1

ANALYSE

Exercice 1.1.

On considère l'ensemble E des fonctions f de classe C^1 de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et telles que $f(0) = f(1) = 0$. On rappelle que la fonction cotangente est définie, lorsque cela est possible, par : $\operatorname{cotan}(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$.

Dans toute la suite f est un élément de E.

1. a) Déterminer un équivalent simple de $\operatorname{cotan}(\pi t)$ quand t est au voisinage de 0.

b) Montrer que la fonction φ définie sur $]0,1[$ par : $\varphi(t) = \dfrac{f(t)}{t} f'(t)$ admet une limite finie lorsque t tend vers 0 par valeurs supérieures.

c) Établir l'équivalent suivant : $\operatorname{cotan}(\pi t) \underset{(1^-)}{\sim} \dfrac{1}{\pi(t-1)}$.

d) Déduire de ce qui précède l'existence de l'intégrale I définie par :

$$I = \int_0^1 f(t) f'(t) \operatorname{cotan}(\pi t)\, dt$$

2. a) Déterminer les limites suivantes : $\lim\limits_{t \to 0^+} f^2(t) \operatorname{cotan}(\pi t)$ et $\lim\limits_{t \to 1^-} f^2(t) \operatorname{cotan}(\pi t)$.

b) Établir la formule suivante :

$$2\pi I = \pi^2 \int_0^1 f^2(t) \big(1 + \operatorname{cotan}^2(\pi t)\big)\, dt$$

3. a) Justifier l'existence de l'intégrale J définie par :

$$J = \int_0^1 \big(f'(x) - \pi f(x) \operatorname{cotan}(\pi x)\big)^2\, dx$$

b) Utiliser le fait que l'intégrale J est positive pour montrer que, pour tout élément f de E, on a :

$$\int_0^1 f^2(t)\,dt \leqslant \frac{1}{\pi^2}\int_0^1 f'^2(t)\,dt$$

4. En considérant la fonction f_1 définie sur $[0,1]$ par $f_1(x)=\sin(\pi x)$, montrer que la constante π^2 obtenue dans la relation précédente est la meilleure possible.

5. Établir pour tout élément f de E, l'inégalité suivante :

$$\int_0^1 \big|f(t)f'(t)\big|dt \leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^1 f'^2(t)\,dt$$

Solution :

1. a) On a $\lim\limits_{t\to 0}\cos(\pi t)=1$ et $\sin(u)\underset{0}{\sim}u$, d'où : $\operatorname{cotan}(\pi t)\underset{0}{\sim}\dfrac{1}{\pi t}$.

b) On écrit $\varphi(t)=\dfrac{f(t)-f(0)}{t-0}f'(t)$ et comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, on a : $\lim\limits_{t\to 0^+}\varphi(t)=(f'(0))^2$.

c) On pose $u=1-t$. On a : $\operatorname{cotan}(\pi t)=\operatorname{cotan}(\pi-\pi u)=-\operatorname{cotan}(\pi u)$ et par le résultat a) :

$$\operatorname{cotan}(\pi t)\underset{(1^-)}{\sim}-\frac{1}{\pi(1-t)}=\frac{1}{\pi(t-1)}$$

d) La fonction $t\mapsto f(t)f'(t)\operatorname{cotan}(\pi t)$ est continue sur $]0,1[$ et l'intégrale semble doublement impropre :

$\star$ $f(t)f'(t)\operatorname{cotan}(\pi t)\underset{(0^+)}{\sim}\dfrac{1}{\pi}\times\dfrac{f(t)}{t}f'(t)\underset{t\to 0^+}{\longrightarrow}\dfrac{(f'(0))^2}{\pi}$.

$\star$ $f(t)f'(t)\operatorname{cotan}(\pi t)\underset{(1^-)}{\sim}\dfrac{1}{\pi}\times\dfrac{f(t)-f(1)}{t-1}f'(t)\underset{t\to 1^-}{\longrightarrow}\dfrac{(f'(1))^2}{\pi}$

Finalement, l'intégrale est « faussement » impropre en 0 et en 1 donc convergente.

2. a) $\star$ $f^2(t)\operatorname{cotan}(\pi t)\underset{(0^+)}{\sim}\dfrac{f(t)}{\pi}\times\dfrac{f(t)}{t}\underset{t\to 0^+}{\longrightarrow}\dfrac{f(0)}{\pi}\times f'(0)=0$

De même : $f^2(t)\operatorname{cotan}(\pi t)\underset{(1^-)}{\sim}\dfrac{f(t)}{\pi}\times\dfrac{f(t)-f(1)}{t-1}\underset{t\to 1^-}{\longrightarrow}\dfrac{f(1)}{\pi}\times f'(1)=0$

b) Pour $0<a<b<1$, soit $I(a,b)=\displaystyle\int_a^b f(t)f'(t)\operatorname{cotan}(\pi t)dt$, on a : $I=\lim\limits_{a\to 0,b\to 1}I(a,b)$.

On procède alors à une intégration par parties :

$$\begin{cases} u'(t) = f(t)f'(t) \Longleftarrow u(t) = \frac{1}{2}f^2(t) \\ v(t) = \operatorname{cotan}(\pi t) \implies v'(t) = \pi(1+\operatorname{cotan}^2(\pi t)) \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont bien de classe C^1 sur $[a,b]$, d'où :

$$I(a,b) = \big[\frac{f^2(t)}{2} \times \operatorname{cotan}(\pi t)\big]_a^b + \pi \int_a^b \frac{f^2(t)}{2}(1+\operatorname{cotan}^2(\pi t))\,dt$$

D'après 2. a), le crochet tend vers 0 ; d'où :

$$I = \frac{\pi}{2}\int_0^1 f^2(t)(1+\operatorname{cotan}^2(\pi t))dt \text{ et } 2\pi I = \pi^2 \int_0^1 f^2(t)(1+\operatorname{cotan}^2(\pi t))dt$$

3. a) Puisque $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t)\operatorname{cotan}(\pi t) = \dfrac{f'(0)}{\pi}$ et $\lim\limits_{t\to 1^-} f(t)\operatorname{cotan}(\pi t) = \dfrac{f'(1)}{\pi}$, J est convergente (faussement impropre) et clairement $J \geqslant 0$.

b) On a donc :

$$\int_0^1 f'^2(t)dt - 2\pi\int_0^1 f'(t)f(t)\operatorname{cotan}(\pi t)dt + \pi^2\int_0^1 f^2(t)\operatorname{cotan}^2(\pi t)dt \geqslant 0, \textit{ i.e.}$$

en transformant la dernière intégrale :

$$\int_0^1 f'^2(t)dt - 2\pi\int_0^1 f'(t)f(t)\operatorname{cotan}(\pi t)dt + \pi^2\int_0^1 f^2(t)(\operatorname{cotan}^2(\pi t)+1)dt$$
$$-\pi^2\int_0^1 f^2(t)dt0$$

Les deux intégrales centrales se télescopent (résultat 2. b)) et il reste :

$$\int_0^1 f^2(t)dt \leqslant \frac{1}{\pi^2}\int_0^1 f'^2(t)dt$$

4. Avec $\sin^2(\theta) = \dfrac{1-\cos(2\theta)}{2}$ et $\cos^2(\theta) = \dfrac{1+\cos(2\theta)}{2}$, il vient :

$$\int_0^1 \sin^2(\pi x)dx = \int_0^1 \cos^2(\pi x)dx = \frac{1}{2}.$$

Donc : $\displaystyle\int_0^1 f_1^2(t) = \frac{1}{2}$ et $\displaystyle\int_0^1 {f'}_1^2(t)dt = \frac{\pi^2}{2}$, ce qui prouve que la constante $\dfrac{1}{\pi^2}$ est la meilleure possible pour que l'inégalité soit universelle.

5. On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz qui donne :

$$\int_0^1 |f(t)f'(t)|\,dt \leq \sqrt{\Big(\int_0^1 f^2(t)dt\Big)} \times \sqrt{\Big(\int_0^1 f'^2(t)dt\Big)}$$

On majore alors $\sqrt{\displaystyle\int_0^1 f^2(t)dt}$ par $\sqrt{\dfrac{1}{\pi^2}\displaystyle\int_0^1 f'^2(t)dt}$, d'où :

$$\int_0^1 |f(t)f'(t)|\,dt \leq \frac{1}{\pi}\int_0^1 f'^2(t)dt.$$

Exercice 1.2.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on dit que la suite réelle strictement positive $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie la relation E_λ lorsque :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\lambda}{n} + o\big(\frac{1}{n}\big) \text{ quand } n \text{ tend vers l'infini}$$

1. Soit $\beta \in \mathbb{R}$ et les deux suites (v_n) et (y_n) définies par :

- $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, v_n = \dfrac{1}{n^\beta}$;
- $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, y_n = \dfrac{1}{n(\ln n)^2}$.

a) Montrer que les deux suites vérifient une relation E_λ (avec λ à déterminer à chaque fois).

b) Etudier la convergence des deux séries $\sum v_n$ et $\sum y_n$associées.

2. Soit $\lambda < 0$. Montrer que si la suite (u_n) vérifie (E_λ), alors la série $\sum u_n$ diverge.

3. Soit (u_n) une suite qui vérifie (E_λ) avec $\lambda > 1$. On choisit β tel que $\lambda > \beta > 1$ et on considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = (n^{-\beta})_{n\in\mathbb{N}^*}$.

a) Montrer que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - \dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{\mu}{n} + o\big(\dfrac{1}{n}\big)$, où μ est un réel, indépendant de n, à déterminer.

b) Justifier l'existence d'un entier naturel N tel que, pour tout $n \geqslant N$, on ait $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$.

c) Prouver que la série $\sum u_n$ converge.

4. Soit (u_n) une suite qui vérifie (E_λ) avec $0 \leqslant \lambda < 1$. Montrer que la série $\sum u_n$ diverge.

5. Pour $n \geqslant 2$, on pose $w_n = \sqrt{(n-1)!}\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\big(\frac{1}{\sqrt{k}}\big)$. Déterminer la nature de la série $\sum w_n$.

Solution :

1. a) et b) • La série $\sum(v_n)$ est une série de Riemann, convergente si $\beta > 1$ et divergente sinon et on a :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \big(1 + \frac{1}{n}\big)^{-\beta} = 1 - \frac{\beta}{n} + o(\frac{1}{n}), \text{ donc } \lambda = \beta.$$

• La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t(\ln t)^2}$ est positive et décroissante sur $]1, +\infty[$, par théorème de comparaison série/intégrale, la série $\sum y_n$ converge s'il en est de même de l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln t)^2}$

Or : $\displaystyle\int_2^T \frac{dt}{t(\ln t)^2} = \Big[-\frac{1}{\ln t}\Big]_2^T \underset{T\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\ln 2}$, la convergence de la série $\sum y_n$ est donc acquise.

Par ailleurs on a : $\dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1 + \dfrac{1}{\ln n}\ln(1+\dfrac{1}{n}) = 1 + o(\dfrac{1}{n})$, donc :

$\dfrac{y_{n+1}}{y_n} = \dfrac{n}{n+1}\big(\dfrac{\ln n}{\ln(n+1)}\big)^2 = \big(1+\dfrac{1}{n}\big)^{-1}\big(1+o(\dfrac{1}{n})\big)^{-2} = 1 - \dfrac{1}{n} + o(\dfrac{1}{n})$, et $\lambda = 1$.

2. Si $\lambda < 0$ alors : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1 \underset{(n\to\infty)}{\sim} -\dfrac{\lambda}{n} > 0$.

Donc à partir d'un certain rang, on a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1 : \exists\, n_0, \forall\, n \geqslant n_0,\ u_n \geqslant u_{n_0} > 0$

Donc la suite $(u_n)_n$ ne peut tendre vers 0 et la série diverge grossièrement.

3. a) Par différence on a immédiatement $\mu = \beta - \lambda$.

b) Comme $\beta - \lambda < 0$, la suite de terme général $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ est négative à partir d'un certain rang :

$$\exists\, N, \forall\, n \geqslant N, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

c) Ce qui précède s'écrit aussi $\dfrac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leqslant \dfrac{u_n}{v_n}$ et une récurrence immédiate donne alors :

$$\forall\, n \geqslant N, 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{u_N}{v_N}\, v_n = K v_n \text{ avec } K = \frac{u_N}{v_N}.$$

La série de Riemann $\sum v_n$ converge car $\beta > 1$. Par le théorème de comparaison sur les séries positives, on en déduit la convergence de $\sum u_n$.

4. En raisonnant comme dans la question précédente avec $\beta \in\,]\lambda, 1[$, on obtient :

$$\exists\, N, \forall\, n \geqslant N, \frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

puis : $\forall\, n \geqslant N, u_n \geqslant \dfrac{u_N}{v_N}\, v_n = K v_n 0$

puis (comme $K \neq 0$ et $\beta < 1$), par théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, la divergence de $\sum v_n$ donne celle de $\sum u_n$.

5. Au voisinage de 0 : $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$ et puisque $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$, on a :

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \sqrt{n}\sin\big(\frac{1}{\sqrt{n}}\big) = 1 - \frac{1}{6n} + o(\frac{1}{n}).$$

Comme la série $\sum w_n$ est à termes strictement positifs, d'après la question 4 avec $\lambda = \dfrac{1}{6} < 1$, on conclut à la divergence de la série $\sum w_n$.

Exercice 1.3.

On considère la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ définie par : $\begin{cases} v_0 = 0 \\ \forall\, n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \sqrt{v_n + \dfrac{1}{2^n}} \end{cases}$

1. Montrer que, la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est bien définie et à termes positifs.

2. a) Étudier la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^+$ pour $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\forall\, x \geqslant 0, f_n(x) = x^2 - x - \frac{1}{2^n}$$

b) Montrer que l'équation $x^2 - x - \frac{1}{2^n} = 0$ possède, sur $\mathbb{R}_+$, une unique solution que l'on note α_n.

3. a) Étudier le signe de $f_n(x) - f_{n+1}(x)$.

b) En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

c) Établir, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, l'inégalité suivante : $v_n \geqslant \alpha_n$.

d) En déduire que la suite $(v_n)_{n\geq 2}$ est décroissante.

4. a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ converge.

b) Déterminer la valeur de sa limite.

Solution :

1. Evident.

2. a) f_n est une fonction polynôme donc dérivable. On a : $f_n'(x) = 2x - 1$, d'où le tableau de variation de f_n sur $\mathbb{R}_+$:

x	0		$1/2$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	
f_n	$-1/2^n$	$\searrow$	< 0	$\nearrow$	$+\infty$

Sur $[0, \frac{1}{2}]$ et même sur $[0, 1]$, la fonction est strictement négative et donc ne s'annule pas. En revanche sur $[1, +\infty[$, f_n est strictement croissante et continue, elle réalise donc une bijection de $[1, +\infty[$ sur $[-1/2^n, +\infty[$. le nombre 0 appartient à l'ensemble d'arrivée et possède donc un unique antécédent α_n, avec $\alpha_n > 1$.

3. a) On a $f_n(x) - f_{n+1}(x) = -\frac{1}{2^{n+1}}$ et donc $f_n(x) - f_{n+1}(x) < 0$.

b) En appliquant l'inégalité précédente en α_{n+1} on obtient :
$f_n(\alpha_{n+1}) \leqslant f_{n+1}(\alpha_{n+1})$, soit $f_n(\alpha_{n+1}) \leqslant 0$, c'est-à-dire $f_n(\alpha_{n+1}) \leqslant f_n(\alpha_n)$. Comme sur l'intervalle considéré la fonction f_n est strictement croissante, on en déduit que $\alpha_{n+1} \leqslant \alpha_n$ et la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien décroissante.

c) $\star$ α_2 est la solution positive de l'équation $x^2 - 2x - \frac{1}{4} = 0$.

On trouve $\alpha_2 = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$ tandis que $v_1 = 1$ et que $v_2 = \sqrt{\dfrac{3}{2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$. Or $(1+\sqrt{2})^2 = 3+2\sqrt{2} < 6$, donc $\alpha_2 < v_2$.

$\star$ Supposons que pour un certain n supérieur ou égal à 2, on ait : $\alpha_n \leqslant v_n$.

Alors : $\alpha_{n+1} = \sqrt{\alpha_n + \dfrac{1}{2^n}} \leqslant \sqrt{v_n + \dfrac{1}{2^n}} = v_{n+1}$, et comme la suite (α_n) est décroissante on a *a fortiori* : $\alpha_{n+1} \leqslant v_{n+1}$.

On conclut par le principe de récurrence : $\forall\, n2, \alpha_n \leqslant v_n$.

d) En appliquant f_n qui, sur l'intervalle considéré, est croissante, on obtient : $0 = f_n(\alpha_n) \leqslant f_n(v_n)$.

On a donc $v_n^2 - v_n - \dfrac{1}{2^n} \geqslant 0$, *a fortiori* $v_n^2 v_{n+1}^2$. Comme tout est positif il vient $v_n v_{n+1}$â et la suite $(v_n)_{n\geq 2}$ est décroissante.

4. a) La suite est décroissante à partir du rang 2 et minorée par $\dfrac{1}{2}$ ou même par 1, elle est donc convergente de limite notée ℓ.

b) On sait que $v_{n+1} = \sqrt{v_n + \dfrac{1}{2^n}}$. En passant à la limite, on obtient $\ell = \sqrt{\ell}$, soit $\ell^2 - \ell = 0$. Cette équation possède deux solutions 0 et 1. Comme 0 est à rejeter, il reste $\ell = 1$.

Exercice 1.4.

Pour tout x et y réels strictement positifs, on pose $B(x,y) = \displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$.

1. Prouver la convergence de l'intégrale définissant $B(x,y)$.

2. a) Prouver que $\forall\, x>0, \forall\, y>0, B(x,y) = B(y,x)$.

b) Montrer que $\forall\, x>0, \forall\, y>0, B(x+1,y) = \dfrac{x}{y}B(x,y+1)$.

3. Montrer que $\forall\, x>0, \forall\, y>0, B(x,y+1) = B(x,y) - B(x+1,y)$. En déduire que :

$$B(x+1,y) = \frac{x}{x+y}\,B(x,y).$$

4. Soit n un entier naturel non nul. Soit x un réel strictement positif.

a) Étudier le signe sur $[0,1]$ de la fonction $g : t \mapsto \mathrm{e}^{-t} - 1 + t$. En déduire que pour tout $t \in [0,n]$, on a :

$$(1-\frac{t}{n})^n \leqslant \mathrm{e}^{-t}.$$

b) Montrer que pour tout $t \in [0,n]$, on a $(1-\dfrac{t^2}{n})\,\mathrm{e}^{-t} \leqslant (1-\dfrac{t}{n})^n$.

c) Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^n (1-\frac{t}{n})^n\, t^{x-1}\, dt = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}dt = \Gamma(x)$

5. Montrer que :

$$\forall\, x>0, \Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$

Solution :

1. La fonction $f : t \mapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est continue et positive sur $]0,1[$.

$$f(t) \underset{(0)}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}}, \text{ avec } 1-x<1. \; f(t) \underset{(1)}{\sim} \frac{1}{(1-t)^{1-y}}, \text{ avec } 1-y<1.$$

Par suite, deux applications de la règle de Riemann montrent que $\int_0^1 f(t)dt$ converge.

2. a) Le changement de variable $u = 1-t$ dans l'intégrale $B(x,y)$ donne immédiatement l'égalité demandée.

b) Soit $0 < a \leqslant b < 1$. On calcule $\int_a^b t^x(1-t)^{y-1}dt$ au moyen d'une intégration par parties en posant $u(t) = t^x$, d'où $u'(t) = xt^{x-1}$ et $v'(t) = (1-t)^{y-1}$, en prenant $v(t) = -\frac{1}{y}(1-t)^y$.

Comme $\lim\limits_0(uv) = \lim\limits_1(uv) = 0$, il vient alors par passage à la limite :

$$B(x+1,y) = \frac{x}{y}B(x,y+1).$$

3. On remarque que

$$B(x,y+1) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,(1-t)\,dt = B(x,y) - B(x+1,y).$$

De la question précédente, on déduit que :

$$B(x+1,y) = \frac{x}{y}B(x,y+1) = \frac{x}{y}(B(x,y) - B(x+1,y)).$$

Ainsi :

$$B(x+1,y) = \frac{x}{x+y}\,B(x,y).$$

4. a) La fonction $g : t \mapsto \mathrm{e}^{-t} - 1 + t$ est croissante sur $[0,1]$ avec $g(0) = 0$. Elle est donc positive sur $[0,1]$.

D'où, pour tout $t \in [0,n]$, $\left(1-\frac{t}{n}\right) \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{t}{n}}$. En élevant à la puissance n, on trouve l'inégalité demandée. On peut aussi invoquer la convexité de l'exponentielle pour prouver que $\forall\, u \in \mathbb{R}$, $1+u \leqslant \mathrm{e}^u$, relation que l'on applique à $u = -\frac{t}{n}$ avant d'élever à la puissance $n^{\text{ème}}$.

b) La relation à démontrer est évidente si $t \in [\sqrt{n}, n]$. Considérons à présent le cas où $t \in [0, \sqrt{n}[$.

On étudie sur $[0, \sqrt{n}[$ la fonction $f : t \mapsto n \ln\big(1 - \frac{t}{n}\big) + t - \ln\big(1 - \frac{t^2}{n}\big)$.
La fonction f est dérivable sur $[0, \sqrt{n}[$ et on vérifie que $f'(t) = \dfrac{t((t-1)^2 + (n-1))}{(n-t)(n-t^2)}$,
quantité positive pour tout $t \in [0, \sqrt{n}[$.
Par suite, pour tout $t \in [0, \sqrt{n}[$, $f(t) \leqslant f(0) = 0$.
On en déduit que $n \ln\big(1 - \frac{t}{n}\big) \leqslant \ln\big(1 - \frac{t^2}{n}\big) - t$. L'inégalité demandée s'en déduit par croissance de la fonction exponentielle.

c) On déduit de a) et b) que :

$$\int_0^n \big(1 - \frac{t^2}{n}\big)\mathrm{e}^{-t}t^{x-1}dt \leqslant \int_0^n \big(1 - \frac{t}{n}\big)^n t^{x-1}dt \leqslant \int_0^n \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}dt.$$

Or, par définition, $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^n \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}dt = \Gamma(x)$.
D'autre part,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \big(1 - \frac{t^2}{n}\big)\mathrm{e}^{-t}t^{x-1}dt = \lim_{n\to\infty} \int_0^n \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}dt - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\int_0^n \mathrm{e}^{-t}t^{x+1}dt$$

$$= \Gamma(x) - 0.\Gamma(x+2) = \Gamma(x)$$

Le théorème d'encadrement permet alors de conclure à l'égalité souhaitée.

