) \in \mathbb{R}^3$; on désigne par G l'ensemble des fonctions de E qui sont de classe C^2 sur $[0,1]$ et telles que : $f(0) = m_0$, $f(1) = m_1$ et $f'(0) = v_1$. Trouver la valeur de la quantité suivante

$$\min\Big\{\int_0^1 h''(t)^2 dt, h \in G\Big\}.$$

Solution :

1. La bilinéarité du produit et la linéarité de l'intégration assurent que l'application considérée est bilinéaire. Elle est clairement positive et si $\langle f, f\rangle = 0$, alors la fonction positive et continue f^2 est d'intégrale nulle sur $[0,1]$, elle est donc nécessairement nulle et par suite $f = 0$. On a bien muni E d'un produit scalaire.

2. a) Le premier pas du procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, appliqué à la famille (f, g), montre qu'il existe un réel a et une fonction h dans E qui est orthogonale à g et telle que $f = ag + h$.

b) On peut supposer $g \neq 0$. En utilisant la question précédente, on voit que :

$$\|f\|\,\|g\| = |\langle f, g\rangle| = |a|\|g\|^2,$$

d'où $\|f\| = |a|\|g\|$. On en déduit que $|a|^2\|g\|^2 = \|f\|^2 = |a|^2\|g\|^2 + \|h\|^2$, et par suite $\|h\| = 0$ et $h = 0$.

3. a) La formule de Taylor avec reste intégral au point 0 et prise en $x = 1$ nous dit que

$$0 = f(1) = f(0) + f'(0) + \int_0^1 (1-t)f''(t)dt = v_0 + \int_0^1 (1-t)f''(t)dt.$$

b) L'inégalité de Cauchy-Schwarz implique alors que

$$v_0^2 \leqslant \int_0^1 (1-t)^2 dt \times \int_0^1 f''(t)^2 dt = \frac{1}{3}\int_0^1 f''(t)^2 dt.$$

4. Si une telle fonction f existe, c'est que l'on est dans le cas d'égalité pour l'inégalité de Cauchy-Schwarz ci-dessus. Avec la question 3, on voit que l'on doit chercher f telle que $f'' = a(1-t)$ (et la colinéarité implique évidemment le cas d'égalité). La fonction f est donc de la forme $f(t) = \frac{a}{6}(1-t)^3 + bt + c$ et comme f doit appartenir à F, on trouve finalement $f(t) = \frac{v_0}{2}(t-1)t(t-2)$.

5. On cherche évidemment à se ramener à F pour obtenir ce minimum. L'application :

$$f \longmapsto g : t \mapsto f(t) - m_0 + (m_0 - m_1)t$$

envoie bijectivement G sur F si l'on pose $v_0 = v_1 + m_0 - m_1$. On a donc

$$\begin{aligned}\min\{\int_0^1 f''(t)^2 dt, f \in G\} \\ &= \min\{\int_0^1 g''(t)^2 dt; g(0) = 0, g(1) = 0 \text{ et } g'(0) = v_1 + m_0 - m_1\} \\ &= 3[v_1 + m_0 - m_1]^2, \text{ d'après le résultat de la question 4.}\end{aligned}$$

Exercice 2.10.

1. Montrer l'existence de l'intégrale : $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1} dx$.

2. a) Déterminer un réel $C > 0$ tel que : $\forall\, k > 0$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\mathrm{e}^{-kx}}{\mathrm{e}^x - 1} dx \leqslant \frac{C}{k}$.

   b) Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, calculer : $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-px} dx$.

   c) En déduire que $I = \displaystyle\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2}$.

Dans la suite on désigne par E l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ dont les éléments sont les fonctions réelles φ définies et continues sur $[1, +\infty[$ telles que l'on ait : $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} \times \varphi(x) = 0$.

3. Pour $\varphi \in E$, montrer la convergence de l'intégrale : $T(\varphi) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\varphi(y)}{y} dy$.

Montrer que l'application T ainsi définie est une forme linéaire sur E.

4. Vérifier que la fonction G définie par :

$$G(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(x)}{x-1} & \text{si } x > 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

est un élément de E. Que vaut $T(G)$? (on pourra faire le changement de variable $t = \ln x$)

5. À toute fonction $\varphi \in E$ on associe la fonction : $U(\varphi) = T(\varphi).G$

Montrer que l'application U ainsi définie est un endomorphisme de E dont on précisera l'image et les éléments propres, c'est-à-dire les couples $(\lambda, \varphi) \in \mathbb{R} \times (E \setminus \{0\})$ tels que $U(\varphi) = \lambda\varphi$.

Solution :

1. La fonction $x \mapsto \dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

En $+\infty$: $0 \leqslant \dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1} \sim \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} \leqslant \dfrac{1}{x^2}$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1} = 1$. Donc $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1} dx$ converge.

2. a) On montre facilement que $\forall\, x > 0$, $\dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1} < 1$, et donc :

$$\int_0^A \frac{x\mathrm{e}^{-kx}}{\mathrm{e}^x - 1} dx \leqslant \int_0^A \mathrm{e}^{-kx} dx = \frac{1}{k}[1 - \mathrm{e}^{-Ak}] \leqslant \frac{1}{k}$$

Et, par prolongement des inégalités à la limite, on peut prendre $C = 1$.

b) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. En intégrant par parties on obtient :

$\displaystyle\int_0^A x\mathrm{e}^{-px} dx = -\frac{A\mathrm{e}^{-pA}}{p} - \left(\frac{\mathrm{e}^{-pA}}{p^2} - \frac{1}{p^2}\right)$, et :

$$\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-px} dx = \frac{1}{p^2}$$

c) Soit $x > 0$, par l'identité géométrique : $\dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1} = \displaystyle\sum_{p=1}^{k} x\mathrm{e}^{-px} + \frac{xe^{-kx}}{\mathrm{e}^x - 1}$

Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1} dx = \sum_{p=1}^{k} \int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-px} dx + \int_0^{+\infty} \frac{x\mathrm{e}^{-kx}}{\mathrm{e}^x - 1} dx$

et $I = \displaystyle\sum_{p=1}^{k} \frac{1}{p^2} + \int_0^{+\infty} \frac{x\mathrm{e}^{-kx}}{\mathrm{e}^x - 1} dx$ donne $|I - \displaystyle\sum_{p=1}^{k} \frac{1}{p^2}| = \int_0^{+\infty} \frac{x\mathrm{e}^{-kx}}{\mathrm{e}^x - 1} dx \leqslant \frac{1}{k}$

On en déduit, en passant à la limite $I = \displaystyle\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2}$ $\left(= \dfrac{\pi^2}{6}\right)$

3. Soit $\varphi \in E$. Alors $y \mapsto \dfrac{\varphi(y)}{y}$ est continue sur $[1, +\infty[$, et

$$\lim_{y\to+\infty} y^{\frac{3}{2}} \frac{\varphi(y)}{y} = \lim_{y\to+\infty} \sqrt{y}\varphi(y) = 0$$

donc $y^{\frac{3}{2}} \dfrac{\varphi(y)}{y} < 1$ pour y assez grand, d'où la convergence absolue de l'intégrale par comparaison Riemannienne.

D'autre part : $\forall\, \varphi_1, \varphi_2 \in E, \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$:

$$T(\lambda\varphi_1 + \varphi_2) = \lambda \int_1^{+\infty} \frac{\varphi_1(y)}{y} dy + \int_1^{+\infty} \frac{\varphi_2(y)}{y} dy = \lambda.T(\varphi_1) + T(\varphi_2)$$

L'application T est donc une forme linéaire sur E.

4. La fonction G est continue sur $[1, +\infty[$ (car $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\ln(x)}{x-1} = 1$) et est telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}G(x) = 0$ donc $G \in E$. On a, grâce au changement de variable $t = \ln x$:

$$T(G) = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x(x-1)} dx = \int_0^{+\infty} \frac{t}{\mathrm{e}^t - 1} dt = I$$

5. $\star$ $G \in E \implies U(\varphi) = T(\varphi)G \in E$
$\star$ $U(\lambda\varphi_1 + \varphi_2) = T(\lambda\varphi_1 + \varphi_2).G = \lambda T(\varphi_1).G + T(\varphi_2).G = \lambda.U(\varphi_1) + U(\varphi_2)$
Donc U est un endomorphisme de E.

$\star$ $\mathrm{Im}(U) \subset \mathrm{Vect}(G)$ et $U(G) = T(G)G = I.G \implies \mathrm{Vect}(G) \subset \mathrm{Im}(U)$. D'où : $\mathrm{Im}(U) = \mathrm{Vect}(G)$

$\star$ Soit φ un vecteur propre associé à la valeur propre λ :
$U(\varphi) = \lambda.\varphi \implies T(\varphi)G = \lambda.\varphi \implies T(\varphi)U(G) = \lambda.U(\varphi)$
$\implies T(\varphi)T(G)G = \lambda T(\varphi).G \implies T(\varphi)[T(G) - \lambda]G = 0$
Ainsi : $\lambda = T(G) = I$ et $E_I = \mathrm{Vect}(G)$, ou $T(\varphi) = 0$ et $E_0 = \mathrm{Ker}(U) = \mathrm{Ker}(T)$.

Exercice 2.11.

Soit un entier $n \geqslant 2$ et E l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n.
Soit u l'application qui à tout polynôme $P \in E$ associe le polynôme Q défini par $Q(X) = P\big(\frac{X+1}{2}\big)$.

1. a) Montrer que u est un endomorphisme de E.

b) Déterminer les valeurs propres de u. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

c) Montrer que la famille $((X-1)^k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de E. Déterminer les sous-espaces propres de u.

2. Soit F l'espace vectoriel des fonctions réelles infiniment dérivables sur $\mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\varphi(x) = \frac{x+1}{2}$.

a) Exprimer $\varphi^n(x)$ en fonction de n, où φ^n désigne la $n^{\text{ème}}$ composée de φ avec elle-même.

b) Pour λ réel, on pose $F_\lambda = \{f \in F / f \circ \varphi = \lambda f\}$.

Montrer que pour tout $f \in F_\lambda$, la suite $(f \circ \varphi^n)_n$ est convergente.

c) En déduire que si $|\lambda| > 1$ ou si $\lambda = -1$, on a : $F_\lambda = \{0\}$. De même pour F_0.

d) Montrer que si $f \in F_\lambda$, alors $f^{(k)} \in F_{2^k\lambda}$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. En déduire F_λ.

Solution :

1. a) L'application u est manifestement linéaire et préserve le degré de P : c'est un endomorphisme de E.

b) On remarque que $u(1) = 1$ et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,

$$u(X^k) = \big(\frac{X+1}{2}\big)^k = \frac{1}{2^k}X^k + \cdots.$$

Ainsi la matrice associée à u dans la base canonique de E est-elle triangulaire supérieure, avec sur sa diagonale $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2^n}$. Ce sont les valeurs propres de u qui est diagonalisable car admettant $n+1$ valeurs propres distinctes.

c) On a $u((X-1)^k) = \frac{1}{2^k}(X-1)^k$; le sous-espace propre associé à $\frac{1}{2^k}$, qui est une droite, est ainsi engendré par $(X-1)^k$.

2. a) On montre par récurrence que $\varphi^n(x) = \frac{x}{2^n} + 1 - \frac{1}{2^n}$ (arithmético-géométrie).

b) Soit f telle que $f \circ \varphi = \lambda f$. Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f \circ \varphi^n = \lambda^n f$, soit :

$$f\big(\frac{x}{2^n} + 1 - \frac{1}{2^n}\big) = \lambda^n f(x)$$

La fonction f étant continue : $\lim\limits_{n\to+\infty} f\big(\frac{x}{2^n} + 1 - \frac{1}{2^n}\big) = f(1)$.

c) Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda^n f(x) = f(1)$. Ceci n'est pas possible si $|\lambda| > 1$, ou si $\lambda = -1$ et si x est tel que $f(x) \neq 0$. Si $\lambda = 0$, on a $f\big(\frac{x+1}{2}\big) = 0$, soit $f(t) = 0$ pour tout t réel. Donc pour avoir $F_\lambda \neq \{0\}$, il faut avoir $\lambda \in]-1, 1] \setminus \{0\}$

d) Supposons $f \circ \varphi = \lambda f$. Les fonctions en jeu étant de classe C^∞, il vient, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\frac{1}{2^n} f^{(n)} \circ \varphi = \lambda f^{(n)}$.

Ainsi $f^{(n)} \in F_{2^n\lambda}$. Or, pour $\lambda \neq 0$, pour p assez grand, on a : $2^p|\lambda| > 1$. Ainsi pour p assez grand $f^{(p)} = 0$ et f est polynomiale. On est ramené à la première question (si P est une fonction polynôme, on choisit n assez grand pour que E contienne le polynôme P associé).

Les F_λ différents de $\{0\}$ sont les $F_{1/2^n}$, pour $n \in \mathbb{N}$ et chaque $F_{1/2^n}$ est de dimension 1, engendré par $x \mapsto (x-1)^n$.

Exercice 2.12.

1. Soit f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, vérifiant la propriété suivante :

$$\lim_{||x||\to+\infty} f(x) = +\infty$$

où $||\ ||$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.

a) Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $||x|| > M$, on a : $f(x) > |f(0)| + 1$.

b) En déduire qu'il existe $x^* \in \mathbb{R}^n$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $f(x^*) \leqslant f(x)$.

c) On suppose de plus que $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Montrer que $\nabla f(x^*) = 0$.

On s'intéresse dans la suite de l'exercice à la fonction f définie sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs réelles donnée par

$$f(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle$$

où A est une matrice symétrique réelle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et b un vecteur de $\mathbb{R}^n$. On suppose également que la matrice A vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \langle Ax, x\rangle \geqslant C||x||^2$$

où C est une constante strictement positive.

2. a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^n$ et vérifie $\lim\limits_{||x||\to+\infty} f(x) = +\infty$.

b) Montrer que f appartient à $C^1(\mathbb{R}^n)$ et que $\nabla f(x) = Ax - b$.

En déduire que f admet un minimum global sur $\mathbb{R}^n$, atteint en un point noté x^*.

3. Soit α un réel strictement positif et soit $(u_p)_{p\geq 0}$ la suite vectorielle définie par $u_0 \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $p \geqslant 0$

$$u_{p+1} = u_p - \alpha\nabla f(u_p)$$

a) Montrer que pour tout $p \geqslant 0$, $u_{p+1} - x^* = (I_n - \alpha A)(u_p - x^*)$.

b) Soit λ la plus grande valeur propre de A. On suppose que $\alpha \in]0, 2/\lambda[$. Montrer que la suite $(u_p)_p$ converge vers x^*, c'est-à-dire que $\lim\limits_{p\to+\infty} ||u_p - x^*|| = 0$.

Solution :

1. a) Comme $\lim\limits_{||x||\to+\infty} f(x) = +\infty$, il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $||x|| > M$, on a : $f(x) > |f(0)| + 1$.

b) La boule $\overline{B}(0, M)$ est fermée bornée. La fonction f restreinte à $\overline{B}(0, M)$ est continue : elle est donc minorée et atteint son min : il existe $x^* \in \overline{B}(0, M)$ tel que $f(x^*) \leqslant f(x)$ pour tout $x \in \overline{B}(0, M)$. En particulier $f(x^*) \leqslant f(0)$. Par la question précédente, f admet en x^* un minimum global sur $\mathbb{R}^n$.

c) Lorsque f est de classe C^1 sur l'ouvert $\mathbb{R}^n$, on sait que les extremums possibles (locaux ou globaux) ne peuvent être atteints qu'aux points critiques.

2. a) La fonction f est continue car c'est un polynôme en $(x_1, \ldots, x_n)$. En effet :

$$f(x) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_ix_j - \sum_{i=1}^{n} b_ix_i$$

De plus $\forall\, x \in \mathbb{R}^n, \langle Ax, x\rangle \geqslant C||x||^2$ et $\langle b, x\rangle \leqslant \|b\|\|x\|$ entraînent que $\lim\limits_{||x||\to+\infty} f(x) = +\infty$.

b) Le calcul donne, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \frac{1}{2}\times 2\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}x_k - b_i$$

Ainsi : $\nabla f(x) = \Big(\sum\limits_{k=1}^{n} a_{1,k}x_k - b_1, \ldots, \sum\limits_{k=1}^{n} a_{n,k}x_k - b_n\Big) = Ax - b$

On aurait aussi pu chercher directement le DL à l'ordre 1 :

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= \frac{1}{2}(\langle Ah, x\rangle + \langle Ax, h\rangle) + \frac{1}{2}\langle Ah, h\rangle - \langle b, h\rangle \\ &= \langle Ax - b, h\rangle + \frac{1}{2}\langle Ah, h\rangle \end{aligned}$$

Et on a : $|\langle Ah, h\rangle| \leqslant C||h||^2$ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

On en déduit que f admet un minimum global atteint en un point critique qui est x^* par la question précédente.

On remarquera que la matrice A est inversible, puisque si (λ, x) est un couple propre de A, on a : $\lambda||x||^2 = \langle Ax, x\rangle \geqslant C||x||^2$, donc $\lambda \neq 0$.

3. a) Le vecteur x^* vérifie $\nabla f(x^*) = Ax^* - b = 0$. Ainsi

$$u_{p+1} = u_p - \alpha(Au_p - b) = (I - \alpha A)u_p + \alpha b$$

et

$$\begin{aligned} u_{p+1} - x^* &= (I - \alpha A)u_p + \alpha b - x^* = (I - \alpha A)u_p + (\alpha A - I)x^* \\ &= (I - \alpha A)(u_p - x^*) \end{aligned}$$

b) Par une récurrence immédiate, pour tout $p \geqslant 1$, $u_p - x^* = (I - \alpha A)^p(u_0 - x^*)$.

La matrice $I - \alpha A$ est symétrique réelle et donc diagonalisable *via* une base orthonormée de vecteurs propres. Ses valeurs propres sont $1 - \alpha\lambda_i$, avec λ_i valeur propre de A. or

$$|1 - \alpha\lambda_i| < 1 \Longleftrightarrow 0 < \alpha\lambda_i < 2$$

ce qui est l'hypothèse faite sur α. Donc $\lim\limits_{p\to+\infty}(I - \alpha A)^p(u_0 - x^*) = 0$ (en se plaçant dans une base de diagonalisation).

Exercice 2.13.

Soit E et F deux espaces euclidiens et f un élément de $\mathcal{L}(E, F)$.

1. a) Montrer que $\dim(\operatorname{Ker} f)^\perp = \dim \operatorname{Im} f$.

b) Montrer que $\dim(f((\operatorname{Ker} f)^\perp)) = \dim((\operatorname{Ker} f)^\perp)$ puis que

$$F = f((\operatorname{Ker} f)^\perp) \oplus (\operatorname{Im} f)^\perp$$

c) En déduire l'existence d'une application de F vers E qui a $y \in F$ fait correspondre $x \in E$ défini par :

$$y = f(x) + y', (x, y') \in (\operatorname{Ker} f)^\perp \times (\operatorname{Im} f)^\perp.$$

On note g l'application ainsi définie.

d) Montrer que l'application g est linéaire. Déterminer son noyau et son image.

2. Montrer que $g \circ f$ est le projecteur orthogonal de E sur $(\operatorname{Ker} f)^\perp$.

3. Montrer que $f \circ g$ est le projecteur orthogonal de F sur $\operatorname{Im} f$.

4. Pour $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \mathbb{R}^2$ munis de leurs produits scalaires usuels, la matrice d'une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ dans les bases canoniques, est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer la matrice de g relativement aux bases canoniques.

Solution :

1. a) Comme $\dim(\operatorname{Ker} f)^\perp = \dim E - \dim \operatorname{Ker} f$, il s'agit simplement du théorème du rang.

b) $f[(\operatorname{Ker} f)^\perp] \cap (\operatorname{Im} f)^\perp \subset (\operatorname{Im} f) \cap (\operatorname{Im} f)^\perp = \{0_F\}$.

Puis :

$$\begin{aligned} \dim(\operatorname{Im} f)^\perp &= \dim F - \dim(\operatorname{Im} f) = \dim F - (\dim E - \dim(\operatorname{Ker} f)) \\ &= \dim F - \dim(\operatorname{Ker} f)^\perp = \dim F - \dim[f(\operatorname{Ker} f)^\perp], \text{ donc} \end{aligned}$$

$$F = f((\operatorname{Ker} f)^\perp) \oplus (\operatorname{Im} f)^\perp$$

c) Pour tout y de F, il existe un couple unique (y_1, y') dans $f((\operatorname{Ker} f)^\perp) \times (\operatorname{Im} f)^\perp$ tel que : $y = y_1 + y'$. La restriction de f à $(\operatorname{Ker} f)^\perp$ étant bijective de cet espace sur son image, il existe un seul $x \in (\operatorname{Ker} f)^\perp$ tel que : $y_1 = f(x)$. On définit ainsi une application de F vers E qui à $y \in F$ fait correspondre $x \in E$.

d) Soient $y_1, y_2 \in F$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} y_1 = f(x_1) + y'_1 \\ y_2 = f(x_2) + y'_2 \end{cases} \implies \lambda y_1 + \mu y_2 = f(\lambda x_1 + \mu x_2) + (\lambda y'_1 + \mu y'_2)$$

$$\begin{cases} y_1 = f(x_1) + y'_1 \\ y_2 = f(x_2) + y'_2 \end{cases} \implies g(\lambda y_1 + \mu y_2) = \lambda x_1 + \mu x_2 = \lambda g(x_1) + \mu g(x_2),$$

donc g est linéaire.

2. On montre que $\operatorname{Ker}(g) = (\operatorname{Im} f)^\perp$:

$\star$ $g(y) = 0 \implies x = 0 \implies y = f(0) + y' = y' \in (\operatorname{Im} f)^\perp$.

$\star$ Réciproquement, $y \in (\operatorname{Im} f)^\perp \implies y = 0_F + y \implies g(y) = 0$

On montre que $\mathrm{Im}(g) = (\mathrm{Ker}\, f)^\perp$:

$\star$ Par définition $\mathrm{Im}(g) \subset (\mathrm{Ker}\, f)^\perp$.

$\star$ Réciproquement, $x \in (\mathrm{Ker}\, f)^\perp \implies f(x) = f(x) + 0_F \implies x = g[f(x)]$.

Et $x \in (\mathrm{Ker}\, f)^\perp \implies f(x) = f(x) + 0_F \implies x = g[f(x)]$
$x \in \mathrm{Ker}\, f \implies f(x) = 0_F \implies g \circ f(x) = 0_E$
donc :

$$g \circ f \text{ est le projecteur orthogonal de } E \text{ sur } (\mathrm{Ker}\, f)^\perp.$$

3. Si $y \in \mathrm{Im}\, f$, alors : $y = f[g(y)] + y' \implies y' = y - f[g(y)] \in (\mathrm{Im}\, f)^\perp \cap \mathrm{Im}\, f$
$\implies y' = 0_F \implies f \circ g(y) = y$
Si $y \in (\mathrm{Im}\, f)^\perp$ alors $y = 0_F + y = f(0_E) + y \implies g(y) = 0_F \implies f \circ g(y) = 0_E$
donc

$$f \circ g \text{ est le projecteur orthogonal de } F \text{ sur } \mathrm{Im}\, f.$$

4. On a $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Vect}\{(1,-1,1)\}$ et $(\mathrm{Ker}\, f)^\perp$ est le plan d'équation : $x - y + z = 0$.
Ainsi $\mathrm{rg}(A) = 2$ et $\mathrm{Im}\, f = \mathbb{R}^2$, donc $(\mathrm{Im}\, f)^\perp = \{(0,0)\}$.

On note $u = (1,-1,1)$.
Soit $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$; on cherche $x = (x_1, x_2, x_2) \in \mathbb{R}^3$ tel que $x = g(y)$, soit

$$\begin{cases} x \in (\mathrm{Ker}\, f)^\perp \\ y - f(x) \in (\mathrm{Im}\, f)^\perp \end{cases} \implies \begin{cases} \langle x, u\rangle = 0 \\ y = f(x) \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = x_2 + x_3 \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}(2y_1 - y_2) \\ x_2 = \frac{1}{3}(y_1 + y_2) \\ x_3 = \frac{1}{3}(-y_1 + 2y_2) \end{cases} \implies M_g = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 2.14.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$. Soit f un endomorphisme non nul de E tel que $f \neq \lambda.id$, où id est l'endomorphisme identité de E.

1. a) Montrer que f admet un polynôme annulateur unitaire de degré minimal m qu'on notera m_f et appelé polynôme minimal de f.

b) Montrer que λ est valeur propre de f si et seulement si $m_f(\lambda) = 0$.

2. On suppose que m_f n'admet aucune racine réelle.

a) Montrer que m_f est divisible par un polynôme à coefficients réels de degré 2 de la forme $X^2 + bX + c$.

b) On pose $\Phi = f^2 + b.f + c.id$. Montrer que $\mathrm{Ker}\, \Phi \neq \{0\}$.

c) En déduire qu'il existe un plan vectoriel stable par f.

3. On suppose que $m_f = (X-\lambda)^m$, où $\lambda \in \mathbb{R}$. On pose $g = f - \lambda id$.

a) Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $(g^{m-2}(x), g^{m-1}(x))$ est libre.

b) En déduire un plan stable par f.

4. Montrer que, dans tous les cas, f admet un plan stable.

Solution :

1. a) Tout endomorphisme f de E admet un polynôme annulateur, car si E est de dimension n, la famille $(id, f, f^2, \ldots, f^{n^2})$ est de cardinal n^2+1 donc de cardinal supérieur à $\dim \mathcal{L}(E)$ et est liée. Une relation de liaison détermine alors un polynôme annulateur.
Notons $\mathcal{D} = \{\deg P, P(f) = 0\}$. L'ensemble $\mathcal{D}$ est non vide inclus dans $\mathbb{N}$ donc admet un plus petit élément d, avec $d \geqslant 2$ (car $f \neq \lambda.id$). Il existe donc un polynôme annulateur de degré minimal. Quitte à diviser par son coefficient dominant, il existe m_f unitaire et annulateur de degré minimal.

b) Soit (λ, x) un couple propre de f. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^k(x) = \lambda^k x$ et $0 = m_f(f)(x) = m_f(\lambda)x$. Comme $x \neq 0$, $m_f(\lambda) = 0$.

Réciproquement, on factorise m_f sur $\mathbb{C}$ sous la forme $m_f(X) = \prod_{i=1}^{p} (X-\lambda_i)^{m_i}$.
Si λ_1 n'est pas valeur propre de f, l'endomorphisme $(f - \lambda_1 id)$ est inversible tout comme $(f-\lambda_1 id)^{m_1}$. En multipliant $m_f(f)$ par son inverse, on trouve un polynôme annulateur de f de degré strictement inférieur à celui de m_f : contradiction.

2. a) Les racines de m_f sont complexes conjuguées deux à deux et avec la même multiplicité puisque m_f est un polynôme réel. Donc si z est racine de m_f, $\overline{z}$ également et m_f se factorise par $(X-z)(X-\overline{z}) = X^2 - 2\,\text{Ré}(z)X + |z|^2$.

b) La factorisation de m_f est de la forme $\prod_{i=1}^{q} (X^2 + b_i X + c_i)^{m_i}$. Un raisonnement identique à celui de la question précédente montre que pour chaque $i \in [\![1, q]\!]$, $f^2 + b_i f + c_i id$ n'est pas inversible.

c) Soit $x \in \text{Ker}(f^2 + bf + c\, id)$. La famille $(x, f(x))$ est libre (car autrement f admettrait une valeur propre réelle, donc m_f une racine réelle), et engendre un plan stable par f car $f^2(x) = -bf(x) - cx$.

3. a) L'endomorphisme g est nilpotent puisque $0 = m_f(f) = g^m$. Comme m_f est le polynôme minimal de f, $g^{m-1} \neq 0$ et il existe $x \in E$ tel que $g^{m-1}(x) \neq 0$.
La famille $(g^{m-2}(x), g^{m-1}(x))$ est libre. En effet, en appliquant g :

$\lambda g^{m-2}(x) + \mu g^{m-1}(x) = 0 \implies \lambda g^{m-1}(x) = 0 \implies \lambda = 0 \implies \mu = 0$

b) Elle engendre un plan stable par g, donc par f puisque $f = g + \lambda id$.

4. Soit m_f le polynôme minimal de f.

- si m_f n'a aucune racine réelle, voir la question 2.
- si m_f admet une unique racine réelle α, voir question 3.
- si m_f admet une deuxième racine réelle, on prend un vecteur propre pour chaque et on obtient un plan stable.

Exercice 2.15.

Soit $N \in \mathbb{N}$, $N \geqslant 2$ et $a_0, \ldots, a_{N-1}$, des réels strictement positifs. On pose

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \ldots & a_{N-1} \\ a_{N-1} & a_0 & \ldots & a_{N-2} \\ a_{N-2} & a_{N-1} & \ldots & a_{N-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_0 \end{pmatrix} \text{ et } J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$$

1. Exprimer A en fonction des puissances de J.

2. Soit θ un réel. Soit $V = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{i\theta} \\ \mathrm{e}^{2i\theta} \\ \vdots \\ \mathrm{e}^{Ni\theta} \end{pmatrix}$.

a) Calculer J^N. En déduire les valeurs propres possibles de J.

b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur θ pour que V soit vecteur propre de J associé à la valeur propre $\mathrm{e}^{i\theta}$.

c) Montrer que la matrice J est diagonalisable dans $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$.

d) Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$. Déterminer ses valeurs propres et une base de vecteurs propres.

3. On suppose dans cette question que $\sum_{i=0}^{N-1} a_i = 1$

a) Montrer que 1 est valeur propre de A.

b) Montrer que toutes les valeurs propres complexes de A sont de module inférieur ou égal à 1.

c) Montrer que si λ est valeur propre de A et $|\lambda| = 1$, alors $\lambda = 1$.

Solution :

1. On a facilement, par décalage des vecteurs de base : $A = \sum_{k=0}^{N-1} a_k J^k$.

2. a) La matrice J est « circulante ». Il vient $J^N = I$ et les valeurs propres possibles de J sont les racines du polynôme $X^n - 1$, soit les racines $N^{\text{èmes}}$ de l'unité.

b) Le calcul montre que $JV = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2i\theta} \\ \mathrm{e}^{3i\theta} \\ \vdots \\ \mathrm{e}^{Ni\theta} \\ \mathrm{e}^{i\theta} \end{pmatrix}$.

Si JV est colinéaire à V, le coefficient de proportionnalité vaut $\mathrm{e}^{i\theta}$ et $JV = \mathrm{e}^{i\theta}V$ si et seulement si $\mathrm{e}^{i\theta} = \mathrm{e}^{i(N+1)\theta}$ ce qui équivaut à $N\theta \equiv 0[2\pi]$, *i.e.* $\theta = \dfrac{2k\pi}{N}$ avec $0 \leqslant k \leqslant N-1$.
Ainsi, V est vecteur propre de J associé à la valeur propre $\mathrm{e}^{i\theta}$ si et seulement si il existe $k \in [\![0, N-1]\!]$ tel que $\theta = \dfrac{2k\pi}{N}$.

c) On a ainsi trouvé N valeurs propres distinctes pour J, ce qui montre que J est diagonalisable.

Pour tout $k \in [\![0, N-1]\!]$, on pose $\theta_k = \dfrac{2k\pi}{N}$ et $V_k = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{i\theta_k} \\ \mathrm{e}^{2i\theta_k} \\ \vdots \\ \mathrm{e}^{Ni\theta_k} \end{pmatrix}$.

Les questions précédentes montrent que la famille $(V_k)_{0\leq k\leq N-1}$ forme une base de vecteurs propres de J.

d) De plus, pour tout $k \in [\![0, N-1]\!]$, $AV_k = \sum_{j=0}^{N-1} a_j J^j(V_k) = (\sum_{j=0}^{N-1} a_j \mathrm{e}^{ij\theta_k})V_k$

La matrice A est donc elle aussi diagonalisable dans la base de diagonalisation $(V_k)_{0\leq k\leq N-1}$ de J. De plus, $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_k\}_{0\leq k\leq N-1}$, où $\lambda_k = \sum_{j=0}^{N-1} a_j \mathrm{e}^{i\frac{2jk\pi}{N}}$.

2. a) La matrice A est donc stochastique. On sait alors que 1 est valeur propre de A associée au vecteur propre $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) On sait que $\lambda = \sum_{j=0}^{N-1} a_j \mathrm{e}^{2ij\pi/N}$. Ainsi $|\lambda| \leqslant \sum_{j=0}^{N-1} |a_j \mathrm{e}^{2ij\pi/N}| = \sum_{j=0}^{N-1} a_j = 1$.

c) On suppose que $AV = \lambda V$ et $|\lambda| = 1$. On a alors

$$|\lambda - a_0||x_k| \leqslant |x_k| \sum_{j\neq 0} |a_j| = |x_k|(1 - a_0)$$

Ainsi λ appartient au disque centré en $a_0 > 0$ et de rayon $1 - a_0$, disque intérieur au disque unité et tangent à celui-ci au point 1. Donc $\lambda = 1$.

Exercice 2.16.

Soit E l'espace vectoriel réel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, muni du produit scalaire usuel : $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_0^1 f(t)\, g(t)\, dt$.

On note φ l'application qui, à toute fonction $f \in E$ associe la fonction F définie par :

$$\forall\, x \in [0,1]\,,\, \big[\varphi(f)\big]\,(x) = F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$$

1. Vérifier que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.

2. Montrer qu'il existe une unique application $\psi \in \mathcal{L}(E)$ telle que

$$\forall\,(f,g) \in E^2\,,\, \langle \varphi(f), g\rangle = \langle f, \psi(g)\rangle$$

On note $T = \varphi \circ \psi$.

On appelle *vecteur propre* de T associé à la *valeur propre* $\lambda \in \mathbb{R}$, toute fonction $g \in E$, autre que la fonction nulle, telle que $T(g) = \lambda\, g$.
On appelle *espace propre* de T associé à la *valeur propre* $\lambda \in \mathbb{R}$, l'ensemble des fonctions $g \in E$ telles que $T(g) = \lambda\, g$.
Un réel λ est *valeur propre* de T s'il existe un vecteur propre associé à λ.

3. a) Justifier que 0 n'est pas valeur propre de T.

b) Montrer que si $g \in E$ est vecteur propre de T associé à la valeur propre $\lambda \neq 0$, alors

$$\forall\, t \in [0,1]\,,\, \lambda\, g''(t) + g(t) = 0 \quad (1)$$

4. Pour $\lambda \neq 0$, on admet que l'ensemble des fonctions *réelles* définies, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$, vérifiant (1) est un espace vectoriel réel G_λ de dimension 2.

a) Déterminer à l'aide de fonctions exponentielles $t \mapsto \mathrm{e}^{\alpha\, t}\,, \alpha \in \mathbb{C}$, une base de G_λ.

b) En déduire les valeurs propres et les vecteurs propres de T.

Solution :

1. La fonction $\varphi(f) \in \mathcal{C}^0\big([0,1], \mathbb{R}\big)$ comme primitive de fonction continue ; de plus φ est linéaire par linéarité de l'intégration.

2. Par intégration par parties de fonctions $\mathcal{C}^1$ sur un segment et $F(0) = 0$, on a, si ψ existe :

$$\int_0^1 f\, \psi(g) = \langle \varphi(f), g\rangle = \int_0^1 Fg = \big[F\, G\big]_0^1 - \int_0^1 fG = \int_0^1 f(t)[G(1) - G(t)]dt$$

On prend donc $\psi(g) : t \mapsto G(1) - G(t) = \displaystyle\int_t^1 g(u)\,du$, et la linéarité de ψ est claire.