5. Le changement de variable $u = \frac{t}{n}$ donne $\displaystyle\int_0^n \big(1 - \frac{t}{n}\big)^n t^{x-1}\,dt = n^x B(n+1, x)$.
On applique alors la formule établie à la question 3. lorsque $x = n$ (entier naturel). En réitérant la relation, on obtient :

$$B(n+1, y) = \frac{n}{n+y}B(n, y) = \big(\prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+y}\big)B(1, y)$$

Comme $B(1, y) = \displaystyle\int_0^1 (1-t)^{y-1}dt = \frac{1}{y}$, on en déduit que pour tout entier naturel n et tout réel $y > 0$, on a : $B(n+1, y) = \dfrac{n!}{y(y+1)\dots(y+n)}$.
Ainsi, $\displaystyle\int_0^n \big(1 - \frac{t}{n}\big)^n t^{x-1}\,dt = n^x B(n+1, x) = n^x\,\frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$.
Il suffit alors de passer à la limite lorsque n tend vers l'infini et de reconnaître $\Gamma(x)$ dans le membre de gauche grâce à la question 4. c)

Exercice 1.5.

Soit E l'espace vectoriel des fonctions définies et continues sur l'intervalle $[0, 1]$ et soit F le sous-ensemble de E constitué par les fonctions h de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, 1]$ qui vérifient les deux relations :

$$\begin{cases} h(0) - h'(0) = 0 \\ h(1) + h'(1) = 0 \end{cases}$$

où h' désigne la fonction dérivée de h.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

2. Soit Φ l'application qui, à tout élément f de E, fait correspondre la fonction $g = \Phi(f)$ définie par :

$$\forall\, x \in [0,1], g(x) = \Phi(f)(x) = \int_0^1 e^{-|x-y|} f(y)\, dy$$

a) Montrer que Φ est un endomorphisme de E.

b) Montrer que, pour tout f de E, $g = \Phi(f)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$ et calculer g' et g'', où g' et g'' désignent respectivement les dérivées première et seconde de g.

c) Montrer que, pour tout f de E, $g = \Phi(f)$ appartient à F.

3. a) Déterminer le noyau de Φ.

b) Soit g un élément de F. À l'aide d'intégrations par parties, établir la relation : $\Phi(g'') = \Phi(g) - 2g$.

c) En déduire que toute fonction g de F est l'image par Φ d'une fonction f de E et d'une seule.

Solution :

1. Les applications $\varphi : h \mapsto h(0) - h'(0)$ et $\psi : h \mapsto h(1) + h'(1)$, sont clairement des formes linéaires sur $\mathcal{C}^2([0,1])$ et $F = \mathrm{Ker}(\varphi) \cap \mathrm{Ker}(\psi)$ est un sous-espace de $\mathcal{C}^2([0,1])$, donc *a fortiori* de E.

2. a) La linéarité de Φ est une conséquence simple de la linéarité de l'intégration sur $[0,1]$, mais il faut vérifier que $g = \Phi(f)$ est continue sur $[0,1]$, pour cela on écrit :

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_0^x \mathrm{e}^{-|x-y|} f(y)\, dy + \int_x^1 \mathrm{e}^{-|x-y|} f(y)\, dy \\ &= \int_0^x \mathrm{e}^{y-x} f(y)\, dy + \int_x^1 \mathrm{e}^{x-y} f(y)\, dy = \mathrm{e}^{-x} \int_0^x \mathrm{e}^{y} f(y)\, dy + \mathrm{e}^{x} \int_x^1 \mathrm{e}^{-y} f(y)\, dy \end{aligned}$$

Sous cette forme la continuité de g résulte de la continuité des fonctions $x \mapsto \mathrm{e}^x$, $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$, $x \mapsto \mathrm{e}^x f(x)$ et $x \mapsto \mathrm{e}^{-x} f(x)$ ...

b) ... et g est même de classe $\mathcal{C}^1$, avec :

$$g'(x) = \Phi(f)'(x) = -\mathrm{e}^{-x} \int_0^x \mathrm{e}^{y} f(y)\, dy$$

$$+ \mathrm{e}^{x}\int_{x}^{1}\mathrm{e}^{-y}f(y)\,dy + \mathrm{e}^{-x}\times\mathrm{e}^{x}f(x) + \mathrm{e}^{x}(-\mathrm{e}^{-x}f(x))$$
$$= -\mathrm{e}^{-x}\int_{0}^{x}\mathrm{e}^{y}f(y)\,dy + \mathrm{e}^{x}\int_{x}^{1}\mathrm{e}^{-y}f(y)\,dy$$

La fonction g' est encore de classe $\mathcal{C}^1$, avec :

$$g''(x) = \Phi(f)''(x) = \mathrm{e}^{-x}\int_{0}^{x}\mathrm{e}^{y}f(y)\,dy + \mathrm{e}^{x}\int_{x}^{1}\mathrm{e}^{-y}f(y)\,dy$$
$$- \mathrm{e}^{-x}\times\mathrm{e}^{x}f(x) + \mathrm{e}^{x}(-\mathrm{e}^{-x}f(x))$$

Soit : $g''(x) = \mathrm{e}^{-x}\displaystyle\int_{0}^{x}\mathrm{e}^{y}f(y)\,dy + \mathrm{e}^{x}\int_{x}^{1}\mathrm{e}^{-y}f(y)\,dy - 2f(x)$

C'est-à-dire :

$$\forall\, x \in [0,1], g''(x) = g(x) - 2f(x)$$

c) Les calculs précédents donnent en particulier :

$$\Phi(f)(0) = \int_{0}^{1}\mathrm{e}^{-y}f(y)\,dy\,;\ \Phi(f)'(0) = \int_{0}^{1}\mathrm{e}^{-y}f(y)\,dy$$
$$\Phi(f)(1) = \mathrm{e}^{-1}\int_{0}^{1}\mathrm{e}^{-y}f(y)\,dy\,;\ \Phi(f)'(0) = -\mathrm{e}^{-1}\int_{0}^{1}\mathrm{e}^{-y}f(y)\,dy$$

Donc $g = \Phi(f)$, qui est continue sur $[0,1]$, vérifie $g(0) = g'(0)$ et $g(1) = -g'(1)$. Donc :

$$\forall\, f \in E, \Phi(f) \in F$$

3. a) Soit $f \in \operatorname{Ker}\Phi$, on a $g = \Phi(f) = 0$ et $g'' = 0$, donc $2f = 0$ et $f = 0$.

$$\operatorname{Ker}(\Phi) = \{0\}$$

b) Pour pouvoir intégrer par parties, on revient à la forme vue en 2. a) :

$$\Phi(g'')(x) = \mathrm{e}^{-x}\int_{0}^{x}\mathrm{e}^{y}g''(y)\,dy + \mathrm{e}^{x}\int_{x}^{1}\mathrm{e}^{-y}g''(y)\,dy$$

D'où, en intégrant g'' en g' :

$$\Phi(g'')(x) = \mathrm{e}^{-x}\Big(\big[\mathrm{e}^{y}g'(y)\big]_{0}^{x} - \int_{0}^{x}\mathrm{e}^{y}g'(y)\,dy\Big) + \mathrm{e}^{x}\Big(\big[\mathrm{e}^{-y}g'(y)\big]_{x}^{1} + \int_{x}^{1}\mathrm{e}^{-y}g'(y)\,dy\Big)$$

On recommence, dans le même sens :

$$\Phi(g'')(x) = \mathrm{e}^{-x}\Big(\big[\mathrm{e}^{y}(g'(y) - g(y))\big]_{0}^{x} + \int_{0}^{x}\mathrm{e}^{y}g'(y)\,dy\Big)$$
$$+\mathrm{e}^{x}\Big(\big[\mathrm{e}^{-y}(g'(y) + g(y))\big]_{x}^{1} - \int_{x}^{1}\mathrm{e}^{-y}g'(y)\,dy\Big)$$
$$= g'(x) - g(x) - \mathrm{e}^{-x}(g'(0) - g(0)) + \mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{-1}(g'(1) + g(1))$$
$$- \mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{-x}(g'(x) + g(x)) + \Phi(g)(x)$$

et puisque $g \in F$, il reste :

$$\Phi(g'') = \Phi(g) - 2g$$

c) Pour $g \in F$, on a $\frac{1}{2}(g - g'') \in E$ et $\Phi\big(\frac{1}{2}(g - g'')\big) = g$. Comme on sait déjà que Φ est injective, on conclut.

Exercice 1.6.

Pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$ et toute fonction f de I dans $\mathbb{R}$, on dit que f est lipschitzienne sur I s'il existe un réel $k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tous x, y de I, $|f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|$. On dit alors que f est k-lipschitzienne.

1. a) Montrer que les fonctions constantes, puis la fonction valeur absolue sont lipschtziennes sur I.

b) Montrer que si f et g sont lipschitziennes et bornées, alors $f \times g$ est lipschitzienne sur I.

c) Montrer que toute fonction lipschitzienne sur I est continue sur I.

d) Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$. Montrer que si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, alors f est lipschitzienne sur $[a, b]$.

e) Montrer que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas lipschitzienne sur $[0, 1]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on définit la fonction polynôme $P_{n,k}$ sur $[0, 1]$ par :

$$\forall\, x \in [0, 1], P_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1 - x)^{n-k}.$$

Pour toute fonction f continue sur $[0, 1]$, on pose $B_n(f) = \sum_{k=0}^{n} f\big(\frac{k}{n}\big) P_{n,k}$.

2. Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$:

$$\sum_{k=0}^{n} \big(\frac{k}{n} - x\big)^2 P_{n,k}(x) = \frac{1}{n} x(1 - x).$$

Dans toute la suite, on considère une fonction f ρ-lipschitzienne sur $[0, 1]$.

3. Montrer que $|f|$ est bornée sur $[0, 1]$. Nous noterons M sa borne supérieure. Soient $x \in [0, 1]$ et $\alpha > 0$. On considère les ensembles

$$\mathcal{E}_1 = \big\{k \in [\![0, n]\!] / \big|\frac{k}{n} - x\big| > \alpha\big\} \text{ et } \mathcal{E}_2 = \big\{k \in [\![0, n]\!] / \big|\frac{k}{n} - x\big| \leqslant \alpha\big\}$$

ainsi que les sommes :

$$S_1(x) = \sum_{k \in \mathcal{E}_1} \big|f\big(\frac{k}{n}\big) - f(x)\big| P_{n,k}(x) \text{ et } S_2(x) = \sum_{k \in \mathcal{E}_2} \big|f\big(\frac{k}{n}\big) - f(x)\big| P_{n,k}(x).$$

4. a) Montrer que $S_2(x) \leqslant \rho\alpha$ puis que $S_1(x) \leqslant \dfrac{M}{2n\alpha^2}$.

b) En déduire que $\lim\limits_{n \to \infty} \sup\limits_{x \in [0,1]} |B_n(f)(x) - f(x)| = 0$.

Solution :

1. a) Les fonctions constantes sont clairement 158-lipschitziennes sur $\mathbb{R}$. D'après la deuxième inégalité triangulaire, pour tous $x, y \in [0,1]$, $||x|-|y|| \leqslant |x-y|$. Ainsi, la fonction valeur absolue est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

b) Notons M_f (resp. M_g) un majorant de $|f|$ (resp. $|g|$) et supposons que f (resp. g) est k_f-lipschitzienne (resp. k_g- lipschitzienne). Soient $x, y \in I$, on a :

$$\begin{aligned}|f(x)g(x) - f(y)g(y)| &\leqslant |f(x)g(x) - f(y)g(x)| + |f(y)g(x) - f(y)g(y)| \\ &\leqslant M_g|f(x) - f(y)| + M_f|g(x) - g(y)| \\ |f(x)g(x) - f(y)g(y)| &\leqslant (M_g k_f + M_f k_g)|x-y|.\end{aligned}$$

Ainsi, fg est $(M_g k_f + M_f k_g)$-lipschitzienne.

c) Soit f une fonction k-lipschitzienne sur I et $x_0 \in I$. Alors, pour tout $x \in I$, $|f(x_0) - f(x)| \leqslant k|x_0 - x| \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$: f est continue en tout point x_0.

d) Soit f une fonction de classe $\mathbb{C}^1$ sur $[a,b]$. Alors, f' est continue sur $[a,b]$ donc $|f'|$ est bornée sur $[a,b]$. Notons M sa borne supérieure. D'après l'inégalité des accroissements finis, pour tous $x, y \in [a,b]$, $|f(x) - f(y)| \leqslant M|x-y|$, et f est lipschitzienne sur $[a,b]$.

e) Supposons par l'absurde qu'il existe une constante $k \in \mathbb{R}_+^*$ telle que la fonction racine carrée soit k-lipschitzienne sur $[0,1]$. Alors, pour tous $x, y \in [0,1]$,

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leqslant k|x-y|.$$

En particulier, $\forall\, x \in]0,1]$, $\sqrt{x} \leqslant kx$, *i.e.* $1 \leqslant k\sqrt{x}$ ce qui est faux pour x assez petit.

2. On peut faire un calcul direct, mais : soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et $x \in [0,1]$. On sait que l'espérance de X vaut nx et sa variance $nx(1-x)$ (même pour $x \in \{0,1\}$). Donc :

$$\begin{aligned}nx(1-x) &= \sum_{k=0}^{n} (k - nx)^2 P(X=k) = \sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= n^2 \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 P_{n,k}(x)\end{aligned}$$

Soit :

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 P_{n,k}(x) = \frac{x(1-x)}{n}.$$

3. La fonction f est lipschitzienne donc continue sur l'intervalle $[0,1]$. Elle est bien bornée.

4. a) Comme la fonction f est ρ-lipschitzienne, pour $k \in \mathcal{E}_2$,

$$\left|\frac{k}{n}-x\right|\leqslant\alpha \implies \left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|\leqslant\rho\alpha.$$

Ainsi,

$$S_2\leqslant\sum_{k\in\mathcal{E}_2}\rho\alpha P_{n,k}(x)\leqslant\rho\alpha\sum_{k\in[\![0,n]\!]}P_{n,k}(x)\leqslant\rho\alpha.$$

Comme la fonction $|f|$ est bornée sur $[0,1]$ par la constante M,

$$\begin{aligned}S_1&\leqslant\sum_{k\in\mathcal{E}_1}2MP_{n,k}(x)\leqslant 2M\sum_{k\in\mathcal{E}_1}\frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2P_{n,k}(x)\\&\leqslant 2M\sum_{k\in[\![0,n]\!]}\frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2P_{n,k}(x)\leqslant\frac{2M}{\alpha^2}\times\frac{x(1-x)}{n}\leqslant\frac{M}{2\alpha^2n},\\&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad(\text{car } 0\leqslant x(1-x)\leqslant\tfrac{1}{4})\end{aligned}$$

b) Finalement :$|B_n(f)(x)-f(x)|\leqslant S_1+S_2\leqslant\rho\alpha+\dfrac{2M}{2n\alpha^2}$. Donc :

$$\sup_{[0,1]}|B_n(f)-f|\leqslant\rho\alpha+\frac{2M}{2n\alpha^2}$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon>0$, en choisissant $\alpha=\dfrac{\varepsilon}{2\rho}$ puis n assez grand, on a bien $\sup\limits_{[0,1]}|B_n(f)-f|\leqslant\varepsilon$, soit :

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{[0,1]}|B_n(f)-f|=0.$$

Exercice 1.7.

On admet que la suite de terme général $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$ converge et on note γ sa limite. On considère en outre les fonctions :

$$S:x\mapsto\int_0^x\frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}dt, x\in\mathbb{R}\quad\text{et}\quad R:x\mapsto\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,dt, x>0$$

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t)=\begin{cases}\dfrac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t} & \text{si } t\neq 0\\ 1 & \text{si } t=0\end{cases}$.

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

2. Établir la convergence des intégrales définissant $S(x)$ et $R(x)$ respectivement sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}_+^*$.

3. Montrer que : $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}=\displaystyle\int_0^1\frac{1-(1-t)^n}{t}dt$.

4. En déduire que pour tout $n\geqslant 1$,

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n=\int_0^1\frac{1-e_n(t)}{t}\,dt-\int_1^n\frac{e_n(t)}{t}dt,$$

où e_n est définie sur $[0,n]$ par $e_n(t)=\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n$.

5. a) Montrer que pour tout t réel, $1+t\leqslant\mathrm{e}^t$.

b) Montrer que pour $q \in [0,1[$, $1-q^n \leqslant n(1-q)$.

6. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in [0,n]$,

$$\big(1-\frac{t^2}{n^2}\big)^n \mathrm{e}^{-t} \leqslant e_n(t) \leqslant \mathrm{e}^{-t}$$

puis que $0 \leqslant \mathrm{e}^{-t} - e_n(t) \leqslant \frac{t^2}{n}\mathrm{e}^{-t}$.

7. Montrer que $\gamma = S(1) - R(1)$.

Solution :

1. La fonction f est évidemment continue sur $\mathbb{R}^*$. De plus, $\mathrm{e}^u \underset{(0)}{=} 1+u+o(u)$, ce qui montre que f est aussi continue en 0.

2. Pour $x \in \mathbb{R}$, $S(x)$ est l'intégrale d'une fonction continue sur l'intervalle fermé borné d'extrémités 0 et x, donc convergente. Pour $x > 0$, $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t}$ est continue sur $[x,1]$, donc l'intégrale de cette fonction sur cet intervalle est convergente. Enfin, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}dt$ est convergente car $t1 \implies \big|\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\big| \leqslant \mathrm{e}^{-t}$ dont l'intégrale est convergente.

3. On a, $\dfrac{1-(1-t)^n}{t} = 1+(1-t)+\cdots+(1-t)^{n-1}$, d'où,

$$\int_0^1 \frac{1-(1-t)^n}{t}dt = \sum_{k=0}^{n-1}\int_0^1 (1-t)^k dt = \sum_{k=0}^{n-1}\big[-\frac{(1-t)^{k+1}}{k+1}\big]_0^1 = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

4. En effectuant le changement de variable affine $u = nt$, on obtient :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} &= \int_0^n \frac{1-(1-\frac{u}{n})^n}{\frac{u}{n}}\times\frac{1}{n}du = \int_0^1 \frac{1-(1-\frac{u}{n})^n}{u}du + \int_1^n \dots \\ &= \int_0^1 \frac{1-e_n(t)}{t}dt - \int_1^n \frac{e_n(t)}{t}dt + \ln n.\end{aligned}$$

D'où le résultat.

5. a) La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^t - 1 - t$ admet pour *minimum* 0 en 0. Donc $\forall\, t \in \mathbb{R},\ 1+t \leqslant \mathrm{e}^t$.

b) Pour $q \in [0,1]$: $1-q^n = (1-q)(1+q+q^2+q^{n-1}) \leqslant n(1-q)$.

6. On en déduit successivement que pour tout réel t, $1+\dfrac{t}{n} \leqslant \mathrm{e}^{\frac{t}{n}}$ et $1-\dfrac{t}{n} \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{t}{n}}$, ce qui implique pour $t \in [0,n]$:

$\star\ 0 \leqslant e_n(t) = (1-\frac{t}{n})^n \leqslant (\mathrm{e}^{-\frac{t}{n}})^n = \mathrm{e}^{-t}$

$\star\ 0 \leqslant (1+\frac{t}{n})^n\mathrm{e}^{-t} \leqslant \mathrm{e}^t\mathrm{e}^{-t} = 1$ et $(1-\frac{t^2}{n^2})^n\mathrm{e}^{-t} \leqslant (1-\frac{t}{n})^n = e_n(t)$

Donc : $\big(1-\frac{t^2}{n^2}\big)^n \mathrm{e}^{-t} \leqslant e_n(t) \leqslant \mathrm{e}^{-t}$

Puis : $0 \leqslant \mathrm{e}^{-t} - e_n(t) \leqslant \mathrm{e}^{-t}(1-(1-\frac{t^2}{n^2})^n)$

Or, pour $t \in [0,n]$, on a : $1-(1-\frac{t^2}{n^2})^n \leqslant n \times \frac{t^2}{n^2} = \frac{t^2}{n}$ (résultat 5. b)) , d'où :

$$0 \leqslant \mathrm{e}^{-t} - e_n(t) \leqslant \frac{t^2}{n}\mathrm{e}^{-t}$$

7. On a : $\gamma = \lim\limits_{n\to\infty} \Big(\int_0^1 \frac{1-e_n(t)}{t} dt - \int_1^n \frac{e_n(t)}{t}\, dt \Big)$ (question 4.)

Or :

$\star\ 0 \leqslant \int_0^1 \frac{1-e_n(t)}{t}\, dt - S(1) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-t}-e_n(t)}{t}\, dt \leqslant \frac{1}{n}\int_0^1 t\mathrm{e}^{-t} dt \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

$\star\ \int_1^n \frac{e_n(t)}{t}\, dt = \int_1^n \frac{e_n(t)-\mathrm{e}^{-t}}{t}\, dt + \int_1^n \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\, dt$

et $0 \leqslant \int_1^n \frac{\mathrm{e}^{-t}-e_n(t)}{t}\, dt \leqslant \frac{1}{n}\int_1^n t\mathrm{e}^{-t}\, dt \leqslant \frac{1}{n}\int_1^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t}\, dt \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

tandis que : $\lim\limits_{n\to\infty} \int_1^n \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\, dt = R(1)$

Ainsi $\gamma = S(1) - R(1)$.