Si ψ_1 et ψ_2 conviennent, on doit avoir $\displaystyle\int_0^1 f(\psi_1(g) - \psi_2(g)) = 0$ et ceci pour toute fonction f, donc en particulier pour $f = \psi_1(g) - \psi_2(g)$ et $(\psi_1(g) - \psi_2(g))^2$ est la fonction nulle, ceci pour tout g, *i.e.* $\psi_1 = \psi_2$ et l'unicité attendue.

3. a) On écrit :

$$T(g) = 0 \iff \forall\, x \in [0,1], \int_0^x \Big(\int_t^1 g(u)du\Big)dt = 0$$

$$\implies \forall\, x \in [0,1], \int_x^1 g(u)du = 0 \text{ (par dérivation)}$$

$\implies \forall\, x \in [0,1], -g(x) = 0$ (encore par dérivation), donc $g = 0$ et 0 n'est pas valeur propre de T.

b) Pour $\lambda \neq 0$, $T(g) = \lambda\, g$ donne $\forall\, x \in [0,1], g(x) = \frac{1}{\lambda}\displaystyle\int_0^x \Big(\int_t^1 g(u)du\Big)dt$, donc g est de classe $\mathcal{C}^2$, d'où (1) par deux dérivations comme en a).

4. a) $t \mapsto \mathrm{e}^{\alpha t}$ vérifie (1) si et seulement si $\lambda\alpha^2 + 1 = 0$.

• si $\lambda < 0$, $t \mapsto \exp\big(t/\sqrt{-\lambda}\big)$ et $t \mapsto \exp\big(-t/\sqrt{-\lambda}\big)$ forment une base de G_λ.

• si $\lambda > 0$, $t \mapsto \cos\big(t/\sqrt{\lambda}\big)$ et $t \mapsto \sin\big(t/\sqrt{\lambda}\big)$ forment une base de G_λ.

b) Si $T(g) = \lambda g$, la formule vue en 3. b) montre que $g(0) = 0$ et en dérivant que $g'(1) = 0$. Ainsi :

• si $\lambda < 0$, on voit que les conditions imposent $g(t) = 0$;

• si $\lambda > 0$, les conditions imposent $g(t) = B\sin\big(t/\sqrt{\lambda}\big)$, avec $\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}} = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{N}$ (pour réaliser $g'(1) = 0$.

On vérifie que ces fonctions sont bien propres et on conclut :
les valeurs propres de T sont $\lambda \in \Big\{\big(\frac{\pi}{2} + k\pi\big)^{-2}, k \in \mathbb{N}\Big\}$ et les vecteurs propres associés sont les applications $t \mapsto B\sin\big(t/\sqrt{\lambda}\big)$.

Exercice 2.17.

Dans cet exercice, E désigne un espace euclidien, $\langle\ ,\ \rangle$ le produit scalaire sur E et $||\ ||$ la norme euclidienne associée.

1. Soit p un projecteur orthogonal de E. Montrer que :

a) p est un endomorphisme symétrique, *i.e.* vérifie :

$$\forall\, x, y \in E, \langle p(x), y\rangle = \langle x, p(y)\rangle).$$

b) Pour tout $x \in E$, $||p(x)|| \leqslant ||x||$.

c) Pour tout $x \in E$, $\langle p(x), x\rangle \geqslant 0$.

2. Soit p_1, p_2 deux projecteurs orthogonaux non nuls et différents de l'identité. On pose $u = p_1 \circ p_2 \circ p_1$.
Montrer que u est diagonalisable et que ses valeurs propres appartiennent à l'intervalle $[0, 1]$.

3. On pose $F = \mathrm{Im}(p_1)$.

a) Montrer que F est stable par $p_1 \circ p_2$.

b) On note v l'endomorphisme de F induit par $p_1 \circ p_2$. Montrer que v est diagonalisable et que ses valeurs propres appartiennent à l'intervalle $[0, 1]$.

Solution :

1. L'endomorphisme p est un projecteur orthogonal, donc $E = \mathrm{Ker}\, p \oplus^{\perp} \mathrm{Im}\, p$.

a) On écrit $x = x_1 + x_2, y = y_1 + y_2$ avec $(x_1, x_2) \in \mathrm{Ker}\, p \times \mathrm{Im}\, p$ et $(y_1, y_2) \in \mathrm{Ker}\, p \times \mathrm{Im}\, p$.
Alors : $\langle p(x), y\rangle = \langle x_2, y_2\rangle = \langle x, p(y)\rangle$

b) Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz
$||p(x)||^2 = \langle p(x), p(x)\rangle = \langle p^2(x), x\rangle = \langle p(x), x\rangle \leqslant ||p(x)||\ ||x||$, donc :
$$||p(x)|| \leqslant ||x||$$

c) Par la question a) ci-dessus $\langle p(x), x\rangle = \langle x_2, x_2\rangle \geqslant 0$

2. On remarque que u est un endomorphisme symétrique puisque

$$\langle p_1p_2p_1(x), y\rangle = \langle p_2p_1(x), p_1(y)\rangle = \langle p_1(x), p_2p_1(y)\rangle = \langle x, p_1p_2p_1(y)\rangle$$

donc est diagonalisable.

Soit (λ, x) un couple propre de u. Alors

$$\lambda||x||^2 = \langle \lambda x, x\rangle = \langle u(x), x\rangle = \langle p_1p_2p_1(x), x\rangle = \langle p_2p_1(x), p_1(x)\rangle \geqslant 0$$

par la question 1.c. Donc $\lambda \geqslant 0$.
De plus, par la question 1.b. et le fait que λ soit positif,

$$\lambda||x|| = ||u(x)|| = ||p_1p_2p_1(x)|| \leqslant ||p_2p_1(x)|| \leqslant ||p_1(x)|| \leqslant ||x|| \implies \lambda \leqslant 1$$

3. a) Comme $F = \mathrm{Im}\, p_1$, alors F est stable par $p_1 \circ p_2$.

b) Soit v la restriction de $p_1 \circ p_2$ à F. Alors, pour $(x, y) \in F^2$

$$\begin{aligned}\langle v(x), y\rangle &= \langle v(p_1(x)), p_1(y)\rangle = \langle p_1p_2(p_1(x)), p_1(y)\rangle \\ &= \langle p_2(p_1(x)), p_1^2(y)\rangle = \langle p_2(p_1(x)), p_1(y)\rangle \\ &= \langle p_1(x), p_2p_1(y)\rangle = \langle p_1(x), p_1p_2p_1(y)\rangle \\ &= \langle x, p_1p_2(y)\rangle = \langle x, v(y)\rangle\end{aligned}$$

Ceci montre que v est un endomorphisme symétrique de F donc diagonalisable.

Soit (λ, x) un couple propre de v, avec $x = p_1(x)$. Alors

$$\lambda||x||^2 = \langle \lambda x, x\rangle = \langle v(x), x\rangle = \langle p_1p_2(p_1(x)), p_1(x)\rangle \geqslant 0$$

par la question 1.c. Donc $\lambda \geqslant 0$.

De plus, par la question 1.b et le fait que λ soit positif,

$$\lambda||x|| = ||v(x)|| = ||p_1p_2(x)|| \leqslant ||p_1(x)|| \leqslant ||x|| \implies \lambda \leqslant 1$$

Exercice 2.18.

Dans tout l'exercice, on considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^p$, muni de son produit scalaire canonique, noté $\langle\ ,\ \rangle$. La norme d'un vecteur u est notée $\|u\|$.

1. Dans cette question, on considère n vecteurs $u_1, u_2, \ldots, u_n$ de $\mathbb{R}^p$, de norme 1.

À tout $n-$uplet $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, où, pour tout j de $[\![1, n]\!]$, x_j est dans $\{-1, 1\}$, on associe le vecteur v_x de $\mathbb{R}^p$ défini par : $v_x = \sum_{k=1}^{n} x_k u_k$.

On se propose de montrer qu'il existe des $n-$uplets $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tels que $\|v_x\| \leqslant \sqrt{n}$ et des $n-$uplets $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ tels que $\|v_y\| \geqslant \sqrt{n}$.

À cet effet on considère n variables aléatoires indépendantes $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, définies sur le même espace espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et suivant toutes la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$.

On pose alors, pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) = \| \sum_{j=1}^{n} X_j(\omega) u_j\|^2$ et on admet que X est une variable aléatoire.

a) Calculer, pour tout couple (i, j) d'éléments de $[\![1, n]\!]$, l'espérance $E(X_iX_j)$.

b) Calculer $E(X)$.

c) Conclure.

2. Dans cette question, on considère n vecteurs $v_1, v_2, \ldots, v_n$ de $\mathbb{R}^p$ vérifiant : $\|v_j\| \leqslant 1$ et $p_1, p_2, \ldots, p_n$ des réels appartenant à $[0, 1]$. On pose $w = \sum_{k=1}^{n} p_k v_k$.

On se propose de montrer qu'il existe un $n-$uplet $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ d'éléments de $\{0, 1\}$ tel que si on note v le vecteur défini par $v = \sum_{k=1}^{n} y_k v_k$, on alors l'inégalité suivante : $\|w - v\| \leqslant \dfrac{\sqrt{n}}{2}$.

À cet effet, on considère n variables aléatoires indépendantes $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telles que, pour tout j de $[\![1, n]\!]$, Y_j suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p_j)$.

On pose alors $V = \sum_{k=1}^{n} Y_k v_k$ et $Y = \|w - V\|^2$. On admet que Y est une variable aléatoire définie sur le même espace $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

a) Calculer, pour tout couple (i, j) d'éléments de $[\![1, n]\!]$, $E\left[(p_i - Y_i)(p_j - Y_j)\right]$.

b) En déduire que $E(Y) \leqslant \frac{n}{4}$.

c) Conclure.

Solution :

1. a) Comme les variables sont indépendantes, on a si $i \neq j$,

$$E(X_i X_j) = E(X_i)E(X_j).$$

Comme les variables sont centrées, on en déduit que si $i \neq j$, alors $E(X_i X_j) = 0$.
En revanche, pour $i = j$, on a $X_i^2 = 1$ et donc : $E(X_i^2) = 1$.

b) En développant X, on obtient : $X = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \langle u_i, u_j \rangle X_i X_j$ et, par linéarité de l'espérance, on obtient : $E(X) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \langle u_i, u_j \rangle E(X_i X_j)$.
En utilisant le résultat de la question précédente, on obtient :

$E(X) = \sum_{j=1}^{n} \|u_j\|^2 E(X_j^2)$. Finalement, $E(X) = n$.

c) Si la variable X ne prenait que des valeurs toutes strictement plus grandes que n, on aurait $E(X) > n$ et de même, si X ne prenait que des valeurs toutes strictement plus petites que n, on aurait $E(X) < n$. Comme $E(X) = n$, on en déduit que X prend des valeurs inférieures ou égales à n et des valeurs supérieures ou égales à n.
Il existe donc un ω_1 tel que $X(\omega_1) \geq n$ et un ω_2 tel que $X(\omega_2) \leq n$.
Il existe donc bien un x tel que $\|v_x\| \leqslant \sqrt{n}$ et un y tel que $\|v_y\| \geqslant \sqrt{n}$.

2. a) $\star$ Si $i \neq j$, comme les variables Y_i et Y_j sont indépendantes, les variables $Y_i - p_i$ et $Y_j - p_j$ sont indépendantes.
On a donc $E\left[(p_i - Y_i)(p_j - Y_j)\right] = E(Y_i - p_i)E(Y_j - p_j)$.
Or, comme $E(Y_k) = p_k$, on a $E(Y_j - p_j) = 0$.
Conclusion :

$$\forall\, i \neq j,\ E\left[(p_i - Y_i)(p_j - Y_j)\right] = 0$$

$\star$ Si $i = j$, $E((Y_i - p_i)^2)$ n'est autre que la variance de Y_i qui vaut $p_i(1 - p_i)$.

b) On a $Y = \left\| \sum_{k=1}^{n} (p_i - Y_i) v_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \langle v_i, v_j \rangle (p_i - Y_i)(p_j - Y_j)$.

On en déduit : $E(Y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \langle v_i, v_j \rangle E((p_i - Y_i)(p_j - Y_j))$.

En appliquant le résultat de la question précédente, on a donc :

$$E(Y) = \sum_{i=1}^{n} p_i(1-p_i)\|v_i\|^2$$

Il est bien connu que $p_i(1-p_i) \leq \frac{1}{4}$ et comme $\|v_i\|^2 \leq 1$, on a donc bien finalement : $E(Y) \leq \frac{n}{4}$.

c) Un raisonnement analogue à celui fait précédemment montre que Y prend des valeurs inférieures ou égales à $\frac{n}{4}$. Il existe bien des scalaires $y_1, y_2, \ldots, y_n$ tels que $\|w - v\| \leqslant \frac{\sqrt{n}}{2}$.

Exercice 2.19.

Dans cet exercice, on considère un entier naturel $n \geqslant 2$.
On appelle *spectre* réel (respectivement complexe) d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble de ses valeurs propres réelles (respectivement complexes).
On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\mathcal{S}_n^+$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{S}_n$ à spectre positif, c'est-à-dire dont toutes les valeurs propres sont réelles positives.

1. a) Soit $S \in \mathcal{S}_n$. Montrer que $S \in \mathcal{S}_n^+ \iff \forall\, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tXSX \geqslant 0$.

b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $S = {}^tAA \in \mathcal{S}_n^+$.

c) Réciproquement, montrer que pour toute matrice $S \in \mathcal{S}_n^+$, il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = {}^tAA$.

2. Soit U et V deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Montrer que si 0 est valeur propre de UV, alors 0 est aussi valeur propre de VU.

b) Montrer que les matrices UV et VU ont même spectre complexe.

3. a) Soit S et T deux matrices de $\mathcal{S}_n^+$. Montrer que $S + T \in \mathcal{S}_n^+$.

b) $\mathcal{S}_n^+$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}_n$?

4. Soit S et T deux matrices de $\mathcal{S}_n$.

a) La matrice ST est-elle symétrique ?

b) À quelle condition nécessaire et suffisante sur S et T a-t-on ST symétrique ?

c) On suppose que S et T appartiennent à $\mathcal{S}_n^+$. En utilisant les questions 1. c et 2. b, montrer que toutes les valeurs propres de la matrice ST sont réelles et positives.

Solution :

1. a) « $\Longrightarrow$ » Par hypothèse il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$, $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ telles que $S = {}^tPDP$, avec $\forall\ i\,,\ \lambda_i \geq 0$.
Alors $\forall\ X, {}^tXSX = {}^t(PX)D(PX) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, y_i^2 \geq 0$, où les (y_i) sont les coordonnées de $Y = PX$.
« $\Longleftarrow$ » Par hypothèse, pour X vecteur propre de S associé à λ, on a :
$0 \leqslant {}^tXSX = \lambda\, {}^tXX = \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i^2$, d'où, comme $X \neq 0$, $\lambda \geqslant 0$.

b) ${}^tS = S$ et $\forall\ X\,,\ {}^tXSX = {}^t(AX)(AX) = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \geqslant 0$, où les (y_i) sont les coordonnées de $Y = AX$.

c) On diagonalise S comme en a) ; on pose $\Delta = \mathrm{diag}\big(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}\big)$, et on a $S = {}^tP\Delta^2P = {}^tP{}^t\Delta\Delta P$, d'où $A = \Delta P$ convient.

2. a) $0 \in \mathrm{Sp}(UV) \implies UV \notin GL_n(\mathbb{R}) \implies U$ ou V non inversibles (par contraposée) donc VU non inversible car $\dim\big(\mathrm{Im}(VU)\big) \leqslant \dim\big(\mathrm{Im}(U)\big)$ et $\dim\big(\mathrm{Im}(VU)\big) \leqslant \dim\big(\mathrm{Im}(V)\big)$.

b) S'il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$, tels que $UVX = \lambda X$, alors $VX \neq 0$ et $VU(VX) = \lambda VX$ prouve que $\lambda \in \mathrm{Sp}(VU)$. On conclut par symétrie et 2. a.

3. a) On a ${}^t(S+T) = S+T$ et $\forall\ X, {}^tX(S+T)X = {}^tXSX + {}^tXTX \geq 0$, par conséquent $S+T \in \mathcal{S}_n^+$ d'après 1. a.

b) Non, car $\lambda S \notin \mathcal{S}_n^+$ si $\lambda < 0$.

4. a) Non. Par exemple : $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_n^+, T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_n^+$ et
$$ST = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \notin \mathcal{S}_n.$$

b) $ST \in \mathcal{S}_n \Longleftrightarrow {}^t(ST) = ST \Longleftrightarrow {}^t{}^tS = ST \Longleftrightarrow TS = ST$, *i.e.* si et seulement S et T commutent.

c) Il existe $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $ST = {}^tA{}^tBB$ qui a le même spectre complexe que $B{}^tAA{}^tB = {}^t\big(A{}^tB\big)\, A{}^tB \in \mathcal{S}_n^+$, donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(ST) \subseteq \mathbb{R}_+$.

N.B. ST est à spectre réel positif bien qu'elle ne soit pas forcément symétrique.

3

PROBABILITÉS

Exercice 3.01.

Soit $\lambda > 0$ un réel fixé. On considère une suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose que les variables X_n sont mutuellement indépendantes et suivent chacune une loi exponentielle de paramètre λ. Soient $p \in]0,1[$ et $q = 1-p$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ est une variable aléatoire à densité dont on donnera une densité.

2. Montrer que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, P(X_1 + X_2 + \cdots + X_n \leqslant x) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x)\,(1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^k}{k!})$$

où $\mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}$ est la fonction indicatrice de $\mathbb{R}^+$, *i.e.* la fonction définie par :

$$\mathbf{1}_{\mathbb{R}^+} : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{R}^+ \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. Soit N une variable aléatoire réelle suivant la loi géométrique de paramètre p.

On pose $S = \sum_{n=1}^{N} X_n$, *i.e.* pour tout $\omega \in \Omega$ $S(\omega) = \sum_{n=1}^{N(\omega)} X_n(\omega)$.

a) Soit F_S la fonction de répartition de S. Montrer que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, F_S(x) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x)(1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^k}{k!} p q^{n-1}).$$

b) En déduire la loi de S (on admettra qu'il est possible de permuter l'ordre des sommations dans la formule précédente).

c) Exprimer l'espérance $E(S)$ de S en fonction de $E(X_1)$ et de $E(N)$.

Solution :

1. Chaque variable X_i suit la loi exponentielle de paramètre λ, autrement dit la loi Gamma $\Gamma(\lambda, 1)$. Comme les variables X_i sont indépendantes, on sait, d'après le théorème de stabilité des lois Gamma, que $X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ suit la loi $\Gamma(\lambda, n)$. Une densité f_n de $X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ est alors donnée par :

$f_n(x) = 0$ si $x < 0$ et $f_n(x) = \dfrac{\lambda^n x^{n-1} \mathrm{e}^{-\lambda x}}{\Gamma(n)} = \dfrac{\lambda^n x^{n-1} \mathrm{e}^{-\lambda x}}{(n-1)!}$ si $x \geqslant 0$.

2. On suppose d'abord que $x < 0$. On a alors $P(X_1 + X_2 + \ldots + X_n \leqslant x < 0) = 0$.
Considérons ensuite un réel $x \geqslant 0$. On a alors
$P(X_1 + X_2 + \ldots + X_n \leqslant x) = \displaystyle\int_0^x f_n(t)dt = \int_0^x \frac{\lambda}{(n-1)!}(\lambda x)^{n-1}\mathrm{e}^{-\lambda x}dx.$
On applique la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre $n-1$ à la fonction exponentielle entre 0 et λx.
On trouve $\mathrm{e}^{\lambda x} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^k}{k!} + \int_0^{\lambda x} \frac{(\lambda x - t)^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{e}^t dt.$
On effectue dans l'intégrale le changement de variable $u = x - \dfrac{t}{\lambda}$. On obtient :

$$\mathrm{e}^{\lambda x} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^k}{k!} = \mathrm{e}^{\lambda x} \int_0^x \frac{\lambda}{(n-1)!}(\lambda u)^{n-1}\mathrm{e}^{-\lambda u}dt.$$

On en déduit que $P(X_1 + X_2 + \ldots + X_n \leqslant x) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^k}{k!}$. Ceci donne la formule attendue.

3. a) Comme S est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, pour tout $x < 0$, $F_S(x) = P(S \leqslant x) = 0$.

Considérons à présent $x \geqslant 0$. En appliquant la formule des probabilités totales au système complet d'événements $(N = n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, on trouve :

$$\begin{aligned} F_S(x) = P(S \leqslant x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P_{[N=n]}(S \leqslant x) P(N = n) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} P(X_1 + X_2 + \ldots + X_n \leqslant x) pq^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} (1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^k}{k!}) pq^{n-1} \end{aligned}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} pq^{n-1} - \mathrm{e}^{-\lambda x} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^k}{k!} pq^{n-1}.$$

En remarquant que $\sum_{n=1}^{+\infty} pq^{n-1} = 1$, on obtient la formule souhaitée.

b) On applique à la série double le théorème de permutation :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^k}{k!} pq^{n-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda x)^k}{k!} \sum_{n=k+1}^{+\infty} pq^{n-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda x)^k}{k!} p \frac{q^k}{1-q}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda x q)^k}{k!} = \mathrm{e}^{\lambda x q}.$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_S(x) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x)(1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{e}^{\lambda x q}) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x)(1 - \mathrm{e}^{-\lambda x p})$.
La variable S suit donc la loi exponentielle de paramètre λp.

c) On en déduit que $E(S) = \frac{1}{\lambda p} = \frac{1}{\lambda} \times \frac{1}{p} = E(X_1)E(N)$.

Exercice 3.02.

Toutes les variables aléatoires utilisées dans cet exercice sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
On admet que les formules de calcul de la covariance d'un couple de variables à densités sont identiques à celles du calcul de la covariance d'un couple de variables discrètes.

Soient $X_1, \ldots, X_n$, n variables aléatoires. On dit que le vecteur $(X_1, \ldots, X_n)$ est *gaussien* si pour tout $(a_1, \ldots, a_n)$ réels, la variable aléatoire $a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n$ suit une loi normale (on considérera que la variable nulle suit une loi normale).

1. a) Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un vecteur gaussien. Montrer que chaque variable X_i suit une loi normale.

b) Montrer que si $X_1 \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes suivant des lois normales, alors $(X_1, \ldots, X_n)$ est un vecteur gaussien.

2. Dans cette question X suit la loi normale centrée réduite, et Y indépendante de X, suit la loi discrète définie par $P(Y = 1) = P(Y = -1) = \frac{1}{2}$.

a) Déterminer la loi de XY.

b) Le vecteur (X, XY) est-il gaussien ?

3. Dans cette question (X, Y, Z) est un vecteur gaussien de matrice de variance/covariance

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

et de vecteur espérance $E\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer la loi de $U = X + Y$ et $V = X + Z$.

b) Écrire la matrice de variance/covariance de (U, V).

c) Déterminer une matrice $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que les variables aléatoires U' et V' définies par $\begin{pmatrix} U' \\ V' \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$ soient non corrélées.

Solution :

1. a) Il suffit de prendre $a_j = 0$ pour $j \neq i$ et $a_i = 1$.

b) C'est un théorème du cours sur la stabilité des lois normales.

2. a) Calculons :

$$\begin{aligned} P(XY \leqslant x) &= P((XY \leqslant X) \cap [Y = 1]) + P((XY \leqslant X) \cap [Y = -1]) \\ &= \frac{1}{2}P(X \leqslant x) + \frac{1}{2}P(X \geqslant -x) = P(X \leqslant x) = \Phi(x) \end{aligned}$$

Ainsi XY suit la loi normale centrée réduite.

b) En revanche le vecteur (X, XY) n'est pas gaussien.

En effet $X + XY = (1 + Y)X$ vérifie :

$P(X + XY = 0) = P(X(1 + Y) = 0) = P(Y = -1) = \frac{1}{2}$ (l'événement $X = 0$ est quasi-impossible), donc $X+XY$ n'a pas une fonction de répartition continue !

3. Grâce au vecteur espérance et à la matrice de variance-covariance, il vient :

a) $E(X + Y) = 1, V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X, Y) = 5$, donc $X + Y \hookrightarrow \mathcal{N}(1, 5)$

$E(X + Z) = 2, V(X + Z) = V(X) + V(Z) + 2\,\mathrm{Cov}(X, Z) = 2$, donc $X + Z \hookrightarrow \mathcal{N}(2, 2)$

b) De plus :

$\mathrm{Cov}(X + Y, X + Z) = E(X^2 + XY + XZ + YZ) - E(X + Y)E(X + Z) = 2$

Le couple $(X+Y, X+Z)$ est gaussien car le triplet (X, Y, Z) l'est. La matrice de variance/covariance de $(X + Y, X + Z)$ est $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

c) Cette matrice symétrique réelle admet 1 et 6 comme valeurs propres, une base orthonormée de vecteurs propres étant formée des vecteurs $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Avec $P = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, il vient $A = PD{}^tP$ avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$.

La matrice de variance-covariance de $P\begin{pmatrix} X+Y \\ X+Z \end{pmatrix}$ est la matrice diagonale D.

Exercice 3.03.

Dans tout le problème, N désigne un entier naturel non nul.

Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, et suivant toutes la loi uniforme sur $[\![1, N]\!]$.
On note T_n et Z_n les deux variables aléatoires définies, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, par :

$$T_n = \sup(U_1, U_2, \ldots, U_n) \text{ et } Z_n = \inf(U_1, U_2, \ldots, U_n)$$

On pose $S_n = T_n + Z_n - 1$.

On pose enfin, pour tout entier naturel n non nul, $a_n(N) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^n & \text{si } N \geqslant 2 \\ 0 & \text{si } N = 1 \end{cases}$.

1. Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $[\![1, N]\!]$. Établir la relation suivante :

$$E(Y) = \sum_{k=0}^{N-1} P([Y > k])$$

Dans la suite de l'exercice, on cherche à estimer le paramètre N.

2. a) Calculer, pour tout entier naturel k appartenant à $[\![1, N]\!]$, $P([T_n \leqslant k])$.

b) En déduire la loi de T_n.

c) Calculer $E(T_n)$ en fonction de N et de $a_n(N)$.

3. a) Calculer, pour tout entier naturel k appartenant à $[\![0, N-1]\!]$, $P([Z_n > k])$.

b) En déduire $E(Z_n)$ en fonction de $a_n(N)$.

4. a) $T_n + a_n(N)$ est-il un estimateur sans biais de N ?

b) Montrer que T_n est un estimateur asymptotiquement sans biais de N.

c) Montrer que S_n est un estimateur sans biais de N.

Solution :

1. On a $E(Y) = \sum_{k=1}^{N} kP([Y = k]) = \sum_{k=1}^{N} k\big[P([Y > k-1]) - P([Y > k])\big]$

$$= \sum_{k=1}^{N} kP([Y > k-1]) - \sum_{k=1}^{N} kP([Y > k]).$$

En effectuant un glissement d'indice dans la première somme :

$$E(Y) = \sum_{k=0}^{N-1} (k+1)P([Y > k]) - \sum_{k=1}^{N} kP([Y > k])$$

En rajoutant dans la seconde somme le terme correspondant à $k = 0$ qui est nul :

$$E(Y) = \sum_{k=0}^{N-1} (k+1)P([Y > k]) - \sum_{k=0}^{N} kP([Y > k])$$

En rassemblant dans une seule somme les termes communs :

$$E(Y) = \sum_{k=0}^{N-1} P([Y > k]) - NP([Y > N])$$

Comme $P([Y > N]) = 0$, il reste finalement : $E(Y) = \sum_{k=0}^{N-1} P([Y > k])$.

2. a) On a : $[T_n \leqslant k] = [X_1 \leqslant k] \cap \cdots \cap [X_n \leqslant k]$. Comme les variables sont indépendantes, on obtient : $\forall\, k \in [\![1, N]\!], \quad P([T_n \leqslant k]) = \left(\frac{k}{N}\right)^n$

b) On a, pour tout k de $[\![1, N]\!]$, $P([T_n = k]) = P([T_n \leqslant k]) - P([T_n \leqslant k-1])$. Comme la formule de la question précédente est encore valable pour $k = 0$, on obtient finalement :
$\forall\, k \in [\![1, N]\!], \quad P([T_n = k]) = \left(\frac{k}{N}\right)^n - \left(\frac{k-1}{N}\right)^n$

c) On a donc : $E(T_n) = \sum_{k=1}^{N} k\left[\left(\frac{k}{N}\right)^n - \left(\frac{k-1}{N}\right)^n\right]$.
En séparant en deux sommes :

$$E(T_n) = \sum_{k=1}^{N} k\left(\frac{k}{N}\right)^n - \sum_{k=1}^{N} k\left(\frac{k-1}{N}\right)^n$$

En effectuant un décalage d'indice dans la seconde somme :

$$E(T_n) = \sum_{k=1}^{N} k\left(\frac{k}{N}\right)^n - \sum_{k=0}^{N-1} (k+1)\left(\frac{k}{N}\right)^n$$

On peut rajouter dans la première somme le terme correspondant à $k = 0$ qui est nul :

$$E(T_n) = \sum_{k=0}^{N} k\left(\frac{k}{N}\right)^n - \sum_{k=0}^{N-1} (k+1)\left(\frac{k}{N}\right)^n$$

En rassemblant les termes communs : $E(T_n) = N - \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^n$. Finalement :

$$E(T_n) = N - a_n(N)$$

3. a) On a $P([Z_n > k]) = P([X_1 > k] \cap \ldots \cap [X_n > k])$.
Comme les variables X_i sont indépendantes, on a : $P([Z_n > k]) = \left(\frac{N-k}{N}\right)^n$

b) En utilisant la question préliminaire : $E(Z_n) = \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{N-k}{N}\right)^n$

En effectuant le changement d'indice $j = N - k$:

$$E(Z_n) = \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{j}{N}\right)^n$$

Finalement : $E(Z_n) = 1 + a_n(N)$.

4. a) On a, par linéarité de l'opérateur espérance, $E(T_n + a_n(N)) = N$ mais comme $T_n + a_n(N)$ dépend de N, ce n'est pas un estimateur de N.

b) On a $a_n(N) = \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^n$. Comme $0 \leqslant \frac{k}{N} < 1$ et comme la limite de la somme est égale à la somme des limites, on a $\lim_{n\to+\infty} d_n(N) = 0$, d'où : $\lim_{n\to+\infty} E(T_n) = N$.

Conclusion : T_n est un estimateur asymptotiquemnt sans biais de N.

c) On a, par linéarité, $E(S_n) = E(T_n) + E(Z_n) - 1$.

En utilisant les résultats précédents, on a donc :

$$E(S_n) = N$$

Exercice 3.04.

On considère un arrêt d'une ligne de bus. Le passage des bus à cet arrêt est prévu à chaque heure juste : 12h00, 13h00, 14h00 etc. Mais la circulation est telle que que les bus peuvent avoir du retard.

Dans cet exercice, on mesure le temps à partir de midi, considéré comme l'instant 0, et l'unité de temps est l'heure.

Le retard du $k^{\text{ème}}$ bus est une variable aléatoire Z_k. On suppose les variables Z_k indépendantes de même loi, à valeurs dans $[0, 1]$. La loi commune des Z_k a pour densité f, pour fonction de répartition F, pour espérance μ et pour variance σ^2.

1. Un voyageur arrive à l'instant $x \in [0, 1[$. On note T_x la variable aléatoire du temps d'attente de ce voyageur pour l'arrivée d'un bus.

a) Montrer que

$$P(T_x \leqslant t) = \begin{cases} F(t+x) - F(x) & \text{si } 0 \leqslant t < 1 - x \\ 1 - F(x) + F(x)\,F(t+x-1) & \text{si } 1 - x \leq t < 2 - x \\ 1 & \text{si } 2 - x \leq t \end{cases}$$

b) Préciser une densité de T_x.

2. Montrer que :

$$E(T_x) = \int_0^{1-x} t f(t+x)\,dt + (\mu + 1 - x)\,F(x)$$

$$= 1 - x - \int_x^1 F(u)du + (\mu + 1 - x)\, F(x)$$

3. a) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 F(z)\, dz = 1 - \mu$ et $\displaystyle\int_0^1 z\, F(z)\, dz = \frac{1 - \mu^2 - \sigma^2}{2}$.

b) On suppose que le voyageur arrive au hasard entre midi et 13h00, c'est-à-dire que son instant d'arrivée est une variable aléatoire X qui suit la loi uniforme sur le segment $[0, 1]$.

On admet que son temps d'attente W vérifie $E(W) = \displaystyle\int_0^1 E(T_x)\, dx$.

Calculer $E(W)$. Quand cette espérance est-elle minimale ?

Solution :

1. a) On a $T_x(\Omega) = \mathbb{R}_+$.

• Si $0 \leqslant t < 1 - x$, *i.e.* $x \leqslant x + t < 1$, on a $[x, x + t[\subset [0, 1[$ et on est sûr d'avoir le bus de midi ; la probabilité d'attendre au maximum t est celle que le bus de midi arrive dans l'intervalle de temps $[x, x + t]$, soit

$$P(T_x \leqslant t) = F(x + t) - F(x)$$

• si $1 - x \leqslant t < 2 - x$, *i.e.* $1 \leqslant x + t < 2$, on a deux cas disjoints :

→ soit le bus de midi n'est pas encore passé, ce qui a pour probabilité $1 - F(x)$;

→ soit il est déjà passé (avec la probabilité $F(x)$), et la probabilité d'attendre au plus t est alors la probabilité que le bus de 13h00 arrive entre 0 et $x + t - 1$, soit $F(x + t - 1)$; alors

$$P(T_x \leqslant t) = 1 - F(x) + F(x)\, F(x + t - 1)$$

• si $2 - x \leqslant t$, c'est-à-dire $x + t \geqslant 2$, on est sûr d'avoir au pire le bus de 13h00, donc

$$P(T_x \leqslant t) = 1$$

b) Par dérivation, T_x a pour densité (sur $\mathbb{R}_+$)

$$\varphi(t) = \begin{cases} f(x + t) & \text{si } 0 \leqslant t < 1 - x \\ F(x)\, f(x + t - 1) & \text{si } 1 - x \leqslant t < 2 - x \\ 0 & \text{si } 2 - x \leqslant t \end{cases}$$

2. Les changements de variable $u = x + t$, $u = x + t - 1$ et une intégration par parties donnent :

$$E(T_x) = \int_0^{1-x} t\, f(x + t)dt + \int_{1-x}^{2-x} t\, F(x)\, f(x + t - 1)dt$$

$$= \int_x^1 (u - x)\, f(u)du + F(x) \int_0^1 (u - x + 1)\, f(u)du$$

$$= \int_x^1 u\, f(u)du - x \int_x^1 f(u)du + F(x) \int_0^1 u\, f(u)du + (1-x)\, F(x) \int_0^1 f(u)du$$
$$= \big[u\, F(u)\big]_x^1 - \int_x^1 F(u)du - x\,\big[F(1) - F(x)\big] + F(x)\, E(X) + (1-x)\, F(x)$$
$$= 1 - x\, F(x) - \int_x^1 F(u)du - x\,\big[1 - F(x)\big] + (\mu + 1 - x)\, F(x)$$
$$= 1 - x - \int_x^1 F(u)du + (\mu + 1 - x)\, F(x)$$

3. a) On a par intégration par parties

$$\mu = E(Z) = \int_0^1 z\, f(z)dz = \big[z\, F(z)\big]_0^1 - \int_0^1 F(z)dz = 1 - \int_0^1 F(z)dz,$$

d'où $\displaystyle\int_0^1 F(z)dz = 1 - \mu$

$$\sigma^2 = \int_0^1 (z-\mu)^2\, f(z)dz = \big[(z-\mu)^2\, F(z)\big]_0^1 - 2\int_0^1 (z-\mu)\, F(z)dz$$

$$\sigma^2 = (1-\mu)^2 - 2\int_0^1 z\, F(z)dz + 2\mu \int_0^1 F(z)dz = 1 - \mu^2 - 2\int_0^1 z\, F(z)dz$$

soit : $\displaystyle\int_0^1 z\, F(z)dz = \frac{1 - \mu^2 - \sigma^2}{2}$

b) D'après la question 2, on a :

$$E(W) = \int_0^1 \left[1 - x - \int_x^1 F(u)du + (\mu + 1 - x)\, F(x)\right] dx$$

On calcule séparément :

$$\int_0^1 (1-x)dx = 1 - \big[\tfrac{x^2}{2}\big]_0^1 = \tfrac{1}{2}$$

$$\int_0^1 \left(\int_x^1 F(u)du\right) dx = \left[x \int_x^1 F(u)du\right]_0^1 - \textstyle\int_0^1 x\,\big[-F(x)\big]dx$$
$$= \int_0^1 x\, F(x)dx = \frac{1 - \mu^2 - \sigma^2}{2}$$

$$\int_0^1 \big[(\mu + 1 - x)\, F(x)\big]dx = (\mu+1)\int_0^1 F(x)dx - \int_0^1 x\, F(x)dx$$
$$= (1+\mu)\,(1-\mu) - \frac{1 - \mu^2 - \sigma^2}{2} = \frac{1 - \mu^2 + \sigma^2}{2}$$

d'où finalement $E(W) = \frac{1}{2} - \frac{1 - \mu^2 - \sigma^2}{2} + \frac{1 - \mu^2 + \sigma^2}{2} = \frac{1}{2} + \sigma^2$

On constate que l'espérance du temps d'attente du voyageur est minimum lorsque la loi des retards des bus est d'écart-type nul, c'est-à-dire lorsque le retard est constant.