Exercice 1.8.

Pour $\lambda \in \mathbb{R}^+$, on considère le polynôme $P_\lambda = X^3 + \lambda X - 1$.

1. Montrer que ce polynôme admet un unique zéro réel noté $u(\lambda)$.

2. Montrer que la fonction $u : \lambda \mapsto u(\lambda)$ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

3. Montrer que pour $\lambda > 0$, on a $u(\lambda) \leqslant \frac{1}{\lambda}$, en déduire $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} u(\lambda)$.

4. a) Montrer que u est bornée.

   b) Montrer que pour λ et λ_0 dans $\mathbb{R}^+$, on a :

   $$[u(\lambda)-u(\lambda_0)][u(\lambda)^2 + u(\lambda)u(\lambda_0) + u(\lambda_0)^2 + \lambda] + (\lambda-\lambda_0)u(\lambda_0) = 0$$

   c) Montrer que u est continue sur $\mathbb{R}^+$.

5. Montrer que u est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et exprimer $u'(\lambda)$ en fonction de $u(\lambda)$.

6. Montrer que u est une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $]0,1]$.

Solution :

1. On a $P'_\lambda(x) = 3x^2 + \lambda > 0$ et $x \mapsto P_\lambda(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Comme $\lim\limits_{-\infty} P_\lambda = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} P_\lambda = +\infty$, P_λ réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$: P_λ s'annule une fois et une seule sur $\mathbb{R}$.

Notons que $P_\lambda(0) = -1$, donc $u(\lambda) > 0$.

2. Soit λ, λ' tels que $\lambda' < \lambda$. On a :
$P_\lambda(u(\lambda')) = u(\lambda')^3 + \lambda u(\lambda') - 1 = u(\lambda')^3 + \lambda' u(\lambda') - 1 + (\lambda - \lambda')u(\lambda')$
$= (\lambda - \lambda')u(\lambda') > 0$
Ainsi $P_\lambda(u(\lambda')) > P_\lambda(u(\lambda))$ et donc $u(\lambda') > u(\lambda)$, ce qui prouve que l'application u est strictement décroissante.

3. On a $u(\lambda) = \dfrac{1 - u(\lambda)^3}{\lambda}$, donc $\lambda > 0 \implies u(\lambda) \leqslant \dfrac{1}{\lambda}$ et comme $u(\lambda) > 0$, on en déduit :

$$\lim_{\lambda \to +\infty} u(\lambda) = 0$$

4. a) u est positive strictement décroissante, telle que $u(0) = 1$, la fonction u est à valeurs dans $[0, 1]$, donc bornée.

b) On a : $u(\lambda)^3 + \lambda u(\lambda) = 1 = u(\lambda_0)^3 + \lambda_0 u(\lambda_0)$, soit :
$[u(\lambda) - u(\lambda_0)][u(\lambda)^2 + u(\lambda)u(\lambda_0) + u(\lambda_0)^2 + \lambda] + \lambda u(\lambda) - \lambda_0)u(\lambda_0) = 0$
et comme $\lambda u(\lambda) - \lambda_0 u(\lambda_0) = \lambda(u(\lambda) - u(\lambda_0)) + (\lambda - \lambda_0)u(\lambda_0)$
$[u(\lambda) - u(\lambda_0)][u(\lambda)^2 + u(\lambda)u(\lambda_0) + u(\lambda_0)^2 + \lambda] + (\lambda - \lambda_0)u(\lambda_0) = 0$

c) Ecrivons :
$$|u(\lambda) - u(\lambda_0)| = \frac{|\lambda - \lambda_0| u(\lambda_0)}{u(\lambda)^2 + u(\lambda)u(\lambda_0) + u(\lambda_0)^2 + \lambda} \leqslant \frac{|\lambda - \lambda_0| u(\lambda_0)}{u(\lambda_0)^2} \underset{\lambda \to \lambda_0}{\longrightarrow} 0$$
Donc u est continue en tout point λ_0.

5. En revenant sur le calcul précédent, on écrit par continuité de u :
$$\frac{u(\lambda) - u(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} = -\frac{u(\lambda_0)}{u(\lambda)^2 + u(\lambda)u(\lambda_0) + u(\lambda_0)^2 + \lambda} \underset{\lambda \to \lambda_0}{\longrightarrow} -\frac{u(\lambda_0)}{3u(\lambda_0)^2 + \lambda_0}$$
u est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et $u'(x) = -\dfrac{u(x)}{3u(x)^2 + x}$

6. u' est strictement négative, donc u réalise une bijection strictement décroissante de $\mathbb{R}^+$ sur son image $]0, 1]$.

Exercice 1.9.

On considère une fonction f définie et continue sur $[0, \pi]$ et l'intégrale

$$I_n = \int_0^\pi f(t) \sin(nt) dt.$$

1. On suppose que f est de classe C^1 sur $[0, \pi]$. Montrer que la suite (I_n) est convergente de limite nulle.

2. On suppose ici que f est seulement de classe C^0 sur $[0, \pi]$. On veut démontrer que le résultat précédent est encore valable.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit F la fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ qui à tout n-uplet de réels $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ associe le nombre $\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \big(f(t) - \sum_{k=1}^n a_k \sin(kt)\big)^2 dt$. Pour tout k, on pose $b_k(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\sin(kt)dt$.

Enfin, on rappelle que pour tout couple de réels (a, b), on a

$$\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b) - \cos(a+b)\right).$$

Calculer pour tout couple (k, ℓ) d'entiers strictement positifs l'intégrale

$$\int_0^\pi \sin(kt)\sin(\ell t)dt.$$

En déduire que quel que soit $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$F(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{k=1}^n a_k^2 - 2\sum_{k=1}^n a_k b_k(f) + \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f^2(t)dt$$

b) Montrer que F admet un minimum global au point $(b_1(f), \cdots, b_n(f))$. Quelle est la valeur de ce minimum ?

c) Montrer que la série $\sum \big(b_k(f)\big)^2$ est convergente et donner un majorant de sa somme.

d) Conclure.

Solution :

1. Les deux fonctions à intégrer étant de classe C^1 sur $[0, \pi]$, une intégration par parties donne : $I_n = \big[-\frac{1}{n}f(t)\cos(nt)\big]_0^\pi + \frac{1}{n}\int_0^\pi f'(t)\cos(nt)\,dt$

Les fonctions f et f' sont bornées sur le segment $[0, \pi]$ par M et M' respectivement. Ainsi :

$$|I_n| \leq \frac{2M}{n} + \frac{\pi M'}{n}$$

cette dernière expression tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

2. a) Comme $\sin kt \sin \ell t = \frac{1}{2}\cos(k-\ell)t - \frac{1}{2}\cos(k+\ell)t$, il vient :

$$\int_0^\pi \sin(kt)\sin(\ell t)dt = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq \ell \\ \pi/2 & \text{si } k = l \end{cases}$$

Ainsi : $F(a_1, \ldots, a_n) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f^2(t)dt - 2\sum_{k=1}^n a_k b_k(f) + \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \big(\sum_{k=1}^n a_k \sin(kt)\big)^2 dt$

Lorsqu'on développe le carré de la dernière expression, tous les termes des doubles produits ont une intégrale nulle, alors que l'intégrale des autres termes vaut $\frac{\pi}{2}$. On obtient ainsi :

$$F(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 - 2\sum_{k=1}^{n} a_k b_k(f) + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f^2(t)dt$$

b) Le calcul donne :

$$F(a_1, \ldots, a_n) - F(b_1(f), \ldots, b_n(f)) = \sum_{k=1}^{n} [a_k - b_k(f)]^2\, 0$$

Il en résulte que F admet un minimum global en $(b_1(f), \ldots, b_n(f))$.

c) Comme F est à valeurs positives, son minimum est positif ou nul, c'est-à-dire :

$$\sum_{k=1}^{n} b_k^2(f) - 2\sum_{k=1}^{n} b_k(f)b_k(f) + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f^2(t)dt \geqslant 0$$

ce qui est équivalent à $\sum_{k=1}^{n} b_k^2(f) \leqslant \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f^2(t)dt$.

Les sommes partielles de la série $\sum b_k^2(f)$ sont majorées, la série est donc convergente et :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} b_k^2(f) \leqslant \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f^2(t)dt$$

d) La série converge, donc son terme général tend vers 0, c'est-à-dire :

$$\lim_{k\to+\infty} b_k(f) = 0.$$

Exercice 1.10.

1. a) Déterminer l'ensemble D des réels x pour lesquels l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t^2}dt$ converge. On note alors $F(x)$ sa valeur.

b) Grâce au changement de variable $t \mapsto 1/t = u$, dont on justifiera l'utilisation, prouver une propriété de symétrie de la courbe représentative $\mathcal{C}$ de F.

c) Justifier que $\forall\, t \in [1, +\infty[\,, \dfrac{t^{x-1}}{1+t^2} \geqslant \dfrac{t^{x-3}}{2}$. En déduire la limite de F à gauche quand x tend vers la borne supérieure de D.

2. On admet que F est de classe C^2 sur D et que

$$\forall\, x \in D, F''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big(\frac{t^{x-1}}{1+t^2}\Big)dt$$

a) Étudier les variations de F' sur D.

b) Déterminer les limites de F' aux bornes de D.

c) Dresser le tableau de variations de F et représenter l'allure de la courbe $\mathcal{C}$.

3. Pour $x \in D$, on définit une fonction g_x sur $\mathbb{R}$ par

$$g_x : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \in]-\infty, 0] \\ \dfrac{1}{F(x)} \times \dfrac{t^{x-1}}{1+t^2} & \text{si } t \in]0, +\infty[\end{cases}$$

a) Prouver que g_x est une densité de probabilité.

b) Étudier l'existence des moments d'une variable aléatoire U_x (définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$), de loi de densité g_x.

Solution :

1. a) Soit $f_x : t \mapsto \dfrac{t^{x-1}}{1+t^2}$, la fonction f_x est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
On a : $f_x(t) \underset{(0^+)}{\sim} t^{x-1}$ d'intégrale convergente sur $]0, 1]$ si et seulement si $x > 0$, et $f_x(t) \underset{(+\infty)}{\sim} t^{x-3}$ d'intégrale convergente sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $x < 2$, d'où en appliquant deux fois la règle de Riemann :

$$D =]0, 2[$$

b) La fonction $t \mapsto 1/t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ bijective de $\mathbb{R}_+^*$ dans lui-même. Le changement de variable ainsi suggéré donne en procédant directement avec les bornes 0 et $+\infty$:

$$F(x) = \int_{+\infty}^{0} \frac{u^{1-x}}{1+1/u^2} \frac{-du}{u^2} = \int_0^{+\infty} \frac{u^{2-x-1}}{1+u^2} = F(2-x)$$

(ce qui est compatible avec le domaine de définition !) Donc $\mathcal{C}$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = 1$.

c) On a $1 \leqslant t \implies 1 + t^2 \leqslant 2t^2 \implies \dfrac{t^{x-1}}{1+t^2} \geqslant \dfrac{t^{x-3}}{2}$.

Comme $f_x \geqslant 0$, on a $F(x) \geqslant \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^{x-3}}{2}\, dt = \frac{1}{2(2-x)} \underset{x \to 2^-}{\longrightarrow} +\infty$.

2. a) On a : $F''(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(\ln t)^2\, t^{x-1}}{1+t^2} dt > 0$, donc F' est strictement croissante.

b) $\lim\limits_{2^-} F' = L \in [0, +\infty]$ existe d'après le théorème de la limite monotone. Si F' avait une limite finie en 2 à gauche, alors F' serait bornée sur $[0, 2[$ et par l'inégalité des accroissements finis il en serait de même de F, ce qui est faux. Donc $L = \lim\limits_{2^-} F' = +\infty$ et par symétrie, $\lim\limits_{0^+} F' = -\infty$.

c) Comme F' est strictement croissante de $-\infty$ à $+\infty$, le théorème de la bijection assure l'existence d'un unique x_0 tel que $F'(x_0) = 0$, et $x_0 = 1$ par symétrie. De plus : $F(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$, d'où le tableau de variations :

x	0		1		2
$F'(x)$	‖	$-$	0	$+$	‖
F	$+\infty$	$\searrow$	$\pi/2$	$\nearrow$	$+\infty$

3. a) pour $x \in D$, la fonction g_x est positive, continue sur $\mathbb{R}^*$ et d'intégrale 1, donc est une densité de probabilité.

b) $E(U_x^k) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1+k}}{1+t^2} dt$ si cette intégrale converge, donc si $x - 1 + k \in]0, 2[$ (l'intégrande est positif) ; d'après le domaine de définition de F :

- $E(U_x)$ existe si et seulement si $x \in]0, 1[$;
- pour tout $x \in D$, U_x n'admet pas de moment d'ordre $\geqslant 2$.

Exercice 1.11.

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on définit la fonction F_n par :

$$F_n : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^x)^n}.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de F_n.

2. Pour tout $n \geqslant 1$ et tout $x > 1$, montrer que $F_{n+1}(x) - F_n(x) = -\dfrac{1}{nx} \times F_n(x)$.

3. Pour tout $x > 1$, montrer que la suite $(F_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. (on pourra « couper » l'intégrale en trois à l'aide des intervalles : $\left[0, n^{-\frac{1}{2x}}\right]$, $\left[n^{-\frac{1}{2x}}, 1\right]$ et $\left[1, +\infty\right[$).

4. Pour $x > 1$ fixé, on pose $v_n = n^{\frac{1}{x}} F_n(x)$.

a) Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)$.

b) En déduire la convergence de la suite de terme général v_n. Montrer que sa limite, qui sera notée ℓ, est non nulle.

c) En déduire, en fonction de $F_1(x)$ et de ℓ, un équivalent de $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{kx}\right)$ quand n tend vers $+\infty$.

d) Étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} F_n(x)$.

Solution :

1. ⋆ Si $x > 0$, l'intégrale proposée n'est impropre que pour la borne infinie, et : $0 \leqslant \dfrac{1}{(1+t^x)^n} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{xn}}$, donc l'intégrale converge si et seulement si $nx > 1$.

⋆ Si $x = 0$, la fonction à intégrer est constante non nulle et l'intégrale diverge banalement ;

⋆ si $x < 0$, on a : $\dfrac{1}{(1+t^x)^n} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$ et la divergence est encore banale.

Ainsi $F_n(x)$ est défini si et seulement si $x > 0$ et $nx > 1$, soit $x \in \left]\dfrac{1}{n}, +\infty\right[$.
Donc toutes les fonctions F_n sont définies sur $]1, +\infty[$

2. Pour tout $T > 0$, par intégration par parties, on a :

$$\int_0^T \frac{dt}{(1+t^x)^{n+1}} - \int_0^T \frac{dt}{(1+t^x)^n} = \int_0^T \frac{t}{x} \times \frac{-xt^{x-1}}{(1+t^x)^{n+1}}\, dt$$
$$= \Big[\frac{t}{x} \times \frac{1}{n(1+t^x)^n}\Big]_0^T - \int_0^T \frac{dt}{nx(1+t^x)^n}$$

En faisant tendre T vers $+\infty$, on obtient :

$$F_{n+1}(x) - F_n(x) = -\frac{1}{nx} \times F_n(x), \text{ } i.e. \text{ } F_{n+1}(x) = (1 - \frac{1}{nx})F_n(x)$$

3. Pour tout $x > 1$, on a :

$$0 \leqslant \int_0^{n^{-1/2x}} \frac{dt}{(1+t^x)^n} \leqslant \int_0^{n^{-1/2x}} dt = \frac{1}{n^{1/2x}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

$$0 \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^x)^n} \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{nx}} = \frac{1}{nx-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

$$0 \leqslant \int_{n^{-1/2x}}^1 \frac{dt}{(1+t^x)^n} \leqslant \frac{1 - n^{-1/2x}}{(1+n^{-1/2})^n}$$

$$0 \leqslant \int_{n^{-1/2x}}^1 \frac{dt}{(1+t^x)^n} \leqslant (1 - n^{-1/2x}) \exp\big(-n\ln(1+n^{-1/2})\big) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$
$$(\text{car } n\ln(1+n^{-1/2}) \underset{n\to+\infty}{\sim} n^{1/2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty)$$

Donc $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x) = 0$.

4. a) D'après la relation de la question 2, on a :

$$\ln\big(\frac{v_{n+1}}{v_n}\big) = \frac{1}{x}\ln(1+\frac{1}{n}) + \ln(1-\frac{1}{nx}).$$

Des calculs de développement limités à l'ordre 2 donnent :

$$\ln\big(\frac{v_{n+1}}{v_n}\big) = \big(-\frac{1}{2x} - \frac{1}{2x^2}\big)\frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})$$

La règle de Riemann donne la convergence de la série $\sum \ln\big(\frac{v_{n+1}}{v_n}\big)$

b) Par télescopage on en déduit que la suite de terme général $\ln(v_n)$ converge de limite notée ℓ_0, donc la suite (v_n) converge vers $\ell = \mathrm{e}^{\ell_0} > 0$.

c) D'après la question 2, on a par un argument de récurrence banal :

$$F_{n+1}(x) = F_1(x) \prod_{k=1}^{n} \big(1 - \frac{1}{kx}\big).$$

D'après la question précédente, on a $F_{n+1}(x) \underset{(n\to+\infty)}{\sim} \frac{\ell}{(n+1)^{1/x}} \underset{(n\to+\infty)}{\sim} \frac{\ell}{n^{1/x}}$.

D'où $\prod_{k=1}^{n} \big(1 - \frac{1}{kx}\big) \underset{(n\to+\infty)}{\sim} \frac{\ell}{F_1(x) n^{1/x}}$, car $F_1(x) > 0$.

d) On a $F_{n+1}(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ell}{(n)^{1/x}}$, et comme $1/x < 1$, la règle de Riemann montre que la série diverge.

Exercice 1.12.

Soit Φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\Phi(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-t^2/2} dt$.

1. a) Montrer que Φ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ sur $]0, \sqrt{2\pi}[$.

b) On note Ψ la bijection réciproque de Φ. Dresser son tableau de variations.

2. Soit x réel.

a) Montrer $\Phi(x) + \Phi(-x) = \sqrt{2\pi}$.

En déduire que pour tout $y \in]0, \sqrt{2\pi}[$: $-\Psi(y) = \Psi(\sqrt{2\pi} - y)$.

b) Montrer que pour tout x réel négatif, on a :

$$\mathrm{e}^{-x^2/2}\big(1 - \frac{1}{x^2}\big) \leqslant -x\Phi(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x^2/2}$$

[Pour la minoration, on écrira, pour $B < x$, $\displaystyle\int_B^x \mathrm{e}^{-u^2/2} du = \int_B^x \frac{1}{u} \times u\mathrm{e}^{-u^2/2} du$ avant de procéder à une intégration par parties]

c) En déduire un équivalent de $\Phi(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$, puis un équivalent de $\sqrt{2\pi} - \Phi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

3. Soit x un réel négatif. On pose $x = \Psi(y)$.

a) Dans quel intervalle se trouve y ?

b) Montrer que

$$-\frac{\Psi^2(y)}{2} - \ln|\Psi(y)| + \ln\big(1 - \frac{1}{\Psi^2(y)}\big) \leqslant \ln y \leqslant -\frac{\Psi^2(y)}{2} - \ln|\Psi(y)|$$

c) En déduire un équivalent de $\Psi(y)$ lorsque y tend vers 0 par valeurs supérieures.

Solution :

1. a) La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2/2}$ étant continue sur $\mathbb{R}$, strictement positive, l'intégrale étant clairement convergente, la fonction $x \mapsto \Phi(x)$ est de classe C^1, strictement croissante et comme on sait que $\lim\limits_{+\infty} \Phi = \sqrt{2\pi}$, elle réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $]0, \sqrt{2\pi}[$.

b) Comme $\Phi'(x)$ n'est jamais nul sur $\mathbb{R}$, son inverse Ψ est également de classe C^1, strictement croissante et réalise une bijection de $]0, \sqrt{2\pi}[$ sur $\mathbb{R}$.

2. a) C'est une propriété de la loi normale. Par parité de $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2/2}$ sur $\mathbb{R}$, $\Phi(-x) = \sqrt{2\pi} - \Phi(x)$, ce qui donne le résultat pour Φ.
Posons $x = \Psi(y)$. On vient de montrer que $\Phi(-\Psi(y)) = \sqrt{2\pi} - y$. En composant par Ψ, il vient $-\Psi(y) = \Psi(\sqrt{2\pi} - y)$.

b) Soit $x < 0$.

$\star$ Pour tout $B < x$: $\displaystyle\int_B^x u.\mathrm{e}^{-u^2/2}du \leqslant \int_B^x x.\mathrm{e}^{-u^2/2}du$. Or :

$$\int_B^x u.\mathrm{e}^{-u^2/2}du = \big[-\mathrm{e}^{-u^2/2}\big]_B^x \underset{B\to+\infty}{\longrightarrow} -\mathrm{e}^{-x^2/2}$$

Donc, $-\mathrm{e}^{-x^2/2} \leqslant \displaystyle\int_{-\infty}^x x.\mathrm{e}^{-u^2/2}du = x\Phi(x)$.

$\star$ Pour la minoration, une intégration par parties donne pour tout $B < x$:

$$\begin{aligned}\int_B^x \mathrm{e}^{-u^2/2}du &= \int_B^x \frac{1}{u}\times u\mathrm{e}^{-u^2/2}du = \big[\frac{\mathrm{e}^{-u^2/2}}{u}\big]_B^x - \int_B^x \frac{\mathrm{e}^{-u^2/2}}{u^2}du \\ &= \big[\frac{\mathrm{e}^{-u^2/2}}{u}\big]_B^x - \int_B^x \frac{u.\mathrm{e}^{-u^2/2}}{u^3}du\end{aligned}$$

Or :

$$\int_B^x \frac{u.\mathrm{e}^{-u^2/2}}{u^3}du \leqslant \int_B^x \frac{u.\mathrm{e}^{-u^2/2}}{x^3}du = \frac{1}{x^3}\big[-\mathrm{e}^{-u^2/2}\big]_B^x$$

En prenant la limite lorsque B tend vers $-\infty$, il vient :

$$\Phi(x) \geqslant \frac{-1}{x}\times\mathrm{e}^{-x^2/2} + \frac{1}{x^3}\times\mathrm{e}^{-x^2/2}$$

ce qui est la minoration demandée.

c) Lorsque x tend vers $-\infty$, les inégalités précédentes donnent un équivalent de $\Phi(x)$ qui est $-\dfrac{\mathrm{e}^{-x^2/2}}{x}$.
La relation $\Phi(x) + \Phi(-x) = \sqrt{2\pi}$ donne, lorsque x tend vers $+\infty$

$$\sqrt{2\pi} - \Phi(x) = \Phi(-x) \sim \frac{\mathrm{e}^{-x^2/2}}{x}$$

3. a) On a : $y \in]0, \Psi(0)[=]0, \sqrt{\pi/2}[$.

b) Posons $x = \Psi(y)$. Les inégalités précédentes donnent :

$$-\frac{1}{\Psi(y)} \times \mathrm{e}^{-\Psi(y)^2/2}\big(1 - \frac{1}{\Psi(y)^2}\big) \leqslant \Phi(\Psi(y)) = y \leqslant -\frac{1}{\Psi(y)} \times \mathrm{e}^{-\Psi(y)^2/2}$$

On remarque que $-\Psi(y) = |\Psi(y)|$. En passant au logarithme, il vient :

$$-\frac{\Psi^2(y)}{2} - \ln|\Psi(y)| + \ln\big(1 - \frac{1}{\Psi^2(y)}\big) \leqslant \ln y \leqslant -\frac{\Psi^2(y)}{2} - \ln|\Psi(y)|$$

c) On a $\lim\limits_{y \to 0^+} \Psi(y) = -\infty$.

Donc, $\ln|\Psi(y)| = o\big(-\frac{\Psi^2(y)}{2}\big)$ et $\ln\big(1 - \frac{1}{\Psi^2(y)}\big) \sim -\frac{1}{\Psi^2(y)}$.

Ceci entraîne qu'au voisinage de 0, $\ln(y) \sim -\frac{\Psi^2(y)}{2}$ et comme $\Psi(y) < 0$:

$$\Psi(y) \sim -\sqrt{2\ln(y)}$$

Exercice 1.13.

Soit n un entier, tel que $n \geqslant 2$.
On considère $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique noté $\langle ., . \rangle$, de la norme associée notée $\|.\|$, et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, symétrique réelle dont les valeurs propres sont toutes strictement positives. On confond vecteur de $\mathbb{R}^n$ et matrice colonne canoniquement associée et on pose, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, $\Phi(X) = {}^tXAX$.

1. Soit B un élément de $\mathbb{R}^n$. Montrer que l'équation $AX = B$ d'inconnue $X \in \mathbb{R}^n$ admet une unique solution qu'on notera R.

2. Montrer qu'il existe deux réels α et β strictement positifs tels que pour tout X de $\mathbb{R}^n$

$$\alpha||X||^2 \leqslant \Phi(X) \leqslant \beta||X||^2$$

Dans la suite de l'exercice, on pose pour $X \in \mathbb{R}^n$: $F(X) = \Phi(X) - 2\ {}^tBX$.

3. a) Déterminer le gradient ∇F_X de F en X.

b) Soient X et H deux éléments de $\mathbb{R}^n$. Montrer que

$$F(X + H) = F(X) + \langle \nabla F_X, H \rangle + \Phi(H)$$

c) En déduire que F possède un minimum sur $\mathbb{R}^n$. En quel point est-il atteint ?

4. Soit $X \in \mathbb{R}^n$ fixé, $X \neq 0$. Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ de façon à ce que $F(X - \alpha\nabla F_X)$ soit minimal. Calculer ce minimum.

5. Soit $X_0 \in \mathbb{R}^n$. On définit une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ par, pour tout $k \in \mathbb{N}$: $X_{k+1} = X_k - \alpha_k \nabla F_{X_k}$, où $\alpha_k = \dfrac{||\nabla F_{X_k}||^2}{2\Phi(X_k)}$ si $X_k \neq R$ et 0 sinon.

a) Montrer que la suite $(F(X_k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge.

b) Exprimer $F(X_{k+1}) - F(X_k)$ en fonction de α_k et de ∇F_{X_k}.

6. Une suite $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ sera dite convergente vers un vecteur $Z \in \mathbb{R}^n$ si $\lim\limits_{k\to+\infty} ||Y_k - Z|| = 0$, ce qui revient à dire que les coordonnées de Y_k convergent vers les coordonnées corespondantes de Z.

a) Montrer que la suite $(\nabla F_{X_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

b) En déduire la limite de la suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Solution :

1. La matrice A n'admet pas 0 comme valeur propre : elle est donc inversible et l'équation $AX = B$ admet comme unique solution $R = A^{-1}B$.

2. La matrice A est orthogonalement semblable à une matrice diagonale :

$\exists\, D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ diagonale et P orthogonale telles que $A = PD\,{}^tP$.

Les coefficients λ_i sont les valeurs propres de A, donc sont strictement positifs.

Ainsi, on posant $Y = {}^tPX$, il vient : $\Phi(X) = {}^tYDY = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$. De plus, la matrice P étant orthogonale, on a : $||Y|| = ||X||$. Donc :

$$\min(\lambda_i)||X||^2 = \min(\lambda_i)\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \leqslant \Phi(X) \leqslant \max(\lambda_i)\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \max(\lambda_i)||X||^2$$

On peut prendre $\alpha = \min(\lambda_i)$ et $\beta = \max(\lambda_i)$

3. a) En écrivant F en fonction des coordonnées du vecteur X, il vient :

$$F(X) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_ix_j - 2\sum_{i=1}^{n} x_ib_i$$

C'est un polynôme en les n variables $x_1, \ldots, x_n$. Les dérivées partielles existent et sont continues en tout point X et pour tout indice i :

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(X) = 2a_{i,i}x_i + 2\sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{i,j}x_j - 2b_i$$

Matriciellement le gradient s'écrit donc

$$\nabla F_X = 2(AX - B)$$

b) Par bilinéarité du produit scalaire, on a :

$$F(X+H) - F(X) = 2{}^tHAX + \Phi(H) - 2\langle B, H\rangle = \langle \nabla F_X, H\rangle + \Phi(H)$$

par la remarque précédente.

c) Les points critiques sont déterminés par $\nabla F_X = 0$. Le seul point critique est donc le point R. De plus, pour tout $H \in \mathbb{R}^n$, $F(R+H) - F(R) = \Phi(H) > 0$ (question 2), donc au point R on a un minimum global de F.

4. En remplaçant H par ∇F_X, on obtient :

$$\begin{aligned} g(\alpha) &= F(X) - \langle \nabla F_X, \alpha \nabla F_X \rangle + \Phi(\alpha \nabla F_X) \\ &= \alpha^2 \Phi(\nabla F_X) - \alpha \langle \nabla F_X, \nabla F_X \rangle + F(X) \end{aligned}$$

C'est un trinôme du second degré en α.

Le minimum est atteint pour $\alpha = \dfrac{||\nabla F_X||^2}{2\Phi(\nabla F_X)}$ et vaut : $F(X) - \dfrac{||\nabla F_X||^4}{4\Phi(\nabla F_X)}$.

5. a) La question précédente montre que α_k est choisi de façon à minimiser la fonction g pour $X = X_k$. Donc $F(X_{k+1}) \leqslant F(X_k)$ et la suite est décroissante. Elle est de plus minorée par $F(R)$: elle converge.

b) On a :

$$F(X_{k+1}) - F(X_k) - \alpha_k ||\nabla F_{X_k}||^2 + \alpha_k^2 \Phi(\nabla F_{X_k}) = -\frac{||\nabla F_{X_k}||^4}{4\Phi(\nabla F_{X_k})^2}$$

6. a) On remarque que $\lim\limits_{k \to +\infty} (F(X_{k+1}) - F(X_k)) = 0$.

Donc $\lim\limits_{k \to +\infty} \dfrac{||\nabla F_{X_k}||^4}{4\Phi(\nabla F_{X_k})^2} = 0$.

Enfin par la question 2,

$$\frac{||\nabla F_{X_k}||^4}{4\Phi(\nabla F_{X_k})^2} \geqslant \frac{||\nabla F_{X_k}||^4}{4\beta ||\nabla F_{X_k}||^2}$$

Tout ceci montre que $\lim\limits_{k \to +\infty} ||\nabla F_{X_k}||^2 = 0$.

b) Comme $\nabla F_{X_k} = 2(AX_k - B)$, on a $X_k = \dfrac{1}{2}(A^{-1} \nabla F_{X_k}) + R$ ce qui montre, par exemple en revenant aux coefficients, que $\lim\limits_{k \to +\infty} X_k = R$.

Exercice 1.14.

1. On considère une fonction g positive, décroissante et de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ et f une fonction continue sur I.

a) Justifier l'existence des bornes suivantes : $m = \inf\{F(t), t \in [a, b]\}$ et $M = \sup\{F(t), t \in [a, b]\}$, où $F(t) = \displaystyle\int_a^t f(x)dx$.

b) Montrer que l'on a :

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(b)F(b) - \int_a^b g'(x)F(x)\,dx.$$

c) En déduire que :

$$mg(a) \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leqslant Mg(a).$$

d) Prouver qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que :

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)F(c) = g(a)\int_a^c f(x)\,dx$$

2. On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}^+$ en posant : $\varphi(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{e}^{-ax}\,dx$.

a) Montrer que l'intégrale définissant $\varphi(a)$ est convergente, pour tout $a0$.

b) Soient $a \in \mathbb{R}^+$ et h la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ en posant $h(t) = \dfrac{1-\mathrm{e}^{-at}}{t}$. Établir que h est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ qui est décroissante et positive. Montrer qu'elle est prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

c) Soient $x \in \mathbb{R}^+$ et $A > 0$, montrer qu'il existe $c \in [0, A]$ tel que

$$\int_0^A \frac{1-\mathrm{e}^{-tx}}{t}\sin(t)dt = x[1-\cos c]$$

Prouver que la fonction φ est continue en 0.

Solution :

1. a) Comme primitive d'une fonction continue, F est dérivable et par suite continue sur le segment $[a, b]$, elle admet donc une borne inférieure et une borne supérieure sur $[a, b]$ (qui sont atteintes).

b) On fait l'intégration par parties suivante :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)dx &= \int_a^b F'(x)g(x)dx = \big[F(t)g(t)\big]_a^b - \int_a^b g'(x)F(x)dx \\ &= g(b)F(b) - \int_a^b g'(x)F(x)dx.\end{aligned}$$

c) Comme g est décroissante, sa dérivée est négative et en utilisant la question précédente il vient :

$$mg(a) = mg(b)+m(g(a)-g(b)) = mg(b)+m\int_a^b(-g'(x))dx \leqslant \int_a^b f(x)g(x)dx$$

et $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)dx \leqslant Mg(b) + M\int_a^b(-g'(x))dx = Mg(a)$.

d) On peut supposer $g(a) \neq 0$. Avec la question c), on voit que l'égalité souhaitée s'obtient en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction $t \longmapsto F(t)/g(a)$ sur l'intervalle $[a, b]$.

2. a) Comme la fonction $x \longmapsto \dfrac{\sin x}{x}$ se prolonge par continuité en 0, il n'y a pas de problème de convergence en 0.

Comme $|\frac{\sin t}{t}\mathrm{e}^{-at}| \leqslant \mathrm{e}^{-at}$, on voit que si $a > 0$, l'intégrale considérée est absolument convergente.
Lorsque $a = 0$, on voit avec une intégration par parties que :

$$\int_1^X \frac{\sin x}{x}dx = \big[-\frac{\cos x}{x}\big]_1^X - \int_1^X \frac{\cos x}{x^2}dx = -\cos 1 + \frac{\cos X}{X} - \int_1^X \frac{\sin x}{x^2}dx.$$

Comme l'intégrale figurant dans la dernière inégalité est absolument convergente, on en déduit que l'intégrale proposée est encore convergente.

b) Un développement limité à l'ordre 1 en 0 de la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-at}$ permet de voir que h se prolonge par continuité en posant $h(0) = a$. Avec un développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{at}$, on voit que $\frac{h(t)-h(0)}{t} = -\frac{a^2}{2} + o(1)$, par suite, h est dérivable en 0 et $h'(0) = -\frac{a^2}{2}$.
Comme pour $t > 0$, $h'(t) = \frac{(1+at)\mathrm{e}^{-at}-1}{t^2} = \mathrm{e}^{-at}\frac{1+at-\mathrm{e}^{at}}{t^2}$, avec le développement limité utilisé précédemment on trouve $\lim_{t\to 0} h'(t) = -\frac{a^2}{2}$ et h est donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ (on peut aussi utiliser ceci pour montrer la dérivabilité en 0). Le fait que $h'(t) \leqslant 0$ sur $\mathbb{R}^+$ est de notoriété publique. La fonction h est donc décroissante et il est clair qu'elle est positive.

c) Comme les hypothèses nécessaires sont vérifiées, la formule prouvée au cours de la première question, en prenant pour f la fonction $t \mapsto \sin t$ et pour g la fonction $t \mapsto \frac{1-\mathrm{e}^{-tx}}{t}$, donne bien l'égalité souhaitée. En majorant $1-\cos c$ par 2 et en faisant tendre A vers ∞, on obtient l'inégalité $|\varphi(x) - \varphi(0)| \leqslant 2x$ qui implique la continuité de φ en 0.

Exercice 1.15.

Pour $n \geqslant 1$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $u_n(x) = (-1)^n \ln\big(1 + \frac{x^2}{n(1+x^2)}\big)$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$ la somme partielle de rang n de la série de terme général $u_k(x)$. En considérant les sommes partielles de rangs pairs et celles de rangs impairs, montrer que la série $\sum_{n\geq 1} u_n(x)$ converge pour tout réel x.
On notera $u(x)$ la somme de cette série.

2. Pour $n \geqslant 1$, on pose $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$.
Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $|R_n(x)| \leqslant \ln(1 + \frac{1}{n+1})$.

3. Montrer que la série de terme général $(-1)^n \ln(1 + \frac{1}{n})$ est convergente. On notera s sa somme.

4. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \ln(1+\frac{1}{n})$.
(on pourra considérer $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k \ln(1+\frac{1}{k})$, et utiliser le fait que :

$$|u(x)-s| \leqslant |u(x)-S_n(x)| + |S_n(x)-s_n| + |s_n-s|\ )$$

5. Montrer que pour tout $n \geqslant 1, s_{2n} = \ln\big(\frac{(2n!)^2}{2^{4n}(n!)^4}(2n+1)\big)$ et en utilisant l'équivalence de Stirling : $n! \underset{(\infty)}{\sim} \big(\frac{n}{\mathrm{e}}\big)^n\sqrt{2\pi n}$, déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)$.

Solution :

1. La série de terme général u_n est une série alternée dont le terme général décrot en valeur absolue. On sait alors que les sommes partielles de rangs pairs et celles de rangs impairs forment des suites adjacentes, donc convergentes de même limite et la suite des sommes partielles converge.

2. On a : $R_n(x) = u(x) - S_n(x)$ et comme $u(x)$ est compris entre $S_n(x)$ et $S_{n+1}(x)$, on a bien :
$|R_n(x)| \leqslant |S_{n+1}(x) - S_n(x)| = \ln\big(1+\frac{x^2}{(n+1)(1+x^2)}\big) \leqslant \ln(1+\frac{1}{n+1})$.

3. Même démonstration que dans la question 1.

4. $\star$ On a $|u(x)-s| = |u(x)-S_n(x)+S_n(x)-s_n+s_n-s|$
$$\leqslant |u(x)-S_n(x)| + |S_n(x)-s_n| + |s_n-s| \qquad (1)$$
$\star$ Or, pour tout x réel, $|u(x)-S_n(x)| = |R_n(x)| \leqslant \ln(1+\frac{1}{n+1})$,
$|s_n-s| = \big|\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k\ln(1+\frac{1}{k})\big| \leqslant \ln(1+\frac{1}{n+1})$ pour les mêmes raisons que dans la question précédente.
De plus , $\forall\,\varepsilon>0, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}^*, 2\ln(1+\frac{1}{n+1}) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, donc :
$$|u(x)-S_n(x)| + |s_n-s| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$
$\star$ Pour n_0 et $\varepsilon>0$, il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \geqslant A, |S_{n_0}(x)-s_{n_0}| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ puisque $s_{n_0} = \lim\limits_{x\to+\infty} S_{n_0}(x)$.
En écrivant l'inégalité (1) pour n_0, on a le résultat.

b) Effectuons une démonstration par récurrence. L'initialisation est immédiate et si la relation est acquise pour un certain rang n, alors :
$s_{2n+2} = s_{2n} - \ln(1+\frac{1}{2n+1}) + \ln(1+\frac{1}{2n+2})$
$= \ln\big(\frac{(2n!)^2}{2^{4n}(n!)^4}\big) - \ln(\frac{2n+2}{2n+1}) + \ln(\frac{2n+3}{2n+2})$

$$= \ln\big(\frac{(2n!)^2(2n+1)^2}{2^{4n+2}(n!)^4(n+1)^2}(2n+3)\big) = \ln\big(\frac{(2n+2!)^2(2n+3)}{2^{4n+2}(n!)^4(2n+2)^2(n+1)^2}\big)$$

$$= \ln\big(\frac{(2(n+1)!)^2}{2^{4(n+1)}((n+1)!)^4}(2n+3)\big)$$

Ce qu'il fallait. On conclut par le principe de récurrence

En utilisant la formule de Stirling, on trouve $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$. Donc $s = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

Exercice 1.16.

On note $C([0,1],\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continues sur $[0,1]$.

À toute fonction $f \in C([0,1],\mathbb{R})$, on associe la suite $(a_k(f))_k$ définie par :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, a_k(f) = \int_0^1 x^k f(x)\, dx.$$

1. Montrer que pour $f \in C([0,1],\mathbb{R})$, la suite $(a_k(f))_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

2. Soient α et β deux réels tels que $0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 1$. Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré 2 vérifiant les deux conditions suivantes :

   i) pour tout $x \in]\alpha,\beta[$, $P(x) > 1$.

   ii) pour tout $x \in [0,\alpha] \cup [\beta,1]$, $0 \leqslant P(x) \leqslant 1$.

3. Montrer qu'un polynôme P satisfaisant les conditions précédentes vérifie :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\alpha^\beta (P(x))^n dx = +\infty.$$

4. Soit $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.

   a) On suppose qu'il existe trois constantes réelles ε, α et β avec $\varepsilon > 0$ et $0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 1$ telles que l'on ait :

$$\forall\, x \in [\alpha,\beta], f(x) \geqslant \varepsilon.$$

Soit P un polynôme satisfaisant aux conditions énoncées dans la question 2. Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f(x)(P(x))^n\, dx = +\infty.$$

   b) On suppose que f appartient à $C([0,1],\mathbb{R})$ et vérifie $\forall\, k \in \mathbb{N}, a_k(f) = 0$. Montrer que la fonction f est identiquement nulle sur $[0,1]$.

5. Soit $f \in C([0,1],\mathbb{R})$. Soit $x \in [0,1]$.

   a) On pose $F_1(x) = -\int_x^1 f(t)\, dt$. Exprimer $a_k(F_1)$ en fonction de $a_{k+1}(f)$.

   b) Pour $x \in [0,1]$, on pose $F_0(x) = f(x)$ et $\forall\, i \in \mathbb{N}, F_{i+1}(x) = -\int_x^1 F_i(t)\, dt$.

Soient $k \in \mathbb{N}$ et $i \in [\![0, k]\!]$. Exprimer $a_k(f)$ en fonction de $a_{k-i}(F_i)$.

c) On suppose qu'il existe un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, k \geqslant p, a_k(f) = 0$.

Prouver que F_p est identiquement nulle sur $[0, 1]$. Que peut-on en déduire pour f ?

Solution :

1. La fonction f est continue sur $[0, 1]$, donc bornée. On note M la borne supérieure de $|f(x)|$ sur $[0, 1]$. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$|a_k(f)| \leqslant \int_0^1 x^k |f(x)| dx \leqslant M \int_0^1 x^k dx = \frac{M}{k+1}.$$

Par encadrement, la suite $(a_k(f))_k$ converge vers 0.

2. Le polynôme P doit valoir 1 en α et β, on le cherche donc de la forme $P(X) = 1 + \lambda(X - \alpha)(\beta - X)$. On voit alors que $\lambda = 1$ convient (ou tout autre nombre strictement compris entre 0 et 1)

3. Soit P un des polynômes trouvés à la question précédente. Soit $[c, d]$ un segment strictement inclus dans $]\alpha, \beta[$ et m le plus petit des deux nombres $P(c)$ et $P(d)$. On a $m > 1$ et

$$\int_\alpha^\beta P(x)^n \, dx \int_c^d P(x)^n \, dx (d - c) m^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

4. a) Comme $\forall\, x \in [\alpha, \beta], f(x) \geqslant \varepsilon$, on a : $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x) P^n(x) dx \geqslant \varepsilon \int_\alpha^\beta P^n(x) dx.$

D'après la question précédente, on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_\alpha^\beta f(x) P^n(x) dx = +\infty.$

D'autre part, pour tout $x \in [0, \alpha] \cup [\beta, 1]$, $0 \leqslant P(x) \leqslant 1$, donc $0 \leqslant P^n(x) \leqslant 1$.