Exercice 3.05.

Dans cet exercice X est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant la loi $\Gamma(1, n)$ (c'est-à-dire la loi $\gamma(n)$), avec $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Rappeler l'expression d'une densité de X, ainsi que la valeur de son espérance $E(X)$ et de sa variance $V(X)$.

2. Pour tout réel $\lambda > 0$, on pose $\psi(\lambda) = \ln\left(E(\mathrm{e}^{-\lambda(X-E(X))})\right)$. Calculer $\psi(\lambda)$.

3. Montrer que pour tout $\lambda > 0$, on a $\psi(\lambda) \leqslant n\dfrac{\lambda^2}{2}$.

4. a) Montrer que pour tout $x > 0$ et tout $\lambda > 0$, on a
$$P(E(X) - X \geqslant x) \leqslant \mathrm{e}^{-\lambda x + \psi(\lambda)}$$
b) En déduire que pour tout $x > 0$ $P(E(X) - X \geqslant x) \leqslant \mathrm{e}^{-x^2/(2n)}$.

5. Comparer l'inégalité que l'on vient d'obtenir avec celle obtenue par l'inégalité de Bienaymé-Tchebicheff.

Solution :

1. Une densité de X est donnée par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{n-1}\mathrm{e}^{-x}}{(n-1)!} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

On sait que $E(X) = n$ et $V(X) = n$.

2. On utilise le théorème de transfert :
$$\begin{aligned} E(\mathrm{e}^{-\lambda(X-E(X))}) &= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda(x-n)} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{e}^{-x}dx \\ &= \mathrm{e}^{\lambda n}\int_0^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{e}^{-(\lambda+1)x}dx \\ &= \frac{\mathrm{e}^{\lambda n}}{(\lambda+1)^n}\int_0^{+\infty} \frac{u^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{e}^{-u}du \text{ (avec } u = (\lambda+1)x) \\ &= \frac{\mathrm{e}^{\lambda n}}{(\lambda+1)^n} \end{aligned}$$
Ainsi :
$$\psi(\lambda) = \lambda n - n\ln(\lambda+1)$$

3. Une étude de la fonction $f : \lambda \mapsto \dfrac{n\lambda^2}{2} - \lambda n + n\ln(\lambda+1)$ montre que f est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et que $f(0) = 0$.

4. a) Les événements $[E(X) - X \geqslant x]$ et $[\mathrm{e}^{\lambda(E(X)-X)} \geqslant \mathrm{e}^{\lambda x}]$ sont égaux. L'inégalité de Markov donne alors :
$$P([E(X) - X \geqslant x]) = P[\mathrm{e}^{\lambda(E(X)-X)} \geqslant \mathrm{e}^{\lambda x}]) \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}^{\lambda x}}E(\mathrm{e}^{\lambda(E(X)-X)})$$

$$= \mathrm{e}^{\psi(\lambda)}\mathrm{e}^{-\lambda x}$$

b) Ainsi : $\psi(\lambda) - \lambda x \leqslant \dfrac{n\lambda^2}{2} - \lambda x$

Ceci étant vérifié pour tout $\lambda > 0$, il vient :

$$P([E(X) - X \geqslant x]) \leqslant \inf_{\lambda>0} \left(\frac{n\lambda^2}{2} - \lambda x\right) = -\frac{x^2}{2n}$$

5. L'inégalité de Bienaymé Tchebicheff permet d'écrire

$$P([E(X) - X \geqslant x]) \leqslant P([|E(X) - X| \geqslant x]) \leqslant \frac{V(X)}{x^2} = \frac{n}{x^2}$$

Or, on peut montrer que pour tout $x > 0$, $\mathrm{e}^{-x^2/(2n)} \leqslant \dfrac{n}{x^2}$ (faire par exemple une étude de fonction). Ainsi l'inégalité obtenue (grandes déviations) est-elle meilleure que celle obtenue par Bienaymé Tchebicheff.

Exercice 3.06.

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. Soit Z une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que la variable aléatoire 2^{-Z} admet une espérance. On la note $r(Z)$.

On suppose dans la suite de l'exercice que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(Z = n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.

2. a) Montrer que l'on définit ainsi une loi de probabilité et calculer $r(Z)$.

b) Montrer que pour tout $(n, q) \in \mathbb{N}^2$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{k+q}{q} = \binom{n+q+1}{q+1}$.

c) Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que Z et pour tout entier $q \geqslant 1$, on pose $S_q = \displaystyle\sum_{i=1}^{q} X_i$.

Montrer que la loi de S_q est définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, P(S_q = n) = \binom{n+q-1}{q-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+q}$$

d) Calculer $r(S_q)$. En déduire que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+q-1}{q-1}\left(\frac{1}{4}\right)^{n} = \left(\frac{4}{3}\right)^{q}$$

3. On suppose dans cette question que Z représente le nombre de lionceaux devant naître en 2014 d'un couple de lions. Chaque lionceau a la probabilité $1/2$ d'être mâle ou femelle, indépendamment des autres. On note F la variable aléatoire représentant le nombre de femelles devant naître en 2014.
Déterminer la loi de F.

Solution :

1. Comme $0 \leqslant P(Z=n)\left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant P(Z=n)$ et que $\sum P(Z=n)$ converge. Le théorème de transfert permet d'affirmer que $E(2^{-Z})$ existe (et est majorée par 1).

2. a) Ici $r(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{2}{3}$

b) La relation de Pascal :

$$\binom{n+q+1}{q+1} + \binom{n+q+1}{q} = \binom{n+q+2}{q+1}$$

donne le résultat à l'aide d'un raisonnement par récurrence banal.

c) Pour $q=1$, on a $S_1 = Z$: la relation est donc vérifiée pour $q=1$.

Supposons que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ P(S_q = n) = \binom{n+q-1}{q-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+q}$.

Comme $S_{q+1} = S_q + X_{q+1}$, par indépendance :

$$P(S_{q+1}=n) = \sum_{k=0}^{n} P(S_q=k)P(X_{q+1}=n-k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+q+1} \sum_{k=0}^{n} \binom{k+q-1}{q-1}$$

Soit : $P(S_{q+1} = n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+q+1}\binom{n+q}{q}$. On conclut par le principe de récurrence.

d) Par indépendance des (X_n), on a indépendance des (2^{-X_n}) et $r(S_q) = r(X_1)^q$, ce qui s'écrit $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+q-1}{q-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+q}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^q$, soit :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+q-1}{q-1}\left(\frac{1}{4}\right)^n = \left(\frac{4}{3}\right)^q.$$

3. La famille $([Z=n])_{n\geq 0}$ forme un système complet d'événements.
La loi conditionnelle de F conditionnée par $[Z=n]$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(n, 1/2)$. Donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} P(F=k) &= \sum_{n=0}^{\infty} P_{[Z=n]}(F=k)P(Z=n) = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^k \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k}\left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^k. \end{aligned}$$

Exercice 3.07.

Dans cet exercice m désigne un réel strictement positif et X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $1/m$.
$(X_k)_{k\geq 1}$ désigne une suite de variables aléatoires *i.i.d.* de même loi que X.

On pose, pour tout entier $n \geqslant 1$, $S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

1. Déterminer la loi de nS_n.
Soit f une fonction continue et bornée par une constante K sur $\mathbb{R}^+$.

2. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que si $|x - m| < \alpha$ alors $|f(x) - f(m)| < \varepsilon/2$.

3. Soit Z une variable aléatoire à densité à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ admettant une espérance m et une variance σ^2.

a) Montrer que $f(Z)$ admet une espérance.

b) Justifier l'inégalité $|E(f(Z)) - f(m)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + 2K\frac{\sigma^2}{\alpha^2}$

c) En déduire que la suite $(E(f(S_n)))_n$ converge vers $f(m)$.

4. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{(n-1)!}\int_0^{+\infty} f(x)\big(\frac{nx}{m}\big)^{n-1}\exp\big(-\frac{nx}{m}\big)\frac{n\,dx}{m}\right] = f(m)$$

Solution :

1. Les variables aléatoires indépendantes $X_1, \ldots, X_n$ suivant la même loi $\mathcal{E}(1/m)$, la variable aléatoire $\sum_{i=1}^{n} X_i$ suit la loi $\Gamma(1/m, n)$ de densité :

$$g(x) = \frac{1}{m(n-1)!}\big(\frac{x}{m}\big)^{n-1}\mathrm{e}^{-x/m}, \text{ pour } x \geqslant 0$$

2. Il s'agit d'écrire la continuité de f en m, soit :

$$\forall\,\varepsilon > 0, \exists\,\alpha > 0, |x - m| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(m)| < \varepsilon/2$$

3. a) La fonction f étant continue et majorée par K, on a $|f(t)f_Z(t)| \leqslant Kf_Z(t)$, ce qui assure l'existence de $\int_{\mathbb{R}^+} |f(t)f_Z(t)|dt$ et donc l'existence de $E(f(Z))$ par le théorème du transfert.

b) On écrit

$$\begin{aligned}|E(f(Z)) - f(m)| &\leqslant \int_0^{+\infty} |f(t) - f(m)|f_Z(t)dt\\ &\leqslant \int_0^{m-\alpha}\cdots + \int_{m-\alpha}^{m+\alpha}\cdots + \int_{m+\alpha}^{+\infty}\cdots = I_1 + I_2 + I_3\end{aligned}$$

- par la question 2, $0 \leqslant I_2 \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\int_{m-\alpha}^{m+\alpha} f_Z(t)dt < \frac{\varepsilon}{2}$.
- la fonction $|f|$ étant majorée par K,

$$0 \leqslant I_1 + I_3 \leqslant 2K\Big(\int_0^{m-\alpha} f_Z(t)dt + \int_{m+\alpha}^{+\infty} f_Z(t)dt\Big) = 2KP(|Z - m| > \alpha)$$

$\leqslant 2K\dfrac{\sigma^2}{\alpha^2}$, par l'inégalité de Bienaymé-Tchebicheff.

c) On applique l'inégalité précédente à $Z = S_n$, avec $E(S_n) = m$ et $\sigma^2 = \dfrac{m}{n}$, soit :

$$|E(f(Z)) - f(m)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + 2K\frac{m}{n\alpha^2}$$

Il reste à faire tendre n vers $+\infty$ pour obtenir le résultat demandé.

4. Appliquons le résultat précédent à la loi de S_n.

D'abord : $P(S_n \leqslant x) = P\big(\sum_{i=1}^{n} X_i \leqslant nx\big) \Longrightarrow f_{S_n}(x) = ng(nx)$

soit, pour $x \geqslant 0$ $f_{S_n}(x) = \dfrac{n}{m(n-1)!}\big(\dfrac{nx}{m}\big)^{n-1}\mathrm{e}^{-nx/m}$.

Par le théorème de transfert (l'intégrale converge puisque la fonction f est bornée)

$$E(f(S_n)) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^{+\infty} f(x)\big(\frac{nx}{m}\big)^{n-1}\exp\big(-\frac{nx}{m}\big)\frac{ndx}{m}$$

On termine par la question précédente.

Exercice 3.08.

Dans tout cet exercice, n désigne un entier naturel non nul. On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des variables aléatoires X, à valeurs dans $[\![1, n]\!]$ et telles que pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, $P(X = k) \neq 0$ et définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Pour toute variable aléatoire X de $\mathcal{E}$, on note :

$$H(X) = -\sum_{k=1}^{n} P(X = k)\times \ln(P(X = k)).$$

On note U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.

1. Déterminer $H(U)$.

2. Montrer que pour tout $X \in \mathcal{E}$, $H(X) \leqslant H(U)$.

Soient $f : [\![1, n]\!] \to \mathbb{R}$ une fonction injective et $a \in \mathbb{R}$. On considère l'ensemble $\mathcal{E}_a$ des variables aléatoires de $\mathcal{E}$ telles que $E(f(X)) = a$. On suppose que $\mathcal{E}_a$ est non vide.

3. Montrer que la fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sum_{k=1}^{n}(f(k) - a)\mathrm{e}^{(f(k)-a)x}$ est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

4. Pour tout $X \in \mathcal{E}_a$ et $k \in [\![1, n]\!]$, on note $p_k = P(X = k)$. On peut ainsi considérer H comme une fonction de $(p_1, \ldots, p_n)$. Déterminer la hessienne de H.

5. En déduire que H admet un minimum sur $\mathcal{E}_a$ atteint en un point unique.

Solution :

1. On rappelle que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $P(U = k) = \frac{1}{n}$.

Ainsi, $H(U) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \ln \frac{1}{n} = \ln n$.

2. Soit $X \in \mathcal{E}$. Alors, en notant $p_k = P(X = k)$, la fonction logarithme néperien étant concave,

$$H(U) - H(X) = \ln n + \sum_{k=1}^{n} p_k \ln p_k = \sum_{k=1}^{n} p_k \ln(np_k) = -\sum_{k=1}^{n} p_k \ln \frac{1}{np_k}$$
$$\geqslant \ln\Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{p_k}{np_k}\Big) \geqslant \ln 1$$

3. La fonction φ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$\varphi'(x) = \sum_{k=1}^{n} (f(k) - a)^2 \mathrm{e}^{(f(k)-a)x}.$$

Ainsi, la fonction φ est une fonction continue et strictement croissante, donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\varphi(\mathbb{R})$.
Comme $\mathcal{E}_a$ est non vide, il existe $X \in \mathcal{E}_a$ telle que $E(f(X)) = a$, *i.e.* telle que $\sum_{k=1}^{n} p_k(f(k) - a) = 0$.
Ainsi, comme les p_k sont strictement positifs, les $(f(k) - a)$ ne peuvent pas tous être de même signe ni tous nuls car f est injective. En factorisant donc par ceux qui sont maximaux ou par ceux qui sont minimaux, on obtient :

$$\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} \varphi(x) = -\infty.$$

Finalement, φ réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

4. On remarque que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\frac{\partial H}{\partial p_k}(X) = -\ln p_k - 1$. Ainsi, la hessienne de H est diagonale et ses coefficients diagonaux sont les nombres $-\frac{1}{p_k}$.

5. En utilisant les notations précédentes, on cherche les extremums de la fonction

$$H : (p_1, \ldots, p_n) \mapsto -\sum_{k=1}^{n} p_k \ln p_k$$

sous les conditions $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$ et $\sum_{k=1}^{n} f(k)p_k = a$. Ainsi, le gradient de H doit appartenir à l'espace vectoriel engendré par les vecteurs $(1, \ldots, 1)$ et $(f(1), \ldots, f(n))$. Donc il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\ln p_k + 1 = \lambda + \mu f(k)$, ou encore $p_k = \mathrm{e}^{\lambda - 1} e^{\mu f(k)}$.

De plus, on doit avoir : $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$ et $\sum_{k=1}^{n} (f(k) - a)p_k = 0$.

Or :

$$\sum_{k=1}^{n} (f(k)-a)p_k = \mathrm{e}^{\lambda-1} \sum_{k=1}^{n} (f(k)-a)\mathrm{e}^{\mu f(k)} = \mathrm{e}^{\lambda-1+a\mu} \sum_{k=1}^{n} (f(k)-a)\mathrm{e}^{\mu(f(k)-a)}$$

$$= \mathrm{e}^{\lambda-1+a\mu}\varphi(\mu), \text{ donc } \varphi(\mu) = 0.$$

Alors, $\sum_{k=1}^{n} p_k = \mathrm{e}^{\lambda-1} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{\mu f(k)} = 1$.

Comme la fonction φ est bijective, il existe un unique μ_0 tel que $\varphi(\mu_0) = 0$.

On pose alors $\lambda_0 = 1 - \ln\big(\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{\mu_0 f(k)}\big)$.

Ainsi, la fonction H possède un extremum atteint une fois sur $\mathcal{E}_a$. De plus, H est convexe, donc cet extremum est un minimum.

Exercice 3.09.