D'où, $\displaystyle\left| \int_0^\alpha f(x) P^n(x) dx \right| \leqslant \int_0^\alpha |f(x)| dx$ et $\displaystyle\left| \int_\beta^1 f(x) P^n(x) dx \right| \leqslant \int_\beta^1 |f(x)| dx.$

Par suite :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x) P^n(x) dx = \lim_{n\to\infty} \Big(\int_0^\alpha f(x) P^n(x) dx + \int_\alpha^\beta \cdots + \int_1^\beta \cdots \Big) = +\infty.$$

b) On raisonne par l'absurde en supposant f non identiquement nulle. Ainsi, il existe $x_0 \in [0, 1]$ tel que $f(x_0) \neq 0$. Quitte à remplacer f par $-f$, on peut supposer que $f(x_0) > 0$. On pose alors $\varepsilon = \frac{1}{2} f(x_0) > 0$. Par continuité de f sur $[0, 1]$, il existe un voisinage $[\alpha, \beta]$ de x_0 dans $[0, 1]$ tel que pour tout $x \in [\alpha, \beta]$, $f(x) \geqslant \varepsilon$. Nous sommes donc dans les conditions de 4.a et :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f(x) P^n(x) dx = +\infty.$$

Écrivons alors $P(X) = \sum_{k=0}^{2n} \lambda_k X^k \in \mathbb{R}_{2n}[X]$.

Or, par hypothèse, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $0 = a_k(f) = \int_0^1 x^k f(x)dx$. Alors, par linéarité de l'intégration, $\int_0^1 f(x)P^n(x)dx = 0$, d'où $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f(x)P^n(x)dx = 0$.
On obtient donc une contradiction. Ainsi, la fonction f est identiquement nulle sur $[0, 1]$.

5. a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k(F_1) = \int_0^1 x^k F_1(x)dx$. On effectue une intégration par parties en posant $u'(x) = x^k$, et en prenant $u(x) = \frac{x^{k+1}}{k+1}$, $v(x) = F_1(x)$ d'où $v'(x) = f(x)$. On obtient alors : $a_k(F_1) = \frac{-1}{k+1}\int_0^1 x^{k+1} f(x)dx = \frac{-1}{k+1}a_k(F_1)$.

b) En utilisant la question précédente, on montre par récurrence que pour tout $i \in [\![0, k]\!]$, on a :

$$a_k(f) = (-1)^i \frac{k!}{(k-i)!} a_{k-i}(F_i).$$

c) Supposons qu'il existe un entier p tel que pour tout $k \geqslant p$, $a_k(f) = 0$. Alors, par la question précédente appliquée pour $i = p$ et $k = p+u$, on trouve $a_u(F_p) = 0$ pour tout $u \in \mathbb{N}$. Par la question 4, ceci implique que $F_p = 0$. Or, on montre que $f = F_0 = (F_p)^{(p)}$. La fonction f est donc identiquement nulle sur $[0, 1]$.

Exercice 1.17.

On considère les deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par le premier terme u_0 et par les relations de récurrence suivantes :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{u_n}}}{2}, \quad v_{n+1} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{u_n}}}{2}$$

1. A quelle condition portant sur la valeur de u_0, les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont-elles bien définies ?

Dans toute la suite, on supposera cette condition réalisée.

2. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n^2 + v_n^2 = 1$.

3. Montrer que (u_n) et (v_n) sont deux suites monotones bornées.

4. a) En déduire la convergence de ces deux suites. On note α la limite de (u_n) et β celle de (v_n). Exprimer β en fonction de α et montrer que $\frac{\sqrt{2}}{2} < \alpha < 1$.

b) Montrer que α est l'unique point fixe de l'application $f : t \mapsto \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{t}}}{2}$ sur $\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$.

c) Déterminer selon la position de u_0 par rapport à α le sens de variation de chacune des suites (u_n) et (v_n).

Solution :

1. Pour que les deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ soient bien définies sur $\mathbb{N}$, il est tout d'abord nécessaire que u_0 soit positif ou nul ainsi que $2 - \sqrt{u_0}$, c'est à dire $u_0 \leqslant 4$ afin que u_1 et v_1 soient définis.
Un raisonnement par récurrence montre clairement que dans ce cas $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont bien définies, positives, avec $0 \leqslant u_n \leqslant 4$.
On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $0 \leqslant v_n \leqslant u_n \leqslant 4$.

2. Pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1}^2 + v_{n+1}^2 = \dfrac{2+\sqrt{u_n}+2-\sqrt{u_n}}{4} = 1$.

3. D'après ce qui précède, pour tout $n \geqslant 1, 0 \leqslant v_n \leqslant u_n \leqslant 1$ et les suites u et v sont effectivement bornées.
D'autre part, la suite récurrente (u_n) est associée à la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{x}}$ qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
Comme $u_0 \in \mathbb{R}^+$, et que $\mathbb{R}^+$ est stable par f, u est monotone, le sens de monotonie étant donné par le signe de $u_1 - u_0$, tandis que (v_n) est monotone de sens de monotonie opposé à celui de u, puisque pour tout $n \geqslant 0$, $v_{n+1} = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{u_n}}}{2}$.

4. a) Les deux suites (u_n) et (v_n) étant monotones et bornées, elles sont convergentes. De plus, en passant à la limite dans les inégalités trouvées plus haut, on a $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ et bien sr $\beta = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{\alpha}}}{2}$. Enfin, $\alpha = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{\alpha}}}{2}$ donne $\alpha\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, puis $\alpha\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}/2}}{2} > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Enfin $\alpha \leqslant 1$ donne $\alpha \leqslant \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{1}}}{2} < 1$. Ainsi

$$\frac{\sqrt{2}}{2} < \alpha < 1$$

b) Pour $x \in [0,1]$, $f(x) = x$ est équivalent successivement à $2x = \sqrt{2+\sqrt{x}}$ puis à $2 + \sqrt{x} = 4x^2$ puis à $x = 4(2x^2-1)^2$ et $2x^2 - 1 \geqslant 0$, *i.e.* $x \geqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
Posons $P(x) = 4x^4 - 4x^2 - \dfrac{x}{4} + 1$. On a :

$$P'(x) = 16x^3 - 8x - \frac{1}{4}, P''(x) = 48x^2 - 8 = 8(6x^2 - 1).$$

P'' reste strictement positif sur $I = [\frac{\sqrt{2}}{2}, 1]$; P' est donc strictement croissante sur I et $P'(1) = 8 - \frac{1}{4} > 0$, $P'(\frac{\sqrt{2}}{2}) = 4\sqrt{2} - 8\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} < 0$. Il existe donc un unique x_0 de I qui annule P' et $x_0 > \frac{\sqrt{2}}{2}$.

P est strictement décroissante sur $[\frac{\sqrt{2}}{2}, x_0[$ et strictement croissante sur $]x_0, 1]$.

Avec $P(\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\frac{\sqrt{2}}{8} < 0$ et $P(1) = \frac{3}{4} > 0$, on a aussi $P(x_0) < 0$ et on en conclut que P s'annule une fois et une seule sur I, ce qu'il fallait.

c) On sait que la suite (u_n) est monotone et converge vers α. Donc :

- Si $u_0 < \alpha$ alors (u_n) est strictement croissante tandis que (v_n) est strictement décroissante.
- Si $u_0 > \alpha$ alors (u_n) est strictement décroissante tandis que (v_n) est strictement croissante.
- Si $u_0 = \alpha$ alors u est constante égale à α et v constante égale à β.

Exercice 1.18.

Pour tout entier n de $\mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(t)\, dt$.

1. Calculer u_0, u_1 et u_2.

2. Étudier la monotonie de la suite (u_n). En déduire que la suite (u_n) converge.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $u_{n+2} + u_n$.

4. Pour tout $n \geqslant 2$, montrer que $\dfrac{1}{2(n+1)} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{2(n-1)}$.

En déduire un équivalent simple de u_n, lorsque n tend vers l'infini, puis la nature de la série de terme général u_n.

5. On considère la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. Pour tout entier $N \in \mathbb{N}^*$, on note S_N sa somme partielle de rang N, soit : $S_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

a) Préciser la nature de la série considérée.

b) Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{p=0}^{N-1} (-1)^p (u_{2p+3} + u_{2p+1}) = \frac{1}{2} S_N$.

c) En déduire la valeur de la somme de la série.

Solution :

1. Clairement $u_0 = \frac{\pi}{4}$. Puis, $u_1 = \big[-\ln(\cos t)\big]_0^{\pi/4} = -\ln(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{1}{2}\ln(2)$.
Enfin, comme pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$, $\tan'(t) = \tan^2(t) + 1$, on trouve :

$$u_2 = \int_0^{\pi/4} (\tan^2(t) + 1 - 1)dt = \big[\tan(t) - t\big]_0^{\pi/4} = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

2. Pour tout entier n, $u_{n+1} - u_n = \displaystyle\int_0^{\pi/4} (\tan t)^n(\tan t - 1)dt$. Comme pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$, $0 \leqslant \tan t \leqslant 1$, il s'ensuit que $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$. La suite $(u_n)_n$ est donc décroissante. De plus, par positivité de l'intégrale, la suite $(u_n)_n$ est minorée par 0. Ainsi, la suite $(u_n)_n$ est convergente.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+2} + u_n = \int_0^{\pi/4} (\tan t)^n(\tan^2 t + 1)dt = \Big[\frac{(\tan t)^{n+1}}{n+1}\Big]_0^{\pi/4} = \frac{1}{n+1}.$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Par décroissance de la suite $(u_n)_n$, on obtient d'après la question 3 :

$$2u_n \geqslant u_n + u_{n+2} = \frac{1}{n+1}$$

De même : $2u_n \leqslant u_n + u_{n-2} = \frac{1}{n-1}$. On en déduit les inégalités demandées.
Il en résulte que $u_n \underset{(\infty)}{\sim} \frac{1}{2n}$.
Par la règle de Riemann, on en déduit que la série $\sum u_n$ diverge.

5. a) La règle spécifique aux séries alternées montre que la série converge. Si on veut détailler, on étudie les sous-suites des sommes partielles d'indices pairs et celles d'indices impairs et on montre qu'elles sont adjacentes.

b) D'après la question 3, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $u_{2p+3} + u_{2p+1} = \frac{1}{2p+2}$.
En multipliant par $(-1)^p$, puis en sommant, on trouve que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{p=0}^{N-1} (-1)^p(u_{2p+3} + u_{2p+1}) = \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{N-1} \frac{(-1)^p}{p+1} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

d'où le résultat.

c) Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{p=0}^{N-1} (-1)^p(u_{2p+3} + u_{2p+1}) = \sum_{p=0}^{N-1} (-1)^p u_{2p+3} + \sum_{p=0}^{N} (-1)^p u_{2p+1}$$

Après un changement d'indice, on obtient :

$$\sum_{p=0}^{N-1} (-1)^p(u_{2p+3} + u_{2p+1}) = -\sum_{p=1}^{N} (-1)^p u_{2p+1} + \sum_{p=0}^{N} (-1)^p u_{2p+1}$$

$$= u_1 + (-1)^{N+1} u_{2N+1}.$$

Comme la suite $(u_n)_n$ converge vers 0 (question 4), il s'ensuit que :

$$\lim_{N\to\infty} \Big(\sum_{p=0}^{N-1} (-1)^p (u_{2p+3} + u_{2p+1}) \Big) = u_1 = \frac{\ln 2}{2}.$$

On en déduit que la somme de la série proposée est $\ln 2$.

Exercice 1.19.

On considère une suite réelle bornée $(a_n)_{n\geq 0}$ et on pose, pour tout $x \in I = [0, 1[$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

On note $(s_n)_{n\geq 0}$ la suite des sommes partielles définie par

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ s_n = a_0 + \cdots + a_n.$$

On admet que si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ et si $x \mapsto K(x)$ est une fonction définie sur I à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $\lim\limits_{x\to 1^-} K(x) = +\infty$, alors on a $\lim\limits_{x\to 1^-} u_{K(x)} = \ell$.

1. Vérifier que la série définissant la fonction f est absolument convergente pour tout x de I. La fonction f est donc bien définie sur I.

2. Soit N un entier strictement positif fixé. Montrer que

$$(1-x) \sum_{n=0}^{N} s_n x^n = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n - s_N x^{N+1}.$$

En déduire que la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} s_n x^n$ est convergente pour tout $x \in I$ et que l'on a

$$f(x) = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n.$$

3. On suppose dans cette question que la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ est convergente et de somme nulle.

a) Pour tout $x \in I$, on pose $K(x) = \lfloor 1/\sqrt{1-x} \rfloor$, où $\lfloor t \rfloor$ désigne la partie entière du réel t. Vérifier que $K(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures.

b) On pose $u_n = \sup\{|s_k|, k \geqslant n\}$. Montrer que la suite (u_n) est bien définie et converge vers 0.

c) Montrer que l'on a :

$$|f(x)| \leqslant (1-x)[(K(x)+1)u_0 + \sum_{\boldsymbol{k=K(x)+1}}^{\infty} |s_{\boldsymbol{k}}| x^{\boldsymbol{k}}] \leqslant (1-x)(K(x)+1)u_0 + u_{\boldsymbol{K(x)+1}}.$$

d) En déduire que $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 0$.

4. On suppose dans cette question que la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ est convergente et de somme s. Prouver que $f(x)$ converge vers s lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures.

Solution :

1. L'ensemble $\{|a_k|, k \geqslant 0\}$ est borné, on peut donc considérer sa borne supérieure M. On a $|a_k x^k| \leqslant Mx^k$ puisque $x \in [0,1[$. Le théorème de comparaison des séries à termes positifs permet alors de conclure.

2. On a :

$$(1-x)\sum_{n=0}^{N} s_n x^n = \sum_{n=0}^{N} s_n x^n - \sum_{n=1}^{N+1} s_{n-1}x^n = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n - s_N x^{N+1}.$$

Comme $|s_N x^{N+1}| \leqslant (N+1)Mx^{N+1} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$, on en déduit que la série de terme général $s_n x^n$ converge et on obtient à la limite la formule souhaitée.

3. a) On a $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}} - 1 \leqslant K(x)$, d'où le résultat.

b) Comme la suite $(s_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0, l'ensemble $\{|s_n|, n \geqslant 0\}$ est non vide et borné, il possède une borne supérieure, et il s'ensuit que u_n est bien défini.
Si $I =]-r, r[$ est un intervalle ouvert contenant 0, il n'y a qu'un nombre fini de s_n qui ne se trouvent pas dans l'intervalle $]-r/2, r/2[$ car la suite $(s_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0, et par suite il n'y a qu'un nombre fini de termes de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ qui ne sont pas contenus dans I. Ceci implique la convergence de u_n vers 0.

c) En utilisant l'égalité prouvée à la question 2), il vient :

$$\begin{aligned}
|f(x)| &\leqslant (1-x)\sum_{n=0}^{K(x)} |s_n| x^n + (1-x)\sum_{n=K(x)+1}^{\infty} |s_n| x^n \\
&\leqslant (1-x)(K(x)+1)u_0 + (1-x)u_{K(x)+1}\sum_{n=K(x)+1}^{\infty} x^n \\
&\leqslant (1-x)(K(x)+1)u_0 + (1-x)u_{K(x)+1}\frac{x^{K(x)+1}}{1-x} \\
&\leqslant (1-x)(K(x)+1)u_0 + u_{K(x)+1}.
\end{aligned}$$

d) On observe que :

$$(1-x)(K(x)+1)u_0 + u_{K(x)+1} \leqslant (1-x)\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}} + 1\right)u_0 + u_{K(x)+1} \longrightarrow 0,$$

d'après la propriété évidente admise dans l'énoncé et la question 3. b).

4. On se ramène au cas précédent en posant $b_0 = a_0 - s$ et $b_n = a_n$ si $n \geqslant 1$. En effet, on a :

$$f(x) = (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty}(s_n - s)x^n + s = (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty}(\sum_{k=0}^{n} b_k)x^k + s.$$

Exercice 1.20.

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{\mathrm{e}^t - 1}dt$ est convergente si et seulement si $x > -1$.

On définit alors la fonction f sur $]-1, +\infty[$ en posant : $f(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{\mathrm{e}^t - 1}dt$.

2. a) Déterminer $f(0)$ en utilisant le changement de variable $u = \mathrm{e}^{-t}$.

b) Montrer que, pour $x > 0$, on a $f(x+1) - f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-(x+1)}}{x+1}$. Donner la valeur de $f(1)$.

3. Dresser le tableau de variations de f et préciser les limites aux bornes.

4. a) Montrer que pour tout réel x strictement supérieur à -1, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t\,\mathrm{e}^{-tx}}{\mathrm{e}^t - 1}dt$ est convergente.

b) Établir que pour tout réel h strictement positif, on a

$$\big|f(x+h) - f(x)\big| \leqslant h\int_1^{+\infty} \frac{t\,\mathrm{e}^{-tx}}{\mathrm{e}^t - 1}dt$$

c) Établir que, pour tout réel h strictement négatif et tel que $h > \dfrac{-x-1}{2}$, on a :

$$\big|f(x+h) - f(x)\big| \leqslant |h|\int_1^{+\infty} \frac{t\,\mathrm{e}^{-t(x-1)/2}}{\mathrm{e}^t - 1}dt$$

d) En déduire que f est continue en tout point de $]-1, +\infty[$.

5. Comment pourrait-on démontrer que f est dérivable sur $]-1, +\infty[$ et que, pour tout x strictement supérieur à -1, on a : $f'(x) = -\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t\,\mathrm{e}^{-tx}}{e^t - 1}dt$.

Solution :

1. La fonction $g : t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-tx}}{\mathrm{e}^t - 1}$ est continue sur $[1, +\infty[$. Au voisinage de $+\infty$, $g(t) \sim \mathrm{e}^{-t(x+1)}$ dont l'intégrale converge sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $x + 1 > 0$. Le critère d'équivalence pour les intégrales de fonctions positives permet de conclure que l'intégrale définissant $f(x)$ converge si et seulement si $x > -1$.

2. a) En sous-entendant le passage à la limite :

$$f(0) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{\mathrm{e}^t - 1} = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t} dt}{1 - e^{-t}} = \left[\ln(1 - \mathrm{e}^{-t}) \right]_1^{\to +\infty} = -\ln(1 - \mathrm{e}^{-1})$$
$$= -\ln(\mathrm{e} - 1) + 1$$

b) Pour tout $x0$, on a :

$$f(x+1) - f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t(x+1)}}{\mathrm{e}^t - 1} dt - \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{\mathrm{e}^t - 1} dt = \int_1^{+\infty} -\mathrm{e}^{-t(x+1)} dt,$$

soit :

$$f(x+1) - f(x) - \frac{\mathrm{e}^{-(x+1)}}{x+1}$$

Avec $x = 0$, on obtient : $f(1) - f(0) = -\frac{1}{\mathrm{e}}$. Comme $f(0) = 1 - \ln(\mathrm{e} - 1)$, on a $f(1) = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}} - \ln(\mathrm{e} - 1)$.

3. a) $\forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x > y > -1$, on a pour $t \geqslant 1$, $-tx < -ty$, et par croissance de la fonction exponentielle les bornes d'intégration étant dans l'ordre croissant : $f(x) \leqslant f(y)$, et même $f(x) < f(y)$ par continuité de la fonction à intégrer, donc f est strictement décroissante sur $]-1, +\infty[$.

b) $\star\ \forall\, t \geqslant 1$, $\mathrm{e}^t - 1 \geqslant \mathrm{e} - 1$. Par suite :

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{\mathrm{e} - 1} \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx} dt = \frac{1}{\mathrm{e} - 1} \times \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}.$$ D'où : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0.$

$\star\ \forall\, t \geqslant 1$, $\mathrm{e}^t - 1 \leqslant \mathrm{e}^t$, et :

$$f(x) \geqslant \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{\mathrm{e}^t} dt = \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t(x+1)} dt = \frac{\mathrm{e}^{-(x+1)}}{x+1}.$$ D'où : $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$

4. a) La fonction $\varphi : t \to \dfrac{t.\mathrm{e}^{-tx}}{\mathrm{e}^t - 1}$ est continue sur $[1, +\infty[$. Au voisinage de $+\infty$, on a : $\varphi(t) \sim t.\mathrm{e}^{-t(x+1)}$. Si $x > -1$, on a $\lim\limits_{t \to +\infty} t^2 \times t.\mathrm{e}^{-t(x+1)} = 0$, ce qui montre que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi(t) dt$ converge.

b) Pour $h > 0$ et $t1$, classiquement :

$$|\mathrm{e}^{-t(x+h)} - \mathrm{e}^{-tx}| = \mathrm{e}^{-tx}(1 - \mathrm{e}^{-th}) \leqslant ht.\mathrm{e}^{-tx}$$

Puis en intégrant : $|f(x+h) - f(x)| \leqslant \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{|\mathrm{e}^{-t(x+h)} - \mathrm{e}^{-tx}|}{\mathrm{e}^t - 1} \leqslant h \int_1^{+\infty} \frac{t.\mathrm{e}^{-tx}}{\mathrm{e}^t - 1} dt.$

c) Pour $h < 0$ et $t1$:

$$|\mathrm{e}^{-t(x+h)} - \mathrm{e}^{-tx}| = \mathrm{e}^{-t(x+h)}(1 - \mathrm{e}^{th}) \leqslant \mathrm{e}^{-t(x+h)}(-th)$$

et comme $h < \dfrac{-x-1}{2}$, $|\mathrm{e}^{-t(x+h)} - \mathrm{e}^{-tx}| \leqslant \mathrm{e}^{-t\frac{x-1}{2}}(-th)$

En intégrant comme précédemment, on a alors l'inégalité demandée.

d) Le résultat a) donne la continuité à droite et le résultat b) la continuité à gauche en tout point x.

5. En remplaçant les inégalités usuelles sur la fonction exponentielle par des inégalités de Taylor-Lagrange à un ordre plus élevé, on prouverait de la même façon que f est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et que, pour tout x strictement supérieur à -1, on a : $f'(x) = -\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t.\mathrm{e}^{-tx}}{\mathrm{e}^t - 1} dt$.

Exercice 1.21.

1. Montrer que pour tout $t > 0$, $\arctan(t) + \arctan(\frac{1}{t}) = \frac{\pi}{2}$.

2. Soit f la fonction définie par

$$f(x,y) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt) - \arctan(yt)}{t} dt$$

a) Montrer que f est définie au moins sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

b) On suppose que $x \neq y$. Donner une expression simple de $f(x,y)$.

(On écrira que $f(x,y) = \lim\limits_{A\to+\infty} \displaystyle\int_0^A \frac{\arctan(xt) - \arctan(yt)}{t} dt$).

3. Soit g la fonction définie sur $\Delta = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \backslash \{(x,x), x > 0\}$ par :

$$g(x,y) = \frac{f(x,y)}{x-y}$$

Montrer qu'on peut prolonger g par continuité en tout point (x,x) de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

Solution :

1. Soit $\varphi : t \mapsto \arctan(t) + \arctan(1/t)$, la fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, avec $\varphi'(t) = \dfrac{1}{1+t^2} + \dfrac{1}{1+\frac{1}{t^2}} \times \dfrac{-1}{t^2} = 0$. Elle est donc constante sur cet intervalle et vaut en $t = 1$, $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

2. La fonction $\varphi : t \mapsto \dfrac{\arctan(xt) - \arctan(yt)}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. On peut supposer $x > y$, auquel cas, la fonction φ est positive sur $\mathbb{R}^{+*}$.

• au voisinage de 0, un DL de arctan donne $\varphi(t) \sim \dfrac{(x-y)t}{t}$ qui admet une limite en 0 : c'est donc une intégrale faussement impropre en 0.

• au voisinage de $+\infty$, la question précédente permet d'écrire que $\varphi(t) \sim \dfrac{x-y}{xyt^2}$ et la règle de Riemann donne la convergence de l'intégrale sur $[1,+\infty[$.

b) On écrit (il n'y a pas de problème en 0, en prolongeant les fonctions par continuité) :

$$\int_0^A \frac{\arctan(xt)-\arctan(yt)}{t}dt = \int_0^A \frac{\arctan(xt)}{t}dt - \int_0^A \frac{\arctan(yt)}{t}dt$$

Les changements de variable $u = xt$ et $u = yt$ (licites), ainsi que la relation de Chasles permettent d'obtenir :

$$\int_0^A \frac{\arctan(xt)-\arctan(yt)}{t}dt = \int_{yA}^{xA} \frac{\arctan(u)}{u}du.$$

Par le résultat de la question 1, on écrit :

$$\begin{aligned}\int_{yA}^{xA} \frac{\arctan(u)}{u}du &= \frac{\pi}{2}\int_{yA}^{xA}\frac{du}{u} - \int_{yA}^{xA}\frac{\arctan(1/u)}{u}du \\ &= \frac{\pi}{2}(\ln(x)-\ln(y)) - \int_{yA}^{xA}\frac{\arctan(1/u)}{u}du.\end{aligned}$$

Enfin, $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_{yA}^{xA}\frac{\arctan(1/u)}{u}du = 0$, comme reste d'intégrale convergente ou en majorant la fonction à intégrer par $\frac{1}{u^2}$. Donc :

$$f(x,y) = \frac{\pi}{2}(\ln(x)-\ln(y)).$$

3. g est définie par : $g(x,y) = \frac{\pi}{2}\times\frac{\ln x - \ln y}{x-y}$, lorsque x et y sont strictement positifs et différents.

Soit $x > 0$ fixé, on a $\lim\limits_{y\to x} g(x,y) = \frac{\pi}{2x}$. On est donc conduit à poser :

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\times\frac{\ln x - \ln y}{x-y} & \text{si } y \neq x \\ \frac{\pi}{2x} & \text{si } y = x \end{cases}.$$

La fonction g est évidemment continue sur Δ.

Pour $x_0 > 0$, posons $x = x_0 + h, y = x_0 + k$, avec h et k assez petits pour que $x_0 + h > 0$ et $x_0 + k > 0$. Alors :

$\to$ Si $h \neq k$, $g(x,y) = \frac{\pi}{2}\times\frac{\ln(x_0+h)-\ln(y_0+k)}{(x_0+h)-(y_0+k)} = \frac{\pi}{2}\times\frac{1}{t}$, avec t compris entre $x_0 + h$ et $x_0 + k$ (théorème des accroissements finis).

$\to$ Tandis que si $h = k$, $g(x,y) = \frac{\pi}{2}\times\frac{1}{x_0+h}$.

Ainsi, dans les deux cas :

$$|g(x_0+h,y_0+k) - g(x_0,y_0)| = \frac{\pi}{2}\left|\frac{1}{t} - \frac{1}{x_0}\right|, \text{ où } |t-x_0| \leqslant \max(|h|,|k|).$$

Ainsi $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} g(x_0+h,x_0+k) = g(x_0,x_0)$ et g est aussi continue en tout point (x_0,x_0) avec $x_0 > 0$.

2

ALGÈBRE

Exercice 2.1.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admettant n valeurs propres.

1. Montrer que la famille $(I_n, A, \ldots, A^{n-1})$ est libre.

2. On note $\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) / AM = MA\}$. Montrer que $\mathcal{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de dimension $\geqslant n$.

3. Montrer l'existence d'une matrice P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible et d'une matrice Δ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonale, telles que

$$A = P\Delta P^{-1}.$$

4. Soit $M \in \mathcal{C}$. Montrer que tout vecteur colonne propre de A est un vecteur colonne propre de M. En déduire que la matrice $P^{-1}MP$ est diagonale.
En déduire que $\mathcal{C}$ est de dimension $\leqslant n$.

5. Montrer que $(I_n, A, \ldots, A^{n-1})$ est une base de $\mathcal{C}$.

6. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. On note $\mathcal{R} = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) / M^2 = A\}$.
   a) Montrer que $\mathcal{R} \subset \text{Vect}(I, A)$.
   b) Montrer que $\mathcal{R}$ est de cardinal 4. Déterminer les 4 matrices vérifiant $M^2 = A$.

Solution :

1. Supposons la famille $(I, A, \ldots, A^{n-1})$ liée : il existe alors des complexes $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ non tous nuls tels que $\sum_{i=0}^{n-1} a_i A^i = 0$.

Le polynôme $P(X) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$ qui est de degré inférieur ou égal à $n-1$ est annulateur de A et n'est pas le polynôme nul.

Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ une base de vecteurs propres de A, X_k étant associé à la valeur propre λ_k.
Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a $A^i X_k = \lambda_k^i X_k$ et :
$0 = P(A)X_k = \sum_{i=0}^{n-1} a_i A^i X_k = \big(\sum_{i=0}^{n-1} a_i \lambda_k^i\big) X_k$ et comme $X_k \neq 0$: $\sum_{i=0}^{n-1} a_i \lambda_k^i = 0$.
Le polynôme P admet n racines distinctes, il est donc identiquement nul, en contradiction avec notre hypothèse.

2. On montre facilement que $\mathcal{C}$ possède une structure de $\mathbb{C}$- espace vectoriel. Par la question précédente, il est au moins de dimension n, puisque A et toutes ses puissances commutent avec A.

3. La matrice A est d'ordre n et admet n valeurs propres distinctes : elle est diagonalisable.

4. Soit M telle que $AM = MA$ et X un vecteur-colonne propre de A associé à la valeur propre λ. Alors, $AMX = MAX = M\lambda X = \lambda MX$.
Le vecteur MX appartient donc au sous-espace propre $E_\lambda(A)$ de A associé à la valeur propre λ. Or cet espace est de dimension 1. Donc, il existe un complexe μ tel que $MX = \mu X$, puisque (X) est une base de $E_\lambda(A)$.
Ainsi toute base de vecteurs propres de A est une base de vecteurs propres de M, et ces deux matrices sont diagonalisables dans la même base de vecteurs propres :
si $P^{-1}AP$ est diagonale, alors $P^{-1}MP$ l'est aussi.
Donc $\mathcal{C}$ est inclus dans $P\,\mathrm{diag}_n(\mathbb{C})P^{-1}$ et cet espace est de dimension inférieure ou égale à n.

5. Ainsi $\mathcal{C}$ est de dimension n et la famille libre $(I, A, \ldots, A^{n-1})$ est une base de $\mathcal{C}$.

6. La matrice triangulaire A admet deux valeurs propres réelles 1 et -1 : elle est diagonalisable.

a) Si $M \in \mathcal{R}$, alors $AM = M^3 = MA$ et $M \in \mathcal{C}$. Par la question précédente, M est donc de la forme $\alpha I + \beta A$.

b) Comme $A^2 = I$, on a $(\alpha I + \beta A)^2 = (\alpha^2 + \beta^2)I + 2\alpha\beta A$ et cette matrice vaut A lorsque $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ et $2\alpha\beta = 1$, on a donc $\beta = \pm i\alpha$ et $2i\alpha^2 = 1$, soit $\alpha \in \{\frac{1-i}{2}, \frac{i-1}{2}\}$ et $\beta \in \{\frac{i+1}{2}, -\frac{i+1}{2}\}$ et les valeurs de M s'en déduisent.
Variante : Par réduction les calculs sont aussi simples :

Soit P telle que $A = P\,\mathrm{diag}(1,-1)P^{-1}$, on a $M = P\,\mathrm{diag}(\lambda,\mu)P^{-1}$. La relation $M^2 = A$ entraîne que $\lambda^2 = 1$ et $\mu^2 = -1$, soit (on est dans $\mathbb{C}$) $\lambda = \pm 1$ et $\mu = \pm i$.

On peut prendre $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, d'où $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et les quatre solutions sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

et les matrices $M_3 = -M_1$ et $M_4 = -M_2$.

Exercice 2.2.

On considère un endomorphisme f d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie n (avec $n \geqslant 2$), tel que f^2 est diagonalisable.
Le but de cet exercice est de montrer que f est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Ker}\, f^2$.

1. On suppose que f est diagonalisable.

a) Montrer que, si $\mathrm{Ker}\, f = \{0\}$, alors $\mathrm{Ker}\, f^2 = \{0\}$.

b) On suppose maintenant que $\mathrm{Ker}\, f \neq \{0\}$. Montrer que $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Ker}\, f^2$.

c) Conclure.

2. On suppose que $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Ker}\, f^2$.

a) Établir que si μ est une valeur propre de f alors μ^2 est une valeur propre de f^2.

b) Soit λ une valeur propre non nulle de f^2 , et μ_1, μ_2 ses deux racines carrées complexes.

i) Montrer que :

$$\mathrm{Ker}(f-\mu_1 I) \subset \mathrm{Ker}(f^2-\lambda I) \text{ et } \mathrm{Ker}(f-\mu_2 I) \subset \mathrm{Ker}(f^2-\lambda I)$$

ii) Montrer que : $\mathrm{Ker}(f^2-\lambda I) = \mathrm{Ker}(f-\mu_1 I) \oplus \mathrm{Ker}(f-\mu_2 I)$

c) En distinguant les cas où 0 est ou n'est pas valeur propre de f, montrer que f est diagonalisable.

Solution :

1. a) Il n'est même pas nécessaire que f soit diagonalisable : si $\mathrm{Ker}\, f = \{0\}$, alors f est injectif, donc bijectif (endomorphisme d'un espace de dimension finie) et f^2 est aussi bijectif, donc injectif.

b) Dans une base $\mathcal{B}$ adaptée, on a $M_{\mathcal{B}}(f) = \text{diag}(0, \ldots, 0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-k})$, où les λ_i non nécessairement deux à deux distincts sont non nuls. Le nombre k est donc la dimension de $\text{Ker}(f) = E_{(0)}(f)$.
On a $M_{\mathcal{B}}(f^2) = \text{diag}(0, \ldots, 0, \lambda_1^2, \ldots, \lambda_{n-k}^2)$ et k est aussi la dimension de $\text{Ker}(f^2)$. Ces deux sous-espaces ont de plus la même base et ils sont donc égaux (de toutes façons on savait que $\text{Ker}\, f \subset \text{Ker}(f^2)$)

c) On vient de montrer que si f est diagonalisable, alors dans tous les cas $\text{Ker}\, f = \text{Ker}\, f^2$.

2. a) Si μ est une valeur propre de f, alors il existe un vecteur x de E non nul tel que $f(x) = \mu x$ et $f^2(x) = \mu f(x) = \mu^2 x$. Comme x est non nul, ceci prouve que μ^2 est une valeur propre de f^2.

b i) Si x appartient à $\text{Ker}(f - \mu_i I)$, avec $i \in \{1, 2\}$,alors $f^2(x) = \mu_i^2 x = \lambda x$, donc $x \in \text{Ker}(f - \lambda I)$ et $\text{Ker}(f - \mu_i I) \subset \text{Ker}(f^2 - \lambda I)$.

ii) On a : $\text{Ker}(f - \mu_1 I) \cap \text{Ker}(f - \mu_2 I) = \{0\}$, car les deux valeurs μ_1, μ_2 sont distinctes. Ainsi la somme $\text{Ker}(f - \mu_1 I) + \text{Ker}(f - \mu_2 I)$ est directe. De plus le résultat i) montre que cette somme est incluse dans $\text{Ker}(f^2 - \lambda I)$.

Soit alors $x \in \text{Ker}(f^2 - \lambda I)$.
On a : $f(f(x) + \mu_i x) = f^2(x) + \mu_i f(x) = \lambda x + \mu_i f(x) = \mu_i(\mu_i x + f(x))$, donc $f(x) + \mu_i x \in E_{(\mu_i)}(f)$. *A fortiori* $x_i = \dfrac{1}{\mu_1 - \mu_2}(f(x) + \mu_i x) \in \text{Ker}(f - \mu_i I)$
Mais $x = x_1 - x_2$, donc $x \in \text{Ker}(f - \mu_1 I) + \text{Ker}(f - \mu_2 x)$.
Ainsi $\text{Ker}(f - \lambda x) \subset \text{Ker}(f - \mu_1 I) + \text{Ker}(f - \mu_2 I)$, ce qui prouve l'égalité et le résultat :

$$\text{Ker}(f - \lambda x) = \text{Ker}(f - \mu_1 I) \oplus \text{Ker}(f - \mu_2 I)$$

c) • Si 0 est valeur propre de f, alors $\text{Ker}\, f$ n'est pas réduit au seul vecteur nul, et c'est le sous-espace propre de f associé à la valeur propre 0, mais c'est aussi, par hypothèse, le sous-espace propre de f^2 associé à la valeur propre 0. Comme f^2 est diagonalisable, on a :

$$E = \text{Ker}(f^2) \oplus \text{Ker}(f^2 - \lambda_1 I) \oplus \cdots \oplus \text{Ker}(f^2 - \lambda_p I)$$

Comme $\text{Ker}\, f^2 = \text{Ker}\, f$, on obtient :

$$E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Ker}(f^2 - \lambda_1 I) \oplus \cdots \oplus \text{Ker}(f^2 - \lambda_p I)$$

D'après la question précédente, on peut enfin écrire, en notant $\mu_{i,1}$ et $\mu_{i,2}$ les racines carrées de λ_i :
$E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Ker}(f - \mu_{1,1} I) \oplus \text{Ker}(f - \mu_{1,2} I) \oplus \cdots$
$\cdots \oplus \text{Ker}(f - \mu_{p,1} I) \oplus \text{Ker}(f - \mu_{p,2} I)$

Ceci prouve que E est somme directe de sous-espaces propres de f (et éventuellement de sous-espaces réduits à $\{0\}$ que l'on peut éliminer) donc que f est diagonalisable.

• Si $\operatorname{Ker} f = \{0\}$, alors $\operatorname{Ker} f^2 = \{0\}$ et la démonstration précédente s'applique.

Exercice 2.3.

On note E l'espace vectoriel réel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, E_1 le sous-espace vectoriel de E constitué des fonctions 1-périodiques, T l'application qui, à une fonction f de E fait correspondre la fonction $T(f) = F$ définie par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, F(x) = \int_x^{x+1} f(t)dt.$$

1. a) Justifier que T est un endomorphisme de E.

b) Justifier que, pour tout $f \in E$, la fonction $F = T(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et expliciter sa dérivée.

c) T est-il surjectif ?

d) À quelle condition (nécessaire et suffisante) sur f la fonction $F = T(f)$ est-elle constante ?

e) Expliciter la fonction $T(f)$ lorsque f est définie par : $\forall\, t \in \mathbb{R}, f(t) = |\sin(\pi\, t)|$.

On appelle *vecteur propre* de T associé à la *valeur propre* $\lambda \in \mathbb{R}$ toute fonction $f \in E$, autre que la fonction nulle, telle que $T(f) = \lambda\, f$.
Un réel λ est *valeur propre* de T s'il existe un vecteur propre associé à λ.

2. a) Montrer que $f \in \operatorname{Ker}(T) \iff [f \in E_1$ et $\displaystyle\int_0^1 f(t)\, dt = 0]$.
L'application T est-elle injective ?

b) Vérifier que, pour tout réel a, la fonction $h_a : t \mapsto \mathrm{e}^{at}$ est vecteur propre de T et préciser la valeur propre associée.

c) Justifier que l'ensemble S des valeurs propres de T contient $\mathbb{R}_+$.

Solution :

1. a) La linéarité de T résulte de la linéarité de l'intégration sur tout segment. De plus si Φ désigne une primitive de la fonction continue f, on a $F(x) = \Phi(x+1) - \Phi(x)$ et F est continue sur $\mathbb{R}$ et même de classe $\mathcal{C}^1$, avec ...

b) ... $\forall\, x \in \mathbb{R}, F'(x) = f(x+1) - f(x)$.

c) Non, car on vient de voir que $\operatorname{Im}(T) \subset C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, donc la fonction « valeur absolue » qui est continue, mais pas de classe $\mathcal{C}^1$, n'a pas d'antécédent.

d) F est constante si et seulement si $F' = 0$, soit si et seulement si $f \in E_1$.

e) La fonction $f : t \mapsto |\sin(\pi t)|$ appartient à E_1, donc F est constante et :

$$F(x) = F(0) = \int_0^1 \sin(\pi t)dt = \frac{2}{\pi}.$$

2. a) D'après la question 1.d), $F = T(f) = 0$ si et seulement si F constante et $F(0) = 0$, soit si et seulement si $f \in E_1$ et $\displaystyle\int_0^1 f = 0$ (fonction 1-périodique de moyenne nulle). Ainsi T n'est pas injective car $\mathrm{Ker}(T)$ contient par exemple la fonction $t \mapsto \cos(2\pi t)$.

b) $\star$ $a \neq 0 \implies T(h_a)(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} \mathrm{e}^{at}\,dt = \frac{\mathrm{e}^a - 1}{a}\,\mathrm{e}^{ax} = \frac{\mathrm{e}^a - 1}{a}\,h_a(x)$;

$\star$ $T(h_0)(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} dt = 1 = h_0(x)$.

Donc h_0 est propre pour la valeur propre 1 et pour $a \neq 0$, h_a est propre pour la valeur propre $\dfrac{\mathrm{e}^a - 1}{a}$.

c) Soit $\varphi : u \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^u - 1}{u}$. On a $\lim\limits_{u\to 0} \varphi(u) = 1$, $\lim\limits_{u\to+\infty} \varphi(u) = +\infty$ et $\lim\limits_{u\to-\infty} \varphi(u) = 0$.

La continuité de φ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ suffit à montrer, grâce au théorème des valeurs intermédiaires) que $\varphi(\mathbb{R}^*)$ contient $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. Comme on a vu que 0 est valeur propre (2. a)) et 1 aussi (2. b)), on peut affirmer que :

$$\mathbb{R}^+ \subset S.$$

Exercice 2.4.

On note $\langle\ ,\ \rangle$ et $\|\ \|$ respectivement le produit scalaire et la norme de $\mathbb{R}^3$ euclidien usuel, et on appelle **isométrie** de $\mathbb{R}^3$ une application $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ telle que

$$\forall\,(u,v) \in (\mathbb{R}^3)^2, \langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle$$

1. On définit une forme quadratique Q sur $\mathbb{R}^3$ en posant, pour tout vecteur u de coordonnées $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans la base canonique $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$:

$$Q(u) = 3x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xz$$

a) Déterminer une matrice symétrique $S \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall\, u \in \mathbb{R}^3\,, Q(u) = {}^tX\,S\,X$$

b) Déterminer une matrice orthogonale $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que ${}^tP\,S\,P = D$.

On note $\mathcal{E} = \left\{u \in \mathbb{R}^3\,, Q(u) = 1\right\}$ et on dit qu'une isométrie de $\mathbb{R}^3$ conserve $\mathcal{E}$ si et seulement si elle vérifie $f(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{E}$.

2. a) Montrer qu'un vecteur $u \in \mathbb{R}^3$ appartient à $\mathcal{E}$ si et seulement si ses coordonnées $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée $\mathcal{B}$ que l'on précisera vérifient :

$$4(x')^2 + 2(y')^2 + 2(z')^2 = 1 \qquad (1)$$

b) Montrer que $(x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ vérifie (1) si et seulement s'il existe $\theta \in [0, \pi]$ et $\alpha \in [0, 2\pi[$ tels que

$$x' = \frac{1}{2}\cos(\theta)\,, y' = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\theta)\cos(\alpha)\,, z' = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\theta)\sin(\alpha)$$

c) Pour $u \in \mathcal{E}$, exprimer $||u||$ en fonction de θ défini ci-dessus et en déduire les vecteurs de $\mathcal{E}$ de norme minimale.

On note u_1 un tel vecteur et $\mathcal{P}$ le plan orthogonal à u_1.

3. Soit f une isométrie de $\mathbb{R}^3$.

a) Pour $u \in \mathbb{R}^3$, comparer $||f(u)||$ et $||u||$.

b) Montrer que si f conserve $\mathcal{E}$ alors :

$$f(u_1) \in \{-u_1, u_1\} \quad \text{et} \quad f(\mathcal{P} \cap \mathcal{E}) \subseteq \mathcal{P} \cap \mathcal{E}$$

On admet la réciproque.

Donner un exemple, autre que id ou $-id$, d'isométrie conservant $\mathcal{E}$.