1. a) Montrer que la restriction de la fonction tan à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dans $\mathbb{R}$. On note arctan sa bijection réciproque.

b) Déterminer les limites de arctan en $+\infty$ et en $-\infty$.

c) Montrer que arctan est impaire.

d) Montrer que arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $(\arctan)'(x)$.

e) Montrer que pour $x > 0$, $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ et que pour $x < 0$, $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$.

f) Montrer que arctan admet un développement limité à l'ordre 3 en 0 et expliciter ce développement.

Soit $k \in \mathbb{R}$ et $f : x \longmapsto \dfrac{k}{1+x^2}$.

2. a) Déterminer k de telle sorte que f soit une densité de probabilité.

b) Soit X une variable aléatoire de densité f. X admet-elle un moment d'ordre 1 ?

3. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi que X. Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $Y_n = \frac{1}{n}\sup(X_1, \ldots, X_n)$.

a) Pour tout $n \geqslant 1$, déterminer la fonction de répartition de Y_n.

b) Montrer que (Y_n) converge en loi vers une variable aléatoire Y de fonction de répartition notée F que l'on déterminera.

c) On pose $Z = \frac{1}{Y}$. Déterminer la loi de Z.

Solution :

1. a) L'étude de la fonction tan montre qu'elle est strictement croissante de $]-\pi/2, \pi/2[$ sur $\mathbb{R}$ car $(\tan)'(x) = 1 + \tan^2(x)$.

C'est donc une bijection continue de $]-\pi/2, \pi/2[$ sur $\mathbb{R}$ de réciproque continue.

b) Comme $(\tan)'(x) \neq 0$, la fonction arctan est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et

$$(\arctan)'(x) = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1+x^2}$$

c) Les limites sont $-\pi/2$ et $\pi/2$.

d) En dérivant, il vient $\frac{d}{dx}\left(\arctan x + \arctan \frac{1}{x}\right) = 0$.

Ainsi $x \mapsto \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$ est constante sur chaque intervalle de continuité, c'est-à-dire sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$.

Il reste à prendre la valeur, par exemple, en $x = \pi/4$ et $x = -\pi/4$.

e) Comme $\frac{d}{dx}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + o(x^2)$

on intègre ce développement limité pour obtenir $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$

2. a) On doit demander $k > 0$ et $\int_{\mathbb{R}} \frac{k}{1+x^2} dx = 1$ soit $k = \frac{1}{\pi}$.

b) X n'a pas d'espérance puisque l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} \frac{|x|}{1+x^2} dx$ diverge.

3. a) Pour tout x réel

$$P(Y_n \leqslant x) = P(\sup_{1 \leq i \leq n} X_i \leqslant nx) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i \leqslant nx]\right) = \prod_{i=1}^{n} P([X_i \leqslant nx])$$

$$P(Y_n \leqslant x) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan(nx)\right)^n$$

b) • si $x < 0$, par la question 1 : $P(Y_n \leqslant x) = \frac{1}{\pi^n}(\arctan \frac{-1}{nx})^n \leqslant \frac{1}{2^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

• si $x = 0$, $P(Y_n \leqslant 0) = \frac{1}{2^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

• si $x > 0$, avec un développement limité (en fait un équivalent) :

$$\ln[P(Y_n \leqslant x)] = n \ln\left(1 - \frac{1}{\pi}\arctan\frac{1}{nx}\right) = -\frac{1}{\pi x} + o(1) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\frac{1}{\pi x}$$

Ainsi : $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \mathrm{e}^{-1/\pi x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

c) On sait que $Y(\Omega) = \mathbb{R}_+^*$ et, pour $x > 0$:

$$F_Z(x) = P(Y \geqslant \frac{1}{x}) = 1 - P(Y \leqslant \frac{1}{x}) = 1 - \mathrm{e}^{\frac{-1}{\pi x}}$$

Ainsi Z suit la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{\pi}$.

Exercice 3.10.

Soient n et p deux entiers supérieurs ou égaux à 2. L'entier p restera fixé dans tout l'exercice. On considère np variables aléatoires indépendantes $X_1, \ldots, X_{np}$. Pour tout k appartenant à $[\![1, p]\!]$, on suppose que la variable aléatoire X_k suit une loi de Poisson de paramètre λ_1 et pour tout $k \in [\![p+1, np]\!]$ que X_k suit une loi de Poisson de paramètre λ_2. On pose

$$S_n = \sum_{i=1}^{np} X_i, \quad A = \sum_{i=1}^{p} X_i, \quad B_n = \sum_{i=p+1}^{np} X_i.$$

1. Déterminer les lois des variables aléatoires A et B_n.

2. Quelle est la loi de S_n ?

3. Soit $\ell \in \mathbb{N}$.

a) On considère une variable aléatoire Y_ℓ dont la loi est donnée par :

$P(Y_\ell = m) = P_{(S_n=\ell)}(A = m)$ pour tout $m \in \mathbb{N}$.

Déterminer explicitement cette loi.

b) De même, pour $\ell \in \mathbb{N}$, on considère une variable aléatoire Z_ℓ dont la loi est donnée par $P(Z_\ell = m) = P_{(S_n=\ell)}(B_n = m)$ pour tout $m \in \mathbb{N}$.
Expliciter cette loi.

4. On définit les deux variables U_n et V_n par :

$$U_n = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + (n-1)\lambda_2} S_n \text{ et } V_n = \frac{(n-1)\lambda_2}{\lambda_1 + (n-1)\lambda_2} S_n$$

Montrer que les suites de variables aléatoires $(\frac{U_n}{n})_n$ et $(\frac{V_n}{n})_n$ convergent en probabilité vers deux variables aléatoires que l'on déterminera.

Solution :

1. Comme $X_1, \ldots, X_p$ sont indépendantes et suivent la même loi de Poisson de paramètre λ_1, A suit une loi de Poisson de paramètre $p\lambda_1$.

De la même manière on montre que B_n suit une loi de Poisson de paramètre $(n-1)p\lambda_2$.

2. Les variables A et B_n sont construites à partir de deux blocs disjoints d'une famille de variables indépendantes, le cours nous dit que A et B_n sont indépendantes.

Prenant en compte les résultats de la question 1, on en déduit que $S_n = A + B_n$ suit une loi de Poisson de paramètre $p\lambda_1 + (n-1)p\lambda_2$.

3. a) Si $m > \ell$, on a $P(Y_\ell = m) = P(A = m|S_n = \ell) = 0$. Si $0 \leqslant m \leqslant \ell$, il vient :

$$\begin{aligned}
P(Y_\ell = m) = P(A = m|S_n = \ell) &= \frac{P((A = m) \cap (S_n = \ell))}{p(S_n = \ell)} \\
&= \frac{P((A = m) \cap (B_n = \ell - m))}{p(S_n = \ell)} \\
&= \frac{P(A = m)P(B_n = \ell - m)}{p(S_n = \ell)} \\
&= \frac{\ell!}{m!(\ell - m)!} \frac{(p\lambda_1)^m((n-1)p\lambda_2)^{\ell-m}}{(p\lambda_1 + (n-1)p\lambda_2)^\ell} \\
&= \binom{m}{\ell} (\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + (n-1)\lambda_2})^m (1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + (n-1)\lambda_2})^{\ell-m}.
\end{aligned}$$

La variable Y suit donc une loi binomiale de paramètres $(\ell, \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + (n-1)\lambda_2})$.

b) De façon analogue on trouve que Z suit une loi binomiale de paramètres $(\ell, \frac{(n-1)\lambda_2}{\lambda_1 + (n-1)\lambda_2})$.

4. Avec les formules de la question précédente, on trouve aisément

$$\begin{aligned}
E\left(\frac{U_n}{n}\right) &= \frac{1}{n} \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + (n-1)\lambda_2} (p\lambda_1 + (n-1)p\lambda_2) = \frac{p}{n}\lambda_1 \\
E\left(\frac{V_n}{n}\right) &= (1 - \frac{1}{n})p\lambda_2 \\
V\left(\frac{U_n}{n}\right) &= \frac{1}{n^2} (\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + (n-1)\lambda_2})^2 V(S_n) = \frac{p\lambda_1^2}{n^2} \frac{1}{\lambda_1 + (n-1)\lambda_2} \\
V\left(\frac{V_n}{n}\right) &= (1 - \frac{1}{n})^2 p\lambda_2^2 \frac{1}{\lambda_1 + (n-1)\lambda_2}.
\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$, pour n assez grand on voit avec l'inégalité triangulaire que

$$\{|\frac{V_n}{n} - p\lambda_2| > \varepsilon\} \subseteq \{|\frac{V_n}{n} - (1 - 1/n)p\lambda_2| > \varepsilon/2\}.$$

En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on en déduit que la suite $(\frac{V_n}{n})$ converge en probabilité vers la variable certaine $p\lambda_2$ et la suite de variables $(\frac{U_n}{n})$ converge en probabilité vers 0.

Exercice 3.11.

Soit X et Y deux variables aléatoires à densité indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de densités respectives f et g nulles hors du segment $[0, 1]$.

1. a) On pose $U = \ln X$, déterminer une densité de U.

b) On pose $V = \ln(1 - Y)$, déterminer une densité de V.

c) Montrer qu'une densité de la variable aléatoire $Z = X(1-Y)$ est donnée par

$$x \mapsto \int_x^1 f\big(\frac{x}{t}\big) g(1-t) \frac{dt}{t}$$

pour $x \in]0,1[$ et $x \mapsto 0$ sinon.

Ce résultat pourra être utilisé dans la suite de cet exercice, même s'il n'a pas été démontré.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi à valeurs dans $[0,1]$. On lui associe la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de segments définie par $S_n = \big[\prod_{i=1}^{n+1} X_i, \prod_{i=1}^{n} X_i\big]$ de longueur L_n.

2. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, on a $L_n = X_1 Y_{n-1}$, où Y_{n-1} est une variable aléatoire indépendante de (X_1) de même loi que L_{n-1}.

3. On suppose que la loi commune des variables aléatoires X_n est la loi uniforme sur $[0,1]$. Déterminer, par récurrence, la loi de L_n.

4. Déterminer l'espérance et la variance de L_n.

Solution :

1. a) b) c) Pour déterminer la loi de $X(1-Y)$ passons au logarithme. Comme $X(\Omega) = Y(\Omega) =]0,1[$, on a $\ln X(\Omega) = \ln(1-Y)(\Omega) = \mathbb{R}^{-*}$.

Soit $x < 0$. On a, par croissance de la fonction exponentielle :

$$P(\ln(X) < x) = P(X < \mathrm{e}^x) = F_X(e^x) \Longrightarrow f_{\ln X}(x) = \mathrm{e}^x f(\mathrm{e}^x)$$

De même : $P(\ln(1-Y) < x) = P(Y > 1 - \mathrm{e}^x) = 1 - F_Y(1-\mathrm{e}^x)$, donne :

$$f_{\ln(1-Y)}(x) = \mathrm{e}^x g(1-\mathrm{e}^x)$$

Par indépendance, comme $\ln Z = \ln(X) + \ln(1-Y)$, en demandant $u < 0$ et $x - u < 0$:

$$f_{\ln Z}(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{\ln X}(x-u) f_{\ln(1-Y)}(u) du = \int_{-\infty}^{0} f_{\ln X}(x-u) \mathrm{e}^u g(1-\mathrm{e}^u) du$$

$$f_{\ln Z}(x) = \int_x^0 \mathrm{e}^{x-u} f(\mathrm{e}^{x-u}) \mathrm{e}^u g(1-\mathrm{e}^u) du$$

$$= \mathrm{e}^x \int_x^0 f(\mathrm{e}^{x-u}) g(1-\mathrm{e}^u) du = \mathrm{e}^x \int_{\mathrm{e}^x}^0 f\big(\frac{\mathrm{e}^x}{v}\big) g(1-v) \frac{dv}{v} \text{ (avec } v = e^u)$$

Or, pour $x \in]0,1[$, $P(X(1-Y) \leqslant x) = P(\ln Z \leqslant \ln x)$ et

$f_{X(1-Y)}(x) = \frac{1}{x} f_{\ln Z}(\ln x)$, soit :

$$f_{X(1-Y)}(x) = \frac{1}{x} \times x \int_x^1 f\big(\frac{x}{v}\big) g(1-v) \frac{dv}{v} = \int_x^1 f\big(\frac{x}{v}\big) g(1-v) \frac{dv}{v}$$

2. De manière évidente $L_n = X_1\big(\prod_{i=2}^{n} X_i - \prod_{i=2}^{n+1} X_i\big) = X_1 Y_{n-1}$, avec Y_{n-1} indépendante de X_1 et de même loi que L_{n-1}.

3. $\star$ Déterminons la loi de $L_1 = X_1(1 - X_2)$.

Par la première question, pour tout $x \in]0,1[$, $f_{L_1}(x) = \displaystyle\int_x^1 \frac{dt}{t} = -\ln x$.

$\star$ Déterminons la loi de $L_2 = X_1 L_1 = X_1(1 - (1 - L_1))$.

On a : $P(1 - L_1 \leqslant x) = P(L_1 \geqslant 1 - x) = 1 - F_{L_1}(1 - x)$, donc :

$f_{1-L_1}(x) = f_{L_1}(1 - x) = -\ln(1 - x)$, pour $0 < x < 1$ et ainsi :

$$f_{L_2}(x) = -\int_x^1 1 \times \ln(v)\frac{dv}{v} = \frac{\ln^2 x}{2} = \frac{(-\ln x)^2}{2}$$

On montre alors par une récurrence facile que la loi de L_n est donnée pour $x \in]0,1[$ par $f_{L_n}(x) = \dfrac{(-\ln x)^n}{n!}$

4. Calculons les deux premiers moments de L_n. Avec le changement de variable $u = -\ln x$, il vient :

$$E(L_n) = \int_0^1 x f_{L_n}(x)dx = \int_0^1 x\frac{(-\ln(x))^n}{n!}dx = \int_0^{+\infty} \frac{u^n}{n!}\mathrm{e}^{-2u}du = \frac{1}{2^{n+1}}$$

(poser $u = \dfrac{t}{2}$ pour retrouver une intégrale du programme)

$$E(L_n^2) = \int_0^1 x^2\frac{(-\ln(x))^n}{n!}dx = \int_0^{+\infty} \frac{u^n}{n!}\mathrm{e}^{-3u}du = \frac{1}{3^{n+1}} \quad \text{(idem)}$$

et :

$$V(L_n) = \frac{1}{3^{n+1}} - \frac{1}{4^{n+1}}$$

Exercice 3.12.

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Soit $(X_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $[0,1]$. Pour tout entier naturel n non nul, on note $M_n = \sup\{X_i,\ i \in [\![1,n]\!]\}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la fonction de répartition F_n de la variable aléatoire $n(M_n - 1)$.

2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(F_n(x))_n$ converge vers une valeur $g(x)$.

3. Montrer que g', définie sur $\mathbb{R}^*$, est une densité de probabilité. On notera G une variable aléatoire de densité g'.

4. Déterminer $E(G)$.

Soient λ un réel strictement positif et $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle de paramètre λ. Pour tout entier naturel non nul n, on pose $m_n = \inf\{X_i, 1 \leq i \leq n\}$ et $M_n = \sup\{X_i,\, 1 \leqslant i \leqslant n\}$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que m_n suit une loi exponentielle de paramètre $n\lambda$. En déduire la loi de la variable aléatoire nm_n.

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la fonction de répartition F_n de la variable aléatoire $Z_n = \lambda M_n - \ln n$.

7. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, il existe $g(t) \in \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(t) = g(t)$.

8. Montrer que g est une fonction de répartition.

Solution :

1. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, $n(M_n - 1)$ prend ses valeurs entre $-n$ et 0 et pour x dans ce domaine :

$$\begin{aligned} P(n(M_n-1)\leqslant x) &= P(\forall\, i \in [\![1,n]\!],\, X_i \leqslant \frac{x}{n}+1) = [P(X_1 \leqslant \frac{x}{n}+1)]^n \\ &= \left(1+\frac{x}{n}\right)^n. \end{aligned}$$

Si $x \in \mathbb{R}_+$, $P(n(M_n-1)\leqslant x) = 1$ et si $x < -n, P(n(M_n-1)\leqslant x) = 0$.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}_-$, $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x) = \mathrm{e}^x$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x) = 1$. On pose ainsi $g(x) = \min\{\mathrm{e}^x, 1\}$.

3. La fonction g est croissante sur $\mathbb{R}$, de limite nulle en $-\infty$ et de limite 1 en $+\infty$. De plus g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, avec pour $x \in \mathbb{R}_-^*$, $g'(x) = \mathrm{e}^x$ et g' est nulle sur $\mathbb{R}_+^*$: g' est bien une densité de probabilité (on prend ce que l'on veut en 0).

4. En utilisant la formule de transfert, et en passant tout de suite à la limite :

$$E(G) = \int_{\mathbb{R}_-} x\mathrm{e}^x dx = \left[x\mathrm{e}^x\right]_{\to-\infty}^0 - \int_{\mathbb{R}_-} \mathrm{e}^x dx = -1$$

5. Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

$$\begin{aligned} P(m_n > x) &= P(\forall\, i \in [\![1,n]\!],\, X_i > x) = P(X_1 > x)^n \\ &= \mathrm{e}^{-n\lambda x} \end{aligned}$$

Ainsi, $P(m_n \leqslant x) = 1 - \mathrm{e}^{-n\lambda x}$ et m_n suit une loi exponentielle de paramètre $n\lambda$.
En reprenant le calcul précédent, ou en utilisant les propriétés de la loi exponentielle, nm_n suit une loi exponentielle de paramètre λ.

6. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$F_n(x) = P(M_n \leqslant \frac{x+\ln n}{\lambda}) = P(\forall\ i \in [\![1,n]\!], X_i \leqslant \frac{x+\ln n}{\lambda})$$
$$= [P(X_1 \leqslant \frac{x+\ln n}{\lambda})]^n = \big(1 - \mathrm{e}^{-\lambda\frac{x+\ln n}{\lambda}}\big)^n \mathbf{1}_{[x\geq -\ln n]}$$
$$= \big(1 - \frac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\big)^n \mathbf{1}_{[x\geq -\ln n]}.$$

7. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}}$.