Solution :

1. a) et b) On a : $S = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

$$S - \lambda I = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1+(3-\lambda)^2 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} (\lambda-2)(\lambda-4) & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 3-\lambda & 0 & -1 \end{pmatrix}. \text{ Ainsi } \mathrm{Spec}(A) = \{2, 4\}$$

$E_{(2)}(A)$ est le plan d'équation $-x + z = 0$, $E_{(4)}(A)$ est la droite engendrée par la colonne ${}^t(1 \quad 0 \quad -1)$ (droite orthogonale au plan précédent pour le produit scalaire canonique)

En choisissant une base orthonormée du plan $E_{(2)}(A)$, on peut donc prendre :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2. a) Soit $\mathcal{B}$ la base définie par la matrice P précédente.
Un vecteur u est tel que $M_{\mathcal{C}}(u) = X$ et $M_{\mathcal{B}}(u) = X'$, où X et X' sont liées par la relation : $X = PX'$. On a alors :

$$Q(u) = {}^tXSX = {}^tX'{}^tPSPX' = {}^tX'DX'$$

Donc la base $\mathcal{B}$ convient.

b) (1) donne $\exists\, \theta \in [0, \pi], \begin{cases} 2x' = \cos\theta \\ \sqrt{2(y')^2 + 2(z')^2} = \sin\theta \end{cases}$

puis $\exists\, \alpha \in [0, 2\pi[, \begin{cases} y' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\, \sin(\theta)\cos(\alpha) \\ z' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\, \sin(\theta)\, \sin(\alpha) \end{cases}$

et réciproquement en substituant dans (1).

c) En base orthonormée,

$$||u|| = \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2} = \frac{1}{4}\cos^2\theta + \frac{1}{2}\sin^2\theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\cos^2\theta$$

minimal pour $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$.
Donc u_1 est de coordonnées $(\pm 1/2, 0, 0)$ dans $\mathcal{B}$.

3. a) $||f(u)|| = \sqrt{\langle f(u), f(u)\rangle} = \sqrt{\langle u, u\rangle} = ||u||$.

b) $f(u_1) \in \mathcal{E}$ est de même norme que u_1 donc est minimale, d'où $f(u_1) = \pm\, u_1$.

D'autre part, f conserve l'orthogonalité et laisse $\mathrm{Vect}(u_1)$ stable, donc laisse $\mathcal{P}$ stable, et aussi $\mathcal{P} \cap \mathcal{E}$.

c) La symétrie (orthogonale) par rapport à $\mathcal{P}$ laisse tous les points de $\mathcal{P}$ invariants, donc laisse $\mathcal{P} \cap \mathcal{E}$ stable, et change u_1 en $-u_1$, donc convient. Toute symétrie (orthogonale) par rapport à une droite de $\mathcal{P}$ laisse le cercle $\mathcal{P} \cap \mathcal{E}$ stable et laisse u_1 invariant, donc convient également.

Exercice 2.5.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées réelles d'ordre n. Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = {}^tAA$, où ${}^tA$ représente la transposée de la matrice A.

On suppose $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique et de la norme euclidienne associée notée $\|.\|$. Selon l'usage, on confond tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ avec la matrice colonne canoniquement associée.

1. a) Montrer que B est une matrice symétrique réelle, qui vérifie pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, ${}^tXBX \geqslant 0$.

b) En déduire que les valeurs propres de B sont positives ou nulles.

On note $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_p$ ses valeurs propres avec $\lambda_1 \geqslant 0$.

2. On note $N(A) = \sup_{X\in\mathbb{R}^n, X\neq 0} \dfrac{||AX||}{||X||}$. Montrer que $N(A) = \sqrt{\lambda_p}$.

3. On suppose dans cette question que A est inversible et on note :

$$C(A) = N(A)N(A^{-1})$$

a) Déterminer $N(A^{-1})$ en fonction des λ_i.

b) Exprimer $C(A)$ en fonction des (λ_i).

c) Soit A une matrice telle que $C(A) = 1$. Montrer qu'il existe un réel $\mu > 0$ tel que pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, $||AX|| = \mu||X||$.

4. On suppose que A et B sont deux matrices réelles symétriques dont les valeurs propres sont strictement positives.

a) Montrer que pour tout X de $\mathbb{R}^n$ non nul , ${}^tXAX > 0$ et ${}^tXBX > 0$.

b) Montrer que $C(A+B) \leqslant \max(C(A), C(B))$.

Solution :

1. a) La matrice B est symétrique réelle et vérifie pour tout vecteur $X \in \mathbb{R}^n$,

$$\langle X, BX\rangle = {}^tX{}^tAAX = \|AX\|^2 \geqslant 0.$$

b) En particulier, pour X vecteur propre de B associé à la valeur propre λ , il vient : $\lambda\|X\|^2 = \lambda\langle X, X\rangle = \|AX\|^2$ et donc $\lambda \geqslant 0$.

2. On a $||AX||^2 = \langle AX, AX\rangle = {}^tX{}^tAAX = {}^tXBX$.
Donc pour tout $X \neq 0$: $\dfrac{||AX||^2}{||X||^2} = \dfrac{{}^tXBX}{{}^tXX}$
Soit P orthogonale et $D = \mathrm{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ diagonale telles que $B = PD{}^tP$ et notons $Y = {}^tPX$.

$$\frac{{}^tXBX}{{}^tXX} = \frac{{}^tXPD{}^tPX}{{}^tXP{}^tPX} = \frac{{}^tYDY}{{}^tYY} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i^2}{\sum_{i=1}^{n} y_i^2} \leqslant \max(\alpha_i) = \lambda_p$$

Les scalaires λ_i étant positifs, tout comme x_i^2, il vient $\dfrac{||AX||^2}{||X||^2} \leqslant \alpha_n$.
On obtient l'égalité pour X vecteur propre de B associé à la valeur propre $\alpha_n = \lambda_p$.
Ainsi :

$$N(A) = \sqrt{\lambda_p}$$

3. a) Si A est inversible, la matrice B l'est également, car $\mathrm{Ker}\, A = \mathrm{Ker}\, B$. Les valeurs propres de B^{-1} sont les inverses des valeurs propres de B associées aux mêmes vecteurs propres. Ainsi $N(A^{-1}) = \sqrt{1/\lambda_1}$.

b) D'après les questions précédentes : $C(A) = \dfrac{\sqrt{\lambda_n}}{\sqrt{\lambda_1}}$.

c) Écrire $C(A) = 1$ c'est écrire $\lambda_1 = \lambda_p$.
Ainsi, toutes les valeurs propres de B sont égales, et la matrice B étant diagonalisable, on peut écrire $B = Q(\lambda I)\,{}^tQ = \lambda Q\,{}^tQ = \lambda I$, avec $\lambda > 0$.
Donc : $\forall\, X \in \mathbb{R}^n$, $\|AX\|^2 = {}^tXBX = \lambda\,{}^tXX = \lambda\|X\|^2$ et pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, $||AX|| = \sqrt{\lambda}||X||$

4. De manière évidente, $A + B$ est une matrice symétrique.

a) Avec $A = PD\,{}^tP$, avec P orthogonale et $D = \mathrm{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ diagonale, on a comme déjà vu : ${}^tXAX = {}^tXPD\,{}^tPX = {}^tYDY = \sum\limits_i \alpha_i y_i^2$.
Le résultat s'en déduit car $X \neq 0 \implies Y = {}^tPX \neq 0$ et tous les α_i sont strictement positifs.
De plus, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ non nul , ${}^tX(A+B)X = {}^tXAX + {}^tXBX > 0$.

b) Supposons $\alpha_1 \leqslant \cdots \leqslant \alpha_n$ (on peut le faire quitte à réordonner les vecteurs propres définissant la matrice diagonalisante P) et notons $\beta_1 \leqslant \cdots \leqslant \beta_n$ les coefficients diagonaux obtenus de même pour la matrice B.
Comme ${}^tAA = A^2$ et ${}^tBB = B^2$, il vient $N(A) = \alpha_n$ et $N(B) = \beta_n$. Donc en revenant à la définition de N, $N(A+B) \leqslant \alpha_n + \beta_n$. De plus $C(A) = \dfrac{\alpha_n}{\alpha_1}$ et $C(B) = \dfrac{\beta_n}{\beta_1}$.
De manière identique à la démonstration de la question 2, on a :

$$\min_{X \in \mathbb{R}^n, X \neq 0} ||(A+B)X|| \geqslant \alpha_1 + \beta_1$$

ce qui entraîne que $C(A+B) \leqslant \dfrac{\alpha_n + \beta_n}{\alpha_1 + \beta_1}$
Supposons par exemple que $\max(C(A), C(B)) = C(A) = \dfrac{\alpha_n}{\alpha_1}$, c'est-à-dire $\dfrac{\beta_n}{\beta_1} \leqslant \dfrac{\alpha_n}{\alpha_1}$. Alors $\dfrac{\alpha_n + \beta_n}{\alpha_1 + \beta_1} \leqslant \dfrac{\alpha_n}{\alpha_1}$ car cette inégalité est équivalente à $\beta_n\alpha_1 \leqslant \alpha_n\beta_1$.
D'où le résultat.

Exercice 2.6.

On considère un espace euclidien $(E, \langle\ ,\ \rangle)$. On rappelle que pour tout $a \in E$, l'application S_a définie sur E par :

$$S_a : E \to \mathbb{R}, x \mapsto \langle x, a\rangle$$

est une forme linéaire sur E.

1. Le but de cette question est de montrer que, réciproquement, pour toute forme linéaire f définie sur E, il existe un unique vecteur $a \in E$ tel que $f = S_a$, et ce par deux méthodes différentes.

A cet effet, on considère l'application S définie sur E par $S(a) = S_a$.

A) **Première méthode**

a) Montrer que S est une application linéaire.

b) Montrer que S est injective.

c) En déduire que S est un isomorphisme de E sur $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$, et conclure.

B) **Seconde méthode**

On considère $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ une base orthonormale de E et f une forme linéaire sur E. Montrer qu'il existe une unique application S_a telle que $S_a = f$, et que a est donné par $a = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\varepsilon_i$.

2. Pour tout entier naturel n non nul, montrer qu'il existe un unique polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que pour tout polynôme Q de $\mathbb{R}_n[X]$ on ait : $\int_0^1 P(t)Q(t)dt = Q(0)$.

3. Soit A la matrice $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

a) Montrer que l'équation $A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ possède une unique solution.

b) En déduire que A est inversible.

4. On suppose qu'il existe un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ tel que pour tout polynôme Q de $\mathbb{R}[X]$, on ait : $\int_0^1 P(t)Q(t)\,dt = Q(0)$.

Justifier l'existence d'un réel M tel que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, \left|\int_0^1 P(t)(1-t)^n\,dt\right| \leqslant \frac{M}{n+1}$.

En déduire que notre hypothèse est absurde. Ce résultat est-il en contradiction avec les résultats précédents ?

Solution :

1. A) a) Pour tous scalaires et tous vecteurs :

$$S_{\alpha a+\beta b}(x) = \langle \alpha a + \beta b, x\rangle = \alpha\langle a, x\rangle + \beta\langle b, x\rangle = (\alpha S_a + \beta S_b)(x).$$

Donc $S_{\alpha a+\beta b} = \alpha S_a + \beta S_b$, ce qui est la linéarité de S.

b) Si a est dans $\operatorname{Ker} S$, alors $S_a = 0$, c'est-à-dire que $\forall\, x \in E$, $S_a(x) = 0$, soit encore $\forall\, x \in E$, $\langle a, x\rangle = 0$. Cela entraîne que a est nul. En résumé $\operatorname{Ker} S = \{0_E\}$ et S est injective.

c) On a $\dim E = \dim \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ et donc le fait que S soit injective implique que celle-ci est bijective.
Ceci montre que pour tout f de $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$, il existe un unique a de E tel que $S_a = f$.

B) Soit $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ une base orthonormale de E, f une forme linéaire définie sur E. Montrons, par analyse synthèse, qu'il existe un unique vecteur a tel que $f = S_a$.
$\rightarrow$ Supposons que a existe. On a alors : $\forall\, x \in E, \langle a, x\rangle = f(x)$.
En particulier, $\forall\, k \in [\![1, n]\!]$, $\langle a, \varepsilon_k\rangle = f(\varepsilon_k)$. Comme la décomposition de a dans la base orthonormale $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ est $a = \sum_{k=1}^{n} \langle a, \varepsilon_k\rangle \varepsilon_k$, on en déduit que $a = \sum_{k=1}^{n} f(\varepsilon_k)\varepsilon_k$, donc le vecteur a, s'il existe est défini de manière unique.

$\rightarrow$ Soit $a = \sum_{k=1}^{n} f(\varepsilon_k)\varepsilon_k$. On constate que $\forall\, j \in [\![1, n]\!]$, $S_a(\varepsilon_j) = \langle \sum_{k=1}^{n} f(\varepsilon_k)\varepsilon_k, \varepsilon_j\rangle$.
Comme la famille $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ est orthonormale, on obtient $S_a(\varepsilon_j) = f(\varepsilon_j)$.
Les deux applications S_a et f coïncident sur une base, elles sont donc égales, ce qu'il fallait.

2. $(P, Q) \rightarrow \int_0^1 P(t)Q(t)dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$ et $f : Q \mapsto Q(0)$ est une forme linéaire définie sur $\mathbb{R}_n[X]$.
D'après ce qui précède, il existe un unique polynôme P tel que, pour tout Q de $\mathbb{R}_n[X]$, $\langle P, Q\rangle = f(Q)$, c'est-à-dire, tel que $\int_0^1 P(t)Q(t)\,dt = Q(0)$.

3. a) Si on se place dans $\mathbb{R}_2[X]$, il existe un unique polynôme $P = aX^2 + bX + c$ tel que, quel que soit le polynôme Q de degré deux, on ait $\int_0^1 P(t)Q(t)dt = Q(0)$.
En appliquant cette égalité successivement avec $Q = 1, Q = X, Q = X^2$, on trouve qu'il existe un unique triplet (a, b, c) tel que : $\begin{pmatrix} 1/3 & 1/2 & 1 \\ 1/4 & 1/3 & 1/2 \\ 1/5 & 1/4 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b) le système précédent est un système de Cramer, ce qui prouve que la matrice A est inversible.

4. P est une fonction continue donc bornée sur $[0,1]$: il existe un réel M strictement positif, tel que $\forall\, t \in [0,1], |P(t)| \leqslant M$. On en déduit :

$$\left|\int_0^1 P(t)(1-t)^n\, dt\right| \leqslant \int_0^1 |P(t)|(1-t)^n dt \leqslant M\int_0^1 (1-t)^n dt = M\frac{1}{n+1}$$

S'il existait un tel polynôme P, la relation serait en particulier vraie pour les polynômes $Q_n = (1-X)^n$.

On aurait donc $\displaystyle\int_0^1 P(t)Q_n(t)dt = Q_n(0)$, c'est-à-dire $\displaystyle\int_0^1 P(t)(1-t)^n dt = 1$.

Avec le calcul précédent, on obtiendrait donc : $1 \leqslant \dfrac{M}{n+1}$ et ce, pour tout entier naturel n, ce qui est absurde.

Ce résultat n'est pas contradictoire avec ce qui précède, puisqu'ici l'espace n'est pas de dimension finie.

Exercice 2.7.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soient A et R deux matrices carrées réelles d'ordre n. On dit que R est une racine carrée de A si $R^2 = A$.

1. a) Soit θ un réel quelconque et $R(\theta)$ la matrice : $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$.

Calculer le carré de cette matrice et en déduire que la matrice identité d'ordre 2 admet une infinité de racines carrées.

b) Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'a pas de racine carrée.

2. a) Donner le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de $t \mapsto \sqrt{1+t}$.

b) Soit N une matrice carrée d'ordre n telle que $N^4 = 0$. Déduire de la question précédente une racine carrée de la matrice $I + N$.

3. Soit f et g deux endomorphismes de $\mathbb{R}^n$. On suppose que $f \circ g = g \circ f$ et que f admet n valeurs propres réelles distinctes.

a) Montrer que tout sous-espace propre de f est stable par g.

b) Montrer que tout vecteur propre de f est vecteur propre de g.

c) Justifier que f et g sont diagonalisables.

d) Soit A la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Combien A admet-elle de racines carrées ?

Solution :

1. a) Un calcul simple donne : $R^2(\theta) = I_2$. Ainsi, I_2 admet une infinité de racines carrées.

b) On peut se contenter d'écrire $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 = 0$ et de faire les calculs : il vient $c = a = d = 0$ et $b(a+d) = 1$. L'impossibilité est claire.

2. a) On trouve : $\sqrt{1+t} = 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{6} + \frac{t^3}{16} + o(t^3)$

b) La question précédente donne : $(1+t) - \left(1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{6} + \frac{t^3}{16}\right)^2 = o(t^3)$

et comme il s'agit de fonctions polynômes : $(1+t) - \left(1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{6} + \frac{t^3}{16}\right)^2 = t^4 Q(t)$, avec $Q \in \mathbb{R}[t]$.

c) Si $N^4 = 0$, alors, en remplaçant formellement t par N, il vient :

$$I + N = \left(I + \frac{1}{2}N - \frac{1}{6}N^2 + \frac{1}{16}N^3\right)^2 + 0.Q(N)$$

ce qui donne une racine carrée de $I + N$, à savoir : $I + \frac{1}{2}N - \frac{1}{6}N^2 + \frac{1}{16}N^3$.

3. a) Soit λ scalaire et x vecteur non nul tels que $f(x) = \lambda x$. Alors :

$$f(g(x)) = g(f(x)) = \lambda g(x)$$

ce qui montre que $g(x)$ appartient au sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ.

b) Le sous-espace propre $E_{(\lambda)}(f)$ étant de dimension 1, il existe μ (éventuellement nul) tel que $g(x) = \mu x$. Ainsi, x est vecteur propre de g.

c) On sait que $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_{(\lambda)}(f)$. Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une base de vecteurs propres de f. Par la question précédente, c'est également une base de vecteurs propres de g ; d'où f et g sont diagonalisables et même « co »-diagonalisables.

d) Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$. Alors $AB = B^3 = BA$. Par la question précédente, il existe une matrice P inversible et deux matrices diagonales D_1, D_2 telles que :

$$A = PD_1P^{-1}, \quad B = PD_2P^{-1}$$

$B^2 = A$ est alors équivalent à $D_1 = D_2^2$. Ainsi, les éléments diagonaux de D_2 sont les carrés de ceux de D_1.

⋆ Si les valeurs propres de f sont toutes strictement positives, il y a 2^n possibilités pour D_2, donc 2^n racines carrées pour A.

⋆ Si elles sont toutes positives et l'une nulle, il y a 2^{n-1} racines carrées pour A.

⋆ Sinon, on pert la « réalité » du problème et A n'a aucune racine carrée !

Exercice 2.8.

Dans cet exercice on confond polynôme et fonction polynôme associée.

Soit u l'application qui à un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ associe $u(P)$ défini par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ u(P)(x) = \mathrm{e}^x \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} P(t)\, dt$$

1. Montrer que $u(P)$ est bien défini. Calculer $u(X^k)$, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.

a) Montrer que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par u.

b) Soit v l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ induit par u. Montrer que v réalise un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Quelle est la matrice A associée à v dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$?
L'endomorphisme v est-il diagonalisable ?

3. Déterminer A^{-1}, l'inverse de A.

4. Si P est un polynôme tel que pour tout $x \in \mathbb{R}, P(x) \geqslant 0$, montrer que, pour tout x réel : $\sum_{k=0}^{+\infty} P^{(k)}(x) \geqslant 0$.

Solution :

1. Soit P un polynôme de degré p.
L'application $t \mapsto \mathrm{e}^{-t} P(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$; de plus $\lim_{t\to+\infty} t^2.\mathrm{e}^{-t} P(t) = 0$, ce qui entraîne la convergence de l'intégrale définissant $u(P)(x)$. La linéarité de P découle de la linéarité de l'intégration.
Il est évident que $u(1) = 1$.
Soit $n \geqslant 1$. Une intégration par parties (d'abord sur un segment, suivie d'un passage à la limite) donne : $u(X^n) = X^n + nu(X^{n-1})$.
Ainsi, par récurrence : $u(X^n) = X^n + nX^{n-1} + n(n-1)X^{n-2} + \cdots + n!$.
Ceci montre que $u(P)$ est une fonction polynomiale, quel que soit le polynôme P.

2. a) La stabilité de $\mathbb{R}_n[X]$ a été démontrée dans la question précédente, puisque pour tout $n \geqslant 0$, $u(X^n) \in \mathbb{R}_n[X]$.

b) Nous venons de montrer que v est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Toujours par la question 1. la famille $\big(u(1), u(X), \ldots, u(X^n)\big)$ est une famille

de polynômes de degrés échelonnés de 0 à n ; c'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$, ce qui montre que v est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

La matrice A est triangulaire supérieure de la forme $A = (a_{i,j})$, avec :

$$a_{i,j} = \begin{cases} \frac{j!}{i!} & \text{si } i \leqslant j \\ 0 & \text{si } i > j \end{cases}$$

La diagonale de A n'est formée que de 1. La seule valeur propre de A est donc 1.

Si A était diagonalisable, elle serait semblable à une matrice diagonale ne comportant que des 1 sur la diagonale *i.e.* la matrice identité ; elle serait donc égale à l'identité, ce qu'elle n'est pas.

3. Comme, pour tout k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, $u(X^k) = X^k + ku(X^{k-1})$, on a :

$$v^{-1}(X^k) = X^k - kX^{k-1}$$

ce qui entraîne que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$:

$$v^{-1}(P) = P - P'$$

On en déduit la matrice A^{-1}, également triangulaire supérieure : les coefficients diagonaux valent 1, la diagonale étant bordée d'une sur-diagonale formée des nombres $-1, -2, \ldots, -n$.

4. Posons $Q(x) = \sum_k P^{(k)}(x)$. On remarque qu'en fait cette somme est finie, ce qui montre l'existence du polynôme Q. On vérifie alors que $Q - Q' = P$, donc que $P = v^{-1}(Q)$ ou $Q = v(P) = u(P)$, ce qui donne, par la définition de u et la positivité de P, le résultat demandé.

Exercice 2.9.

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soit E un espace euclidien de dimension n.

On note $\langle u, v\rangle$ le produit scalaire de deux vecteurs u et v de E, et $||.||$ la norme euclidienne associée.

On dit qu'un endomorphisme f de E est *orthogonal* si sa matrice dans une base orthonormale est une matrice orthogonale.