8. La fonction g est continue, strictement croissante, de limite nulle en $-\infty$ et de limite 1 en $+\infty$. Tout est dit.

Exercice 3.13.

1. On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction g par $g(x) = \displaystyle\int_{-1}^{1} |x-t|\,dt$.

Donner, suivant les valeurs de x, l'expression explicite de $g(x)$ en fonction de x et vérifier que g est continue sur $\mathbb{R}$.

Dans la suite de l'exercice, X est une variable à densité définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On définit sur Ω l'application Y par :

$$\forall\,\omega \in \Omega, Y(\omega) = \int_{-1}^{1} \big|X(\omega) - t\big|\,dt$$

On admet que Y est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

2. On suppose dans cette question que X suit la loi uniforme sur $[-1, 1]$.

a) Exprimer Y en fonction de X.

b) Donner la fonction de répartition de Y.

c) Vérifier que Y est une variable à densité et donner une densité de Y.

d) Calculer l'espérance de Y.

3. On considère dans cette question une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$, définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, où, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, X_n suit la loi normale d'espérance nulle et d'écart-type $1/n$.

On définit, pour tout entier naturel n non nul, l'application Y_n par :

$$\forall\omega \in \Omega, Y_n(\omega) = \int_{-1}^{1} \big|X_n(\omega) - t\big|\,dt$$

On admet que, pour tout entier naturel non nul, Y_n est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
On note F_{Y_n} la fonction de répartition de Y_n et Φ celle de la loi normale centrée réduite.

a) Exprimer, pour tout réel y, $F_{Y_n}(y)$ en fonction de $\Phi(y)$ et de n.

b) Montrer que la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ converge en loi.

Solution :

1. Il faut distinguer trois cas :

⋆ si $x < 1$, alors, pour tout t de $[-1, 1]$, on a $x < t$, d'où $|x - t| = t - x$. On a donc dans ce cas $g(x) = \displaystyle\int_{-1}^{1} (t - x)\, dt = -2x$.

⋆ si $-1 \leq x \leq 1$, on procède de manière analogue et :

$$g(x) = \int_{-1}^{x} (x - t)dt + \int_{x}^{1} (t - x)dt = x^2 + 1.$$

⋆ si $x > 1$, on a $|x - t| = x - t$ et $g(x) = 2x$.

En conclusion : $\forall\, x \in \mathbb{R}, g(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < -1 \\ x^2 + 1 & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

On vérifie alors sans problème que g est continue sur $\mathbb{R}$.

2. a) On utilise la question précédente ou pour tout ω de Ω, le nombre $x = X(\omega)$ est dans l'intervalle $[-1, 1]$.
On a donc, en utilisant la relation de Chasles, comme ci-dessus :
$Y(\omega) = X^2(\omega) + 1$, cette égalité étant valable pour tout élément ω de Ω, on a finalement, en simplifiant :

$$Y = X^2 + 1$$

b) On constate donc que $Y(\Omega) = [1, 2]$.

Si y est dans $[1, 2]$, on a donc : $P([Y \leq y]) = P([X^2 + 1 \leq y]) = P([X^2 \leq y - 1])$.

Soit encore : $P([Y \leq y]) = P([-\sqrt{y-1} \leq X \leq \sqrt{y-1}])$. On a donc finalement, pour $y \in [1, 2]$, $F_Y(y) = F_X(\sqrt{y-1}) - F_X(-\sqrt{y-1})$.

Pour tout réel x de $[-1, 1]$, on a $F_X(x) = \dfrac{x+1}{2}$.

On a donc, pour y dans $[1, 2]$, $F_Y(y) = \dfrac{\sqrt{y-1}+1}{2} - \dfrac{-\sqrt{y-1}+1}{2}$.

En conclusion : $\forall\, y \in \mathbb{R}, \quad F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 1 \\ \sqrt{y-1} & \text{si } 1 \leqslant y \leqslant 2 \\ 1 & \text{si } y > 1 \end{cases}$

c) F_Y est évidemment de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 1[$, sur $]1, 2[$ et sur $]2, +\infty[$.
On vérifie facilement qu'elle est continue en 1 et en 2. Y est donc bien une variable à densité. On obtient alors une densité en dérivant sur les trois intervalles ouverts précédents et en rajoutant arbitrairement des valeurs en 1 et en 2.
On obtient par exemple :

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{y-1}} & \text{si } y \in]1,2[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

d) On a $E(Y) = \displaystyle\int_1^2 \frac{y}{\sqrt{y-1}} dy$, qui est une intégrale convergente (en fait Y est une variable aléatoire bornée, elle admet donc une espérance).

$$E(Y) = \int_0^1 \frac{y+1}{\sqrt{y}}\, dy = \left[\tfrac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} + 2y^{\frac{1}{2}}\right]_0^1 = \frac{8}{3}$$

(On aurait pu remarquer que $E(Y) = E(X^2)+1$ et utliser la formule donnant le moment d'ordre 2 d'une loi uniforme)

3. a) On utilise le système complet d'événements

$$([X_n < -1], [-1 \leqslant X_n \leqslant 1], [X_n > 1])$$

Ainsi, pour tout y réel :

$$\begin{aligned} P(Y_n \leqslant y) = {} & P([-2X_n \leqslant y] \cap [X_n < -1]) \\ & + P([X_n^2 + 1 \leqslant y] \cap [-1 \leqslant X_n \leqslant -1]) + P([2X_n \leqslant y] \cap [X_n > 1]) \end{aligned}$$

- si $y \leqslant 1$, on a $y/2 \leqslant 1/2$ et chacune des trois probabilités ci-dessus est nulle.
- si $1 \leqslant y \leqslant 2$, seule la seconde probabilité n'est pas nulle et

$$P(Y_n \leqslant y) = P(-\sqrt{y-1} \leqslant X_n \leqslant \sqrt{y-1})$$

- si $y \geqslant 2$, seule la troisième probabilité n'est pas nulle et

$$P(Y_n \leqslant y) = P([1 \leqslant X_n \leqslant y/2] \cup [-y/2 \leqslant X_n \leqslant -1])$$

On a donc :

$$\forall\, y \in \mathbb{R}, F_{Y_n}(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leqslant 1 \\ F_{X_n}\big(\sqrt{y-1}\big) - F_{X_n}\big(-\sqrt{y-1}\big) & \text{si } 1 \leqslant y \leqslant 2 \\ F_{X_n}\big(\frac{y}{2}\big) - F_{X_n}\big(-\frac{y}{2}\big) & \text{si } y \geqslant 2 \end{cases}$$

D'autre part, comme X_n suit la loi $\mathcal{N}(0, \frac{1}{n})$, nX_n suit la loi normale centrée réduite. On a donc, pour tout réel z, $F_{X_n}(z) = \Phi(nz)$.

On obtient finalement :

$$\forall\, y \in \mathbb{R}, F_{Y_n}(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leqslant 1 \\ \Phi\big(n\sqrt{y-1}\big) - \Phi\big(-n\sqrt{y-1}\big) & \text{si } 1 \leqslant y \leqslant 2 \\ \Phi\big(\frac{ny}{2}\big) - \Phi\big(-\frac{ny}{2}\big) & \text{si } y \geqslant 2 \end{cases}$$

b) $y \leq 1 \implies \lim\limits_{n\to+\infty} F_{Y_n}(y) = 0$, $y > 1 \implies \lim\limits_{n\to+\infty} F_{Y_n}(y) = 1$.

En tout point où la fonction de répartition F de la variable aléatoire constante égale à 1 est continue, on a donc $\lim\limits_{n\to\infty} F_{Y_n}(x) = F(x)$: $(Y_n)_n$ converge en loi vers la variable constante égale à 1.

Exercice 3.14.

1. Soit Y une variable aléatoire à valeurs positives. Montrer que pour tout réel $b > 0$

$$P(Y \geqslant b) \leqslant \frac{E(Y)}{b}$$

On considère dans la suite une variable aléatoire X et un réel t strictement positif. On suppose que la variable aléatoire e^{tX} possède une espérance.

2. Montrer que, pour tout réel a : $P(X \geqslant a) \leqslant \mathrm{e}^{-ta} \times E(\mathrm{e}^{tX})$.

Dans la suite, on suppose que X suit la loi normale centrée réduite.

3. a) Montrer que, pour tout réel t strictement positif, la variable aléatoire e^{tX} possède une espérance et que : $E(\mathrm{e}^{tX}) = \mathrm{e}^{t^2/2}$.

b) En déduire que pour tout réel $a > 0$, $P(X \geqslant a) \leqslant \mathrm{e}^{-a^2/2}$.

Solution :

1. Soit $\mathbf{1}_B$ la variable indicatrice de l'événement $B = [X \geqslant b]$.
Procédons par disjonction de cas :

- si $\omega \in B$, alors $X(\omega) \geqslant b \implies \dfrac{X(\omega)}{b} \geqslant 1 = \mathbf{1}_B(\omega)$
- si $\omega \notin B$, alors, comme $b > 0$, $\dfrac{X(\omega)}{b} \geqslant 0 = \mathbf{1}_B(\omega)$

Ainsi $\mathbf{1}_B \leqslant \dfrac{X}{b}$. Par croissance et linéarité de l'espérance
$E(\mathbf{1}_B) = P(B) = P(X \geqslant b) \leqslant \dfrac{E(X)}{b}$, ce qui permet de conclure.

2. On applique l'inégalité précédente à la variable positive e^{tX} en remplaçant b par $\mathrm{e}^{ta} > 0$ et on trouve : $P(\mathrm{e}^{tX} \geqslant \mathrm{e}^{ta}) \leqslant \dfrac{E(\mathrm{e}^{tX})}{\mathrm{e}^{ta}}$
La fonction ln est strictement croissante et t strictement positif, on en déduit :

$$P(X \geqslant a) = P(tX \geqslant ta) = P(\mathrm{e}^{tX} \geqslant \mathrm{e}^{ta}) \leqslant \frac{E(\mathrm{e}^{tX})}{\mathrm{e}^{ta}}$$

3. a) L'intégrale définissant $E(\mathrm{e}^{tX})$ est l'intégrale $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{tx} \mathrm{e}^{-t^2/2} dx$.
Or : $tx - \dfrac{t^2}{2} = \dfrac{-(x-t)^2}{2} + \dfrac{t^2}{2}$ (forme canonique du trinôme).
On reconnaît l'intégrale d'une fonction proportionnelle à une densité normale et :

$$E(\mathrm{e}^{tX}) = \mathrm{e}^{t^2/2}$$

b) On sait que $P(X \geqslant a) \leqslant \mathrm{e}^{-ta} E(\mathrm{e}^{tX})$, ceci pour tout réel $t > 0$. En remplaçant on trouve :

$$P(X \geqslant a) \leqslant \mathrm{e}^{-ta} \mathrm{e}^{t^2/2}$$

Il reste à prendre $t = a$ pour obtenir le résultat demandé.

Exercice 3.15.

Dans cet exercice, f est une densité de probabilité nulle sur $]-\infty, 0[$ et positive et continue sur $[0, +\infty[$. On suppose de plus que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x f(x)\, dx$ est convergente.

1. Soit $t > 0$ un réel fixé. Un client se présente à un automate pour y effectuer un retrait d'argent. On suppose que l'instant d'arrivée X de ce client à partir de l'instant initial noté 0 est une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $]0, t[$.
Le client utilise alors l'automate pendant une durée aléatoire Y, indépendante de X et admettant f comme densité.
On appelle p_t la probabilité que le client soit encore en train d'utiliser l'automate à l'instant t.

a) Montrer que $X + Y$ est une variable aléatoire à densité dont une densité est donnée par la fonction g :

$$g(z) = \frac{1}{t}\int_0^{\min(t,z)} f(z-u)du, \text{ si } z \geqslant 0,\ g(z) = 0 \text{ sinon}$$

b) On note F la fonction de répartition de Y. Montrer que :

$$\forall\, z \in [0, t], g(z) = \frac{F(z)}{t}$$

c) Montrer que $P(X + Y \leqslant t) = F(t) - \frac{1}{t}\displaystyle\int_0^t z f(z)\, dz$.

d) Déterminer $\lim\limits_{t\to+\infty} [\, tP(Y > t)\,]$.

e) Justifier que Y admet une espérance et montrer que cette espérance vérifie $E(Y) = \lim\limits_{t\to+\infty} (t\, p_t)$

2. Des clients se présentent dans un hall contenant un grand nombre d'automates. On fixe un instant initial 0 et pour tout réel $t > 0$, on note :

• C_t la variable aléatoire égale au nombre de clients se présentant à l'un des automates entre les instants 0 et t.
• D_t la variable aléatoire égale au nombre de clients encore en train d'utiliser un automate à l'instant t.

On suppose de plus que :

• C_t suit une loi de Poisson de paramètre λt, avec $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ fixé.

• Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de D_t sachant $[C_t = n]$ est binomiale de paramètre (n, p_t), où p_t est défini comme dans la première question.

a) Montrer que D_t suit une loi usuelle dont on précisera le ou les paramètre(s).

b) Montrer que D_t admet une espérance que l'on précisera.

c) Montrer la suite de variables aléatoires $(D_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

Solution :

1. a) La variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $]0,t[$. Une de ses densités est donc donnée par la fonction $h : x \to \mathbf{1}_{]0,t[}\frac{1}{t}$, où $\mathbf{1}_{]0,t[}$ désigne la fonction indicatrice de $]0,t[$. Comme X et Y sont supposées indépendantes, $X+Y$ est une variable aléatoire continue dont une densité est donnée par la fonction g définie par :

$$\forall\, z \in \mathbb{R}, g(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(u)f(z-u)du = \frac{1}{t}\int_0^t f(z-u)du.$$

g est évidemment nulle sur $\mathbb{R}^-$ et on obtient pour $z \geqslant 0$:

$$g(z) = \frac{1}{t}\int_0^{\min(t,z)} f(z-u)du.$$

b) Si $z \in [0,t]$, $\min(t,z) = z$ et $g(z) = \frac{1}{t}\int_0^z f(z-u)du$. En effectuant dans l'intégrale le changement de variable $v = z-u$, on trouve

$$g(z) = \frac{1}{t}\int_0^z f(v)dv = \frac{F(z)}{t}.$$

c) Comme t est strictement positif,

$$P(X+Y \leqslant t) = \int_{-\infty}^t g(z)dz = \int_0^t g(z)dz = \int_0^t \frac{F(z)}{t}dz.$$

On effectue alors une intégration par parties en posant $u(z) = F(z)$ et $v'(z) = 1$. On obtient

$$P(X+Y \leqslant t) = F(t) - \frac{1}{t}\int_0^t zf(z)dz.$$

d) Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $0 \leqslant tP[Y > t] = \int_t^{+\infty} tf(z)dz \leqslant \int_t^{+\infty} zf(z)dz$.

Or, par hypothèse, l'intégrale $\int_0^{+\infty} zf(z)dz$ converge.

Par conséquent : $\lim\limits_{t\to+\infty}\int_t^{+\infty} zf(z)dz = 0$. Par encadrement, on en déduit que :

$$\lim_{t\to+\infty}\left[\, tP(Y>t)\,\right] = 0.$$

e) Comme, par hypothèse, l'intégrale $\int_0^{+\infty} zf(z)dz$ est convergente, la variable Y admet une espérance. De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$tp_t = tP[X+Y>t] = t(1-P[X+Y \leqslant t]) = t(1-F(t)) + \int_0^t zf(z)dz$$

$$tp_t = tP[Y>t] + \int_0^t zf(z)dz.$$

En passant à la limite, on trouve, d'après la question précédente, que

$$\lim_{t\to+\infty}(tp_t) = \int_0^{+\infty} zf(z)dz = E(Y).$$

2. a) On a déjà $D_t(\Omega) = \mathbb{N}$. En appliquant la formule des probabilités totales au système complet d'événements $([C_t = n])_{n\in\mathbb{N}}$ et en remarquant que l'on doit avoir $D_t \leqslant C_t$, on obtient :

$$P(D_t = n) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p_t^k (1-p_t)^{n-k} \mathrm{e}^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda t} p_t^k (\lambda t)^k}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{(q_t \lambda t)^{n-k}}{(n-k)!}$$

$$= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda t}(p_t\lambda t)^k}{k!} \mathrm{e}^{\lambda t q_t}$$

D'où $\forall\, k \in \mathbb{N}, P(D_t = k) = \frac{(\lambda t p_t)^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda t p_t}$, ce qui prouve que D_t suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda t p_t$.

b) Par propriété de la loi de Poisson, $E(D_t) = \lambda t p_t$.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(D_n = k) = \frac{(\lambda n p_n)^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda n p_n}$. Or, d'après la question 1.e., $\lim_{n\to\infty}(np_n) = E(Y)$.

D'où, $\lim_{n\to\infty} P(D_n = k) = \frac{(\lambda E(Y))^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda E(Y)}$. La suite (D_n) converge donnc en loi vers une variable D qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda E(Y)$.

Exercice 3.16.

Dans tout l'exercice, X est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1. a) Montrer que $P(|X-\lambda| \geqslant \lambda) \leqslant \frac{1}{\lambda}$.

b) En déduire l'inégalité $P(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \frac{1}{\lambda}$.

2. On considère dans toute cette question une variable aléatoire discrète Z définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, d'espérance nulle et de variance σ^2.

a) Montrer que

$$\forall\, a > 0, \forall\, x \geqslant 0, P(Z \geqslant a) \leqslant P[(Z+x)^2 \geqslant (a+x)^2].$$

b) Montrer que $\forall\, a > 0, \forall\, x \geqslant 0, P(Z \geqslant a) \leqslant \dfrac{\sigma^2 + x^2}{(a+x)^2}$.

c) Montrer que $\forall\, a > 0, P(Z \geqslant a) \leqslant \dfrac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}$.

d) En déduire que $P(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \dfrac{1}{\lambda + 1}$.

3. Pour tout réel t, on pose $G_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k)\, t^k$.

a) Pour tout réel t, justifier l'existence de $G_X(t)$ et calculer sa valeur.

b) Montrer que : $\forall\, t \geqslant 1, \forall\, a > 0, P(X \geqslant a) \leqslant \dfrac{G_X(t)}{t^a}$.

c) En déduire que $P(X \geqslant 2\lambda) \leqslant (\frac{\mathrm{e}}{4})^{\lambda}$.

Solution :

1. a) On applique l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à X. Comme $E(X) = V(X) = \lambda$, on obtient

$$P(|X - \lambda| \geqslant \lambda) \leqslant \frac{V(X)}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda}.$$

b) On remarque que $[|X-\lambda| \geqslant \lambda] = [X-\lambda \geqslant \lambda] \cup [X-\lambda \leqslant -\lambda] \supset [X \geqslant 2\lambda]$. On a donc $P[X \geqslant 2\lambda] \leqslant P(|X - \lambda| \geqslant \lambda) \leqslant \dfrac{1}{\lambda}$.

2. a) Pour tout $a > 0$ et tout $x \geqslant 0$, on a

$[(Z + x)^2 \geqslant (a + x)^2] = [Z + x \geqslant a + x] \cup [Z + x \leqslant -a - x] \supset [Z \geqslant a]$.

D'où l'inégalité demandée par croissance de la probabilité.

b) On applique l'inégalité de Markov à la variable aléatoire positive $(Z + x)^2$. On obtient :

$$P[(Z + x)^2 \geqslant (a + x)^2] \leqslant \frac{E((Z + x)^2)}{(a + x)^2}.$$

Comme $E(Z) = 0$, on a :

$E((Z + x)^2) = E(Z^2) + 2xE(Z) + x^2 = V(Z) + x^2 = \sigma^2 + x^2$.

En utilisant la question précédente, on trouve ainsi :

$$P(Z \geqslant a) \leqslant P[(Z + x)^2 \geqslant (a + x)^2] \leqslant \frac{\sigma^2 + x^2}{(a + x)^2}.$$

c) Soit $a > 0$ un réel fixé. On étudie la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sigma^2 + x^2}{(a + x)^2}$ définie sur $\mathbb{R}^+$. Comme, pour tout $x \geqslant 0$, $f'(x) = \dfrac{2(ax - \sigma^2)}{(a + x)^3}$, il s'ensuit que f atteint son minimum en $x = \dfrac{\sigma^2}{a}$, avec $f(\frac{\sigma^2}{a}) = \dfrac{\sigma^2}{a^2 + \sigma^2}$. D'où la formule demandée.

d) On applique le résultat précédent à la variable aléatoire $Z = X - \lambda$ vérifiant $E(Z) = 0$ et $V(Z) = \lambda = \sigma^2$. En prenant $a = \lambda > 0$, l'inégalité de la question précédente devient :

$$P(X \geqslant 2\lambda) = P(X - \lambda \geqslant \lambda) \leqslant \frac{\sigma^2}{\lambda^2 + \sigma^2} = \frac{1}{\lambda + 1}.$$

3. a) Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$G_X(t) = \lim_{N \to +\infty} (\sum_{k=0}^{N} P(X = t)t^k) = \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} t^k = \mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda t} = \mathrm{e}^{\lambda(t-1)}.$$

b) Pour tout $t \geqslant 1$ et tout $a > 0$,

$$G_X(t) \geqslant \sum_{k \geq a} P(X = k)t^k \geqslant t^a \sum_{k \geq a} P(X = k) = t^a P(X \geqslant a).$$

D'où l'inégalité demandée.

c) Pour tout $a > 0$ et tout $t \geqslant 1$, on a donc $P(X \geqslant a) \leqslant \dfrac{G_X(t)}{t^a} = \dfrac{\mathrm{e}^{\lambda(t-1)}}{t^a}$.
En prenant $a = 2\lambda > 0$ et $t = 2$, on obtient $P(X \geqslant 2\lambda) \leqslant (\frac{\mathrm{e}}{4})^{\lambda}$.

Exercice 3.17.

Le génotype d'un individu est un ensemble de 2 gènes pris parmi a et A. Trois génotypes sont possibles : 1 (aa), 2 (aA) et 3 (AA) (L'ordre ne compte pas). On s'intéresse à l'évolution d'une population de grande taille (génération 0) dont la proportion du génotype i est notée u_i pour $i \in \{1, 2, 3\}$. On suppose les mariages aléatoires et on rappelle que le génotype d'un enfant est formé d'un gène issu de celui de chaque parent, les deux gènes d'un parent ayant la même probabilité d'être transmis.

Soit E le génotype d'un enfant de la première génération.

1. a) Exprimer les probabilités conditionnelles : $P_{(M=i,F=j)}(E = 1)$ pour $(i, j) \in \{1, 2, 3\}^2$ où F et M sont les génotypes du père et de la mère.

b) En déduire que : $P(E = 1) = (u_1 + \dfrac{u_2}{2})^2$, puis la valeur de $P(E = 3)$.

c) On pose $\theta = u_1 + \dfrac{u_2}{2}$. Déterminer en fonction de θ les proportions des divers génotypes à la première génération : q_1, q_2, q_3.

d) Calculer les proportions des divers génotypes à la deuxième génération et en déduire qu'elles sont inchangées au cours du temps.

2. On dispose d'un échantillon de n individus. On note X_i le génotype du $i^{\text{ème}}$ individu, on a alors : $P(X_i = j) = q_j$. Les variables X_i, $1 \leqslant i \leqslant n$ sont supposées indépendantes. Pour $j \in \{1, 2, 3\}$, on note N_j le nombre d'individus de l'échantillon possédant le génotype j.

a) Pour $j = 1, 2, 3$, déterminer la loi de N_j, son espérance et sa variance. En déduire un estimateur sans biais de q_j.

b) Soit n_1, n_2, n_3 3 entiers naturels tels que : $n = n_1 + n_2 + n_3$, montrer que :

$$P(N_1 = n_1, N_2 = n_2, N_3 = n_3) = \frac{n!}{n_1!n_2!n_3!} q_1^{n_1} q_2^{n_2} q_3^{n_3}$$

c) Calculer $\mathrm{Cov}(N_1, N_2)$.

3. Pour tout entier $N > 0$, on pose : $\theta_n = \frac{N_1}{n} + \frac{N_2}{2n}$

a) Montrer que θ_n est un estimateur sans biais de θ.

b) Est-il convergent ?

Solution :

1. a) Loi du couple (M, P) : $P(M = i, P = j) = u_i u_j$

- $P(E = aa | M = aa, P = aa) = 1$
- $P(E = aa | M = aA, P = aA) = \frac{1}{4}$
- $P(E = aa | M = aA, P = aa) = P(E = aa | M = aa, P = aA) = \frac{1}{2}$
- $P(E = aa | M = aA, P = AA) = 0$

b) On a :

$[E = aa] = [E = aa, P = aa, M = aa] \cup [E = aa, P = aA, M = aa]$
$\cup [E = aa, P = aa, M = aA] \cup [E = aa, P = aA, M = aA]$

(dès que l'un des parents est AA l'enfant ne peut être aa !)

Donc par conditionnement :

$P(E = 1) = P(E = aa) = 1u_1^2 + u_2^2 \frac{1}{4} + 2u_1 u_2 \frac{1}{2} = (u_1 + \frac{u_2}{2})^2$.

Par symétrie : $P(E = 3) = (u_3 + \frac{u_2}{2})^2$

c) On pose $\theta = u_1 + \frac{u_2}{2}$,

- $q_1 = P(E = 1) = (u_1 + \frac{u_2}{2})^2 = \theta^2$
- $q_3 = P(E = 3) = (u_3 + \frac{u_2}{2})^2 = (1 - u_1 - u_2 + \frac{u_2}{2})^2 = (1 - \theta)^2$
- $q_2 = P(E = 2) = 1 - P(E = 1) - P(E = 3) = 2\theta(1 - \theta)$

d) Le paramètre de la deuxième génération est $\theta_2 = q_1 + \frac{q_2}{2} = \theta^2 + \theta(1-\theta) = \theta$ ce paramètre est donc stationnaire au cours du temps.

2. a) La loi de N_j est la loi $\mathcal{B}(n, q_j)$, $E(N_j) = nq_j$ et $V(N_j) = nq_j(1 - q_j)$ et $\frac{N_j}{n}$ est un estimateur sans biais de q_j

b) On note A l'ensemble des n-uplets $(x_1, \ldots, x_n)$ de $\{1, 2, 3\}^n$ dont n_1 termes valent 1, n_2 termes valent 2 et n_3 termes valent 3.

On a, par indépendance des X_i :

$P(N_1 = n_1, N_2 = n_2, N_3 = n_3) = \sum_A P(X_1 = x_1, \cdots, X_n = x_n)$

$$= \sum_A P(X_1 = x_1) \cdots P(X_n = x_n)$$

$$P(N_1 = n_1, N_2 = n_2, N_3 = n_3) = \sum_A q_1^{n_1} q_2^{n_2} q_3^{n_3} = \frac{n!}{n_1! n_2! n_3!} q_1^{n_1} q_2^{n_2} q_3^{n_3}$$

car $\frac{(n_1+n_2+n_3)!}{n_1!n_2!n_3!}$ est le nombre de partitions d'un ensemble à $n = n_1 + n_2 + n_3$ éléments en 3 sous-ensembles à n_1, n_2 et n_3 éléments.

3. Il vient, par indépendance des X_i :

$$\mathrm{Cov}(N_1, N_2) = \mathrm{Cov}(\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{X_i=1}, \sum_{j=1}^n \mathbf{1}_{X_j=2}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathrm{Cov}(\mathbf{1}_{X_i=1}, \mathbf{1}_{X_j=2})$$

$$= \sum_{i=1}^n \mathrm{Cov}(\mathbf{1}_{X_i=1}, \mathbf{1}_{X_i=2}) = n(-q_1 q_2)$$

et

$$E(\theta_n) = E(\frac{N_1}{n} + \frac{N_2}{2n}) = \frac{1}{n}E(N_1) + \frac{1}{2n}E(N_2) = q_1 + \frac{q_2}{2} = \theta^2 + \theta(1-\theta) = \theta.$$

Donc θ_n est un estimateur sans biais de θ.

$$V(\theta_n) = \frac{1}{n^2}(V(N_1) + \frac{1}{4}V(N_2) + \mathrm{Cov}(N_1, N_2)) = \frac{\theta(1-\theta)}{2n}$$

Donc θ_n est convergent.

Exercice 3.18.

Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$.

1. On note F_n l'ensemble des **permutations** de $[\![1, n]\!]$. On choisit au hasard une de ces permutations, et on définit la variable aléatoire Y_n égale au nombre de points fixes de cette permutation.

a) Montrer que le nombre d'éléments de F_n n'admettant aucun point fixe vaut :

$$d_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$$

b) Déterminer la loi de Y_n.

c) Montrer que la suite $(Y_n)_n$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on déterminera la loi.

2. On note E_n l'ensemble des **applications** de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$. On choisit au hasard une de ces applications, et on définit la variable X_n égale au nombre de points fixes de cette application.

a) Déterminer la loi de X_n.

b) Montrer que la suite $(X_n)_n$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on déterminera la loi.

Solution :

1. a) Soit d_n le nombre de permutations sans point fixes et $q_n = n! - p_n$ le nombre de permutations admettant au moins un point fixe.
Notons A_i les permutation σ de $[\![1,n]\!]$ telles que $\sigma(i) = i$. Par la formule de Poincaré :

$$q_n = \text{card}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \sum_{1 \leq k_1 < \cdots < k_i \leq n} \text{card}(A_{k_1} \cap \cdots \cap A_{k_i})$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \binom{n}{i} (n-i)! = n! \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i+1}}{i!}$$

Ainsi $d_n = n! \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}$.

b) La variable aléatoire Y_n prend ses valeurs dans $[\![1,n]\!]$. On a, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$,

$$P(Y_n = k) = \binom{n}{k} \frac{d_{n-k}}{n!} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!}$$

c) Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{k!} \sum\limits_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!} = \frac{\mathrm{e}^{-1}}{k!}$.
Ainsi $(Y_n)_n$ converge en loi vers une loi de Poisson de paramètre 1.

2. a) La variable aléatoire X_n prend ses valeurs dans $[\![0,n]\!]$. Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, pour obtenir l'événement $[X_n = k]$, il faut et il suffit de

- choisir k éléments parmi n, soit $\binom{n}{k}$ possibilités,
- ces k éléments sont fixés,
- donner une image aux $n-k$ éléments restants, autre que lui-même, soit $(n-1)^{n-k}$ choix possibles.

Ainsi : $P(X_n = k) = \binom{n}{k} \frac{(n-1)^{n-k}}{n^n} = \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-k}$

b) On a $P(X_n = k) = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-k}$.
Or $\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-k} = (n-k)\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} -\frac{n-k}{n} \underset{n \to +\infty}{\sim} -1$
et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k k!} = \frac{1}{k!}$
Ainsi $\lim\limits_{n \to +\infty} P(X_n = k) = \frac{\mathrm{e}^{-1}}{k!}$
Donc $(X_n)_n$ converge en loi vers une loi de Poisson de paramètre 1.

Exercice 3.19.

1. Soit a un réel strictement positif. Montrer qu'il existe une variable aléatoire réelle de variance égale à a.

2. On suppose dans cette question que $M = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ est la matrice de variance-covariance d'un couple de variables aléatoires discrètes (X, Y). Montrer que $a \geqslant 0, b \geqslant 0, c \in \mathbb{R}$ et $ab - c^2 \geqslant 0$.

3. Réciproquement, on suppose que la matrice $M = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ vérifie $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \in \mathbb{R}$ et $ab - c^2 \geqslant 0$.

On suppose $ab = 0$. Montrer que M est la matrice de variance-covariance d'un vecteur (X, Y).

4. On suppose $ab \neq 0$. On pose

$$\sigma_1 = \sqrt{a}, \sigma_2 = \sqrt{b} \text{ et } \rho = \frac{c}{\sqrt{ab}}$$

Soit (U, V) un couple de variables aléatoires discrètes, avec U et V indépendantes et possédant chacune une variance égale à 1.
Montrer que $(\sigma_1 U, \sigma_2 \rho U + \sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2} V)$ a pour matrice de variance-covariance M.

Solution :

1. Par exemple, si X suit la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$, alors $\sqrt{a}\, X$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0, a)$.

2. La variance étant positive, on a $a \geqslant 0, c \geqslant 0$ et $ab - c^2 \geqslant 0$ n'est autre que l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

3. On suppose $ab = 0$, alors $c^2 \leqslant 0 \Rightarrow c = 0$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ par exemple.
Auquel cas, A est la matrice de variance-covariance de $(C, \sqrt{b}X)$, où C est une variable aléatoire constante.

4. $V(X) = \sigma_1^2, V(Y) = \sigma_2^2 \rho^2 + \sigma_2^2(1 - \rho^2) = \sigma_2^2$

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(X, Y) = E(\sigma_1 U \times (\sigma_2 \rho U + \sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2} V) \\ -\sigma_1 E(U) \times E(\sigma_2 \rho U + \sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2} V) \end{aligned}$$

Après calculs

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \sqrt{ab} \frac{c}{\sqrt{ab}} = c$$

On vient de montrer dans le cas 2×2 que toute matrice de variance covariance est une matrice symétrique réelle positive et réciproquement que toute matrice symétrique réelle positive est une matrice de variance covariance.

5

QUESTIONS COURTES

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, continue telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge.

Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt} f(t)dt$ converge.

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ indépendantes, X de loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ et Y de loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur (m, μ) pour que

$$P(Y \leqslant X) \geqslant \frac{1}{2}$$

Soit E un espace euclidien de dimension n. Soient f et g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g = g \circ f$. On note S (resp. T) la matrice de f (resp. g) dans une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E. On suppose que S est symétrique et A antisymétrique.

Montrer que

$$\forall\, x \in E, \qquad ||(f-g)(x)|| = ||(f+g)(x)||.$$

Soit E l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ vérifiant la relation :

$$\forall\, (z, z') \in \mathbb{C}^2, \qquad P(zz') = P(z)P(z') \qquad (*).$$

a) Déterminer les polynômes de $\mathbb{C}_1[X]$ éléments de E.

b) Déterminer tous les polynômes éléments de E.

Dans une file d'attente de n personnes, résultant de la distribution au hasard de ces personnes, se trouvent deux amis Jean et Paul. Quelle est la probabilité que Jean soit séparé de Paul par m personnes ? Quel est le nombre de personnes le plus probable qui séparent Jean et Paul ?

Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires et X une variable aléatoire. On note F_n (resp. F) la fonction de répartition de X_n (resp. X). On pose

$$d(X_n, X) = \sup_{x\in\mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)|$$

a) On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} d(X_n, X) = 0$. Montrer que (X_n) converge en loi vers X.

b) Montrer que la réciproque est fausse (on pourra penser à des lois exponentielles).

Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 (f(t))^n dt$, et on suppose que la suite $(I_n)_n$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs.

1. En raisonnant par l'absurde, montrer que pour tout $t \in [0, 1]$, $|f(t)| \leqslant 1$.

2. En considérant la suite $(I_{2n})_n$, montrer que pour tout $t \in [0, 1], f(t) \in \{-1, 0, 1\}$.

3. En déduire f.

On retourne une à une les cartes d'un jeu ordinaire (32 cartes). Quel est le nombre moyen de cartes qu'il faut retourner pour voir le premier as ?

---

1. Soit $u \geqslant 1$. Comparer $\ln u$ et $u - 1$.

2. Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ telle que $f(0) = 1$ et pour tout $x > 0, f(x) > 1$. Montrer que pour tout $x > 0$

$$[f'(x) \geqslant \frac{1}{\ln(fx)}] \Rightarrow [f(x) \geqslant 1 + \sqrt{2x}]$$