1. Montrer que f est orthogonal si et seulement si :

$$\text{pour tout } (x, y) \in E^2, \langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle.$$

2. Soit f un endomorphisme de E.

a) Montrer que si f est orthogonal, alors pour tout x de E : $||f(x)|| = ||x||$.

b) Montrer réciproquement que, si pour tout vecteur x de E, on a $||f(x)|| = ||x||$, alors f est orthogonal.

3. On note $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E et on considère un endomorphisme f orthogonal dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est notée A.

On pose $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $S = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}$.

a) Exprimer $a_{i,j}$ en fonction de f et des vecteurs e_i et e_j.

b) Montrer qu'il existe un vecteur u de E tel que $S = \langle u, f(u) \rangle$.

c) En déduire que $|S| \leqslant n$.

d) Montrer que $n \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \leqslant n\sqrt{n}$.

Solution :

1. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E. Pour tout couple (x, y) de E^2, on note X et Y les vecteurs colonnes des coordonnées de x et y dans la base $\mathcal{B}$ et on a : $\langle y, f(x) \rangle = {}^tY.AX$. Pour tout endomorphisme f dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est A, on a : $\langle f(y), f(x) \rangle = {}^tY\,{}^tA.AX$.

- Si f est orthogonal, alors ${}^tAA = I$, d'où $\langle f(y), f(x) \rangle = {}^tYX = \langle y, x \rangle$.
- Réciproquement, si pour tout $(x, y) \in E^2$, on a $\langle f(y), f(x) \rangle = \langle y, x \rangle$, alors pour tous X, Y de $\mathbb{R}^n$, ${}^tY({}^tAA)X = {}^tYX$.

En prenant pour X et Y les colonnes associées aux vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, il vient, en notant $\alpha_{i,j}$ l'élément générique de ${}^tAA$:

$$\alpha_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

ce qui signifie que ${}^tAA = I$, et donc que A est une matrice orthogonale.

2. a) Si f est un endomorphisme orthogonal de E, pour tout vecteur x de E : $\langle f(x), f(x) \rangle = \langle x, x \rangle$, donc $||f(x)||^2 = ||x||^2$. Par positivité de la norme, $||f(x)|| = ||x||$.

b) Réciproquement, on suppose que l'endomorphisme f est tel que, pour tout vecteur x de E, on a $||f(x)|| = ||x||$. Or pour tous vecteurs x, y de E :

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} \left(||x + y||^2 - ||x - y||^2 \right)$$

Donc :

$$\begin{aligned} \langle f(x), f(y) \rangle &= \frac{1}{4} \left(||f(x) + f(y)||^2 - ||f(x) - f(y)||^2 \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(||f(x + y)||^2 - ||f(x - y)||^2 \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(||x + y||^2 - ||x - y||^2 \right) = \langle x, y \rangle, \text{ ce qu'il fallait.} \end{aligned}$$

3. a) La matrice A est canoniquement associée à f dans la base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$.

Le nombre $\langle f(e_j), e_i\rangle$ est donc la coordonnée sur e_i du vecteur $f(e_j)$. Par construction ce nombre n'est autre que $a_{i,j}$.

b) Par la question précédente :

$$S = \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\langle f(e_j), e_i\rangle = \langle \sum_{j=1}^{n} f(e_j), \sum_{i=1}^{n} e_i\rangle = \langle f(\sum_{j=1}^{n} e_j), \sum_{i=1}^{n} e_i\rangle$$

$$= \langle f(u), u\rangle, \text{ avec } u = \sum_{i=1}^{n} e_i.$$

c) D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le fait que f soit un endomorphisme orthogonal :

$$|S| = |\langle f(u), u\rangle| \leqslant ||u|| \cdot ||f(u)|| = ||u||^2 = n$$

d) Comme A est orthogonale, on a pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}^2 = 1$

Donc tous les coefficients $a_{i,j}$ sont compris entre -1 et 1 et :

$$\sum_{i,j} |a_{i,j}| \geqslant \sum_{i,j} a_{i,j}^2 = \sum_{j}\sum_{i} a_{i,j}^2 = \sum_{j} 1 = n$$

Enfin, par Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^{n^2}$:

$$\sum_{i,j} |a_{i,j}| = \sum_{i,j} 1\times|a_{i,j}| \leqslant \sqrt{(\sum_{i,j} 1^2)(\sum_{i,j} |a_{i,j}|^2)} = \sqrt{n^2 \sum_{j}(\sum_{i} a_{i,j}^2)} = \sqrt{n^3}$$

Ce qui est le dernier résultat attendu.

Exercice 2.10.

Soit E un espace vectoriel réel de dimension 2 et f un endomorphisme de E. On dit que f est n-cyclique ($n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$) si et seulement si il existe des vecteurs $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ dans E tels que ces n vecteurs soient deux-à-deux distincts, engendrent E et vérifient en outre :

$$\forall\, i \in [\![0, n-2]\!], f(x_i) = x_{i+1} \text{ et } f(x_{n-1}) = x_0$$

$(x_0, \ldots, x_{n-1})$ s'appelle alors un n-cycle pour f.

1. a) Donner un exemple d'endomorphisme qui n'est n-cyclique pour aucune valeur de n.

b) Donner un exemple d'endomorphisme 2-cyclique et un exemple d'endomorphisme 3-cyclique.

A partir de maintenant on suppose que f est un endomorphisme n-cyclique.

2. Pour $j \in [\![0, n-2]\!]$ et $m \in [\![1, n-1]\!]$, calculer $f^m(x_j)$. Que vaut f^n ?

3. Montrer que pour $m \in [\![1, n-1]\!]$, on a $f^m \neq id$.

4. Montrer que les seules valeurs propres possibles de f sont -1 et 1. Montrer qu'aucun des vecteurs d'un n-cycle pour f n'est vecteur propre de f.

5. Montrer qu'il existe des bases $\mathcal{B}$ de E telles que la matrice de f relativement à $\mathcal{B}$ est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$, le réel b étant indépendant de la base choisie.

Solution :

1. a) L'identité n'est pas cyclique et plus généralement toute homothétie n'est pas cyclique ...

b) Si (e_1, e_2) est une base de E, l'endomorphisme défini par $f(e_1) = e_2$ et $f(e_2) = e_1$ est 2-cyclique.

L'endomorphisme défini par $f(e_1) = -\frac{1}{2}e_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}e_2$ et $f(e_2) = -\frac{\sqrt{3}}{2}e_1 - \frac{1}{2}e_2$ est 3-cyclique. (Il suffit de penser à la structure euclidienne de E pour laquelle (e_1, e_2) est une base orthonormée et de considérer alors la rotation d'angle $2\pi/3$).

2. Avec la convention $x_n = x_0, x_{n+1} = x_1, \ldots$ on a : $f^m(x_j) = x_{j+m}$ et $\forall\, j, f^n(x_j) = x_{j+n} = x_j$, donc $f^n = Id_E$ puisque ces deux endomorphismes concident sur une famille génératrice de E.

3. Pour $m \in [\![1, n-1]\!]$, on a $f^m(x_0) = x_m \neq x_0$, donc $f^m \neq Id_E$.

4. $X^n - 1$ est annulateur de f et comme f est un endomorphisme réel, ses seules valeurs propres possibles sont -1 et 1.
Si un vecteur x d'un n-cycle était propre, alors la famille $(x, f(x), f^2(x), \ldots)$ serait toujours de rang 1 et jamais génératrice de E.

5. Soit e_1 le premier vecteur d'un n-cycle. Comme e_1 n'est pas propre, la famille $(e_1, f(e_1))$ est une base $\mathcal{B}$ de E et :

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$$

Pour conclure, il suffit de vérifier que deux matrices semblables ont même trace, ce qui résulte d'un calcul sans surprise.

Exercice 2.11.

Soit E un $\mathbb{C}-$espace vectoriel de dimension finie $n > 0$ et f un endomorphisme de E.

1. a) Soit P un polynôme annulateur de f de la forme $P = (X-\lambda)Q$. Montrer que si λ n'est pas valeur propre de f, alors Q est un polynôme annulateur de f.

Montrer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$ annulateur de f tel que toute racine de Q est une valeur propre de f.

b) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de f, montrer qu'il existe un hyperplan F de E contenant $\mathrm{Im}(f - \lambda I)$, où I désigne l'endomorphisme identité.

c) Montrer que la restriction de f à F est un endomorphisme de F.

d) Montrer par récurrence sur n, que tout endomorphisme de E admet une base dans laquelle la matrice associée est triangulaire supérieure.

2. Soient $\alpha_1, \cdots, \alpha_p$, p complexes distincts. Justifier l'existence de polynômes Q_i tels que, pour $1 \leqslant i \leqslant p$:

$$Q_i(\alpha_j) = \begin{cases} \alpha_i & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et } Q_i(0) = 0$$

3. La trace $\mathrm{tr}(M)$ d'une matrice carrée M est par definition la somme de ses coefficients diagonaux. On admet que deux matrices semblables ont la même trace.
On suppose dans la suite que la matrice M de f dans une base $\mathcal{B}$ de E est telle que pour tout $k \in \mathbb{N}^*, \mathrm{tr}(M^k) = 0$.

a) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(0) = 0$. On note $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ les valeurs propres de f. Montrer qu'il existe p entiers non nuls $m_i, 1 \leqslant i \leqslant p$, indépendants de P, tels que :

$$\sum_{i=1}^{p} m_i P(\lambda_i) = 0$$

b) En prenant pour P des polynômes introduits dans la question 2, montrer que M est nilpotente c'est-à-dire qu'il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $M^r = 0$.

Solution :

1. a) Si λ n'est pas valeur propre de f, alors $f - \lambda Id$ est inversible et comme $0 = P(f) = (f - \lambda Id) \circ Q(f)$, on en déduit que $Q(f) = 0$.
Soit alors P un polynôme annulateur de f, que l'on écrit comme produit de facteurs du premier degré : on fait disparaître successivement les racines de P qui ne sont pas valeurs propres de f. Il reste un polynôme annulateur dont toute racine est valeur propre de f.

b) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $Q(\lambda) = 0$, λ est une valeur propre de f donc :

$$\dim(\mathrm{Ker}(f - \lambda Id)) \geqslant 1 \text{ et } \dim(\mathrm{Im}(f - \lambda Id)) \leqslant n - 1.$$

On peut compléter une base de $\mathrm{Im}(f - \lambda Id)$ en une base de E et oublier le dernier vecteur : les $n - 1$ premiers vecteurs engendrent un hyperplan F de E contenant $\mathrm{Im}(f - \lambda Id)$.

c) La linéarité est acquise, il suffit de montrer la stabilité de F par f. Or :

$$x \in F \implies f(x) = \underbrace{(f - \lambda Id)(x)}_{\in \mathrm{Im}(f - \lambda Id) \subset F} + \underbrace{\lambda x}_{\in F}, \text{ donc } f(x) \in F.$$

d) Montrons la propriété par récurrence sur $n \geqslant 1$:

- Pour $n = 1$, il n'y a rien à démontrer !.

• On suppose que tout endomorphisme sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n-1$ admet une base dans laquelle la matrice associée est triangulaire supérieure.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ avec $\dim(E) = n$ et P un polynôme annulateur de f dont toute racine est valeur propre de l'endomorphisme f.

Soit λ une valeur propre de f (il en existe au moins une), F un hyperplan de E contenant $\mathrm{Im}(f - \lambda Id)$ et f_F l'endomorphisme de F induit par f (valide d'après c)). On peut appliquer l'hypothèse de récurrence à f_F qui est donc trigonalisable supérieurement dans une base $\mathcal{B}$ de F. On complète cette base (à la fin !) avec un vecteur quelconque non nul $e_n \in E\backslash F$; dans cette nouvelle base, la matrice associée à f est bien triangulaire supérieure.

2. On choisit : $Q_i(X) = X \prod_{k=1,k\neq i}^{p} \frac{X-\alpha_k}{\alpha_i-\alpha_k}$.

3. a) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ associée à M. La matrice M est trigonalisable : $M = PTP^{-1}$ pour une matrice P inversible convenable.
On sait que pour une matrice triangulaire, les valeurs propres sont les éléments diagonaux. En notant m_i le nombre de fois où apparaît λ_i dans la diagonale, on a donc :

$$\mathrm{tr}(M) = \mathrm{tr}(T) = \sum_{i=1}^{p} m_i\lambda_i$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la diagonale de T^k, est formée des nombres λ_i^k avec les mêmes ordres de répétition et donc : pour $k \geqslant 1$: $\mathrm{tr}(M^k) = \mathrm{tr}(T^k) = \sum_{i=1}^{p} m_i {\lambda_i}^k$
Par conséquent pour tout polynôme P sans terme constant, comme toutes les traces sont supposées nulles : $\sum_{i=1}^{p} m_i P(\lambda_i) = 0$.

b) En prenant $P = Q_k$ pour k décrivant $[\![1, p]\!]$, pour la famille $(\alpha_i) = (\lambda_i)$, on obtient pour tout k :

$$\sum_{i=1}^{p} m_i Q_k(\lambda_i) = 0 \implies m_k\lambda_k = 0 \implies \lambda_k = 0$$

Toutes les valeurs propres de M sont nulles. M admet un polynôme annulateur dont la seule racine est 0 : il existe $r \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^r = 0$ et M est nilpotente.

Exercice 2.12.

On identifie tout vecteur x de $\mathbb{R}^n$ (avec $n \geqslant 2$) à la matrice colonne de ses coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, et ${}^t x$ désigne la transposée de x. On note enfin $\langle\ ,\ \rangle$ le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.

1. On suppose dans cette question $n = 3$ et on pose : $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que ${}^t xCx > 0$ pour tout vecteur non nul x de $\mathbb{R}^n$.

b) Montrer que C est inversible et déterminer sa matrice inverse.

c) Montrer que ${}^t xC^{-1}x > 0$ pour tout vecteur non nul x de $\mathbb{R}^n$.

2. On désigne désormais par C une matrice symétrique réelle d'ordre n et par Q la fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définie par $Q(x) = {}^t xCx$. On suppose que $Q(x) > 0$ pour tout vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$.

a) Montrer que C est inversible et que C^{-1} est symétrique.

b) Montrer que si u et v sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$, on a :

$$({}^t uC^{-1}v)^2 \leqslant ({}^t uC^{-1}u)({}^t vC^{-1}v)$$

3. Soit x et u deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ avec $u \neq 0$.

a) On suppose que $Q(x) \leqslant Q(x + h)$ pour tout vecteur h orthogonal à u. Montrer qu'un tel vecteur h est orthogonal à Cx et que Cx est colinéaire à u.

b) Réciproquement, montrer que si Cx est colinéaire à u et h orthogonal à u, alors $Q(x) \leqslant Q(x+h)$ puis que $Q(x) = a\langle u, x\rangle^2$, où a est un réel strictement positif dépendant de u et C^{-1}.

Solution :

1. a) Pour $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} {}^t xCx &= x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3 \\ &= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 + x_3^2 > 0 \end{aligned}$$

b) Soit x tel que $Cx = 0$; par la question précédente, on a ${}^t xCx = 0$ et $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. La matrice C est donc inversible et on trouve par toute méthode :

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

c) De même qu'en a), pour x non nul :

${}^t xC^{-1}x = 2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - x_2x_3 = x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 > 0$

On peut aussi dire que si x est non nul, x est de la forme $x = Cy$ avec $y \neq 0$ et

$${}^t xC^{-1}x = {}^t yCC^{-1}Cy = {}^t yCy > 0$$

2. a) Si $Cx = 0$, alors $Q(x) = 0$, donc $x = 0$. Ceci montre que C est inversible et on sait que l'inverse d'une matrice symétrique réelle est une matrice symétrique réelle (car $({}^tC)^{-1} = {}^t(C^{-1})$).

b) On démontre comme en 1. c) que C^{-1} est la matrice d'une forme quadratique définie positive. On sait que $(u, v) \mapsto {}^tuC^{-1}v$ est alors un produit scalaire et l'inégalité demandée n'est autre que l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

3. a) Si $Q(x) \leqslant Q(x + h)$ pour tout vecteur h tel que $\langle h, u\rangle = 0$, alors pour tout λ réel :

$$Q(x) \leqslant Q(x + \lambda h) = Q(x) + 2\lambda\langle h, Cx\rangle + \lambda^2 Q(h)$$

Donc, $2\lambda\langle h, Cx\rangle + \lambda^2 Q(h) \geqslant 0$, pour tout réel λ : ceci est possible si et seulement si $\langle h, Cx\rangle = 0$.

Supposons $x \neq 0$, on a obtenu : quel que soit le vecteur h appartenant à l'hyperplan orthogonal à u, h appartient à l'hyperplan orthogonal à Cx. Par égalité des dimensions de ces deux hyperplans, ils sont égaux et leurs vecteurs orthogonaux u et Cx sont liés. Si $x = 0$ le résultat est banal.

b) Sous les hypothèses de cette question, on a : $Q(x+h) = Q(x)+Q(h) \geqslant Q(x)$.

Comme Cx et u sont liés, il existe α réel tel que $Cx = \alpha u$, donc $x = \alpha C^{-1}u$ et $\langle u, x\rangle = \alpha\langle u, C^{-1}u\rangle$. Enfin :

$$Q(x) = \langle x, Cx\rangle = \alpha\langle x, u\rangle = \frac{1}{\langle u, C^{-1}u\rangle}\langle u, x\rangle^2$$

Exercice 2.13.

On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace des polynômes à coefficients réels et pour tout $n \geqslant 1$, $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à $n - 1$. Pour tous $i, j \in \mathbb{N}$, on définit le symbole de Kronecker $\delta_{i,j}$ par $\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{i,j} = 0$ sinon.
Dans tout cet exercice, n désigne un entier naturel non nul et $(a_1, \ldots, a_n)$ une famille de nombres réels distincts.

1. a) Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $L_i \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $L_i(a_j) = \delta_{i,j}$.

b) Montrer que la famille $(L_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

2. Soit $\pi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ définie par : $\forall\, P \in \mathbb{R}[X], \pi(P) = \sum_{i=1}^{n} P(a_i)L_i$.

a) Montrer que π est un projecteur de $\mathbb{R}[X]$.

b) Déterminer le noyau et l'image de π.

c) On note $F = \{Q \prod_{i=1}^{n}(X - a_i), Q \in \mathbb{R}[X]\}$. Montrer que $F \oplus \mathbb{R}_{n-1}[X] = \mathbb{R}[X]$.

d) Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base $(L_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$.

3. Soit $\varepsilon : \mathbb{R}_{n-1}[X] \to \mathbb{R}^n$, $P \mapsto (P(a_i))_{i\in[\![1,n]\!]}$.

a) Montrer que ε est un isomorphisme.

b) Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $P(a_i) = f(a_i)$, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.
Ce polynôme s'appelle le polynôme d'interpolation de Lagrange associé à la fonction f aux points $(a_1, \ldots, a_n)$.

4. Soient $a, b \in \mathbb{R}$, tels que $a < b$. Soient $f \in C^n([a, b], \mathbb{R})$, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tels que $a \leqslant a_1 < \cdots < a_n \leqslant b$ et P le polynôme d'interpolation de Lagrange associé à f et aux points $(a_1, \ldots, a_n)$.

a) Soit $x \in [a, b] \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$ et K réel. On définit la fonction φ par

$$\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}, t \mapsto f(t) - P(t) - K \prod_{i=1}^{n}(t - a_i).$$

Montrer qu'il existe K tel que $\varphi(x) = 0$.

b) Montrer que pour cette valeur de K, il existe $\zeta \in [a, b]$ tel que $\varphi^{(n)}(\zeta) = 0$.

c) Montrer que pour tout $x \in [a, b]$, on a :

$$|f(x) - P(x)| \leqslant \frac{\prod_{i=1}^{n}|x - a_i|}{n!} \sup_{[a,b]} |f^{(n)}|.$$

Solution :

1. a) $\star$ Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Posons : $L_i(X) = \prod_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{(X - a_j)}{(a_i - a_j)}$

Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on a bien $L_i(a_j) = \delta_{i,j}$ et L_i est de degré $n - 1$.

$\star$ Soit $R_i \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $R_i(a_j) = \delta_{i,j}$. On a alors, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $(R_i - L_i)(a_j) = 0$. Ainsi, $R_i - L_i$ est un polynôme de degré au plus $n - 1$ qui a n racines, donc $R_i = L_i$, ce qui donne l'unicité voulue.

b) Soit $(\lambda_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i L_i = 0$. Alors, en identifiant polynômes et fonctions polynomiales, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i L_i(a_j) = 0$, soit $\lambda_j = 0$.

Ainsi, la famille $(L_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est libre et de cardinal n : c'est donc une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

2. a) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrons que $(\pi \circ \pi)(P) = P$.
Comme $\pi(P) = \sum_{i=1}^{n} P(a_i)L_i$, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $\pi(P)(a_j) = P(a_j)$. De plus, $\pi(P)$ est un polynôme de degré au plus $n-1$, d'où $\pi(\pi(P)) = \pi(P)$.

b) On obtient : $\operatorname{Ker}\pi = \left\{ \prod_{i=1}^{n}(X-a_i)Q/Q \in \mathbb{R}[X] \right\}$ et $\operatorname{Im}\pi = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

c) On sait que pour un projecteur, image et noyau sont supplémentaires.

d) D'après la question 2. a), les coordonnées de P dans la base $(L_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ sont $(P(a_i))_{i\in[\![1,n]\!]}$.

3. a) La linéarité de ε est aisée. Montrons que ε est injective.
Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $P(a_i) = 0$. Ainsi, P est de degré au plus $n-1$ et possède n racines, soit $P = 0$.
Comme $\dim \mathbb{R}_{n-1}[X] = \dim \mathbb{R}^n = n$ et que ε est un morphisme injectif, ε est bijectif.

b) Soit f une fonction à valeurs réelles. Comme $(f(a_i))_{i\in[\![1,n]\!]} \in \mathbb{R}^n$ et que ε est surjective, d'après la question précédente, il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et un seul tel que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $P(a_i) = f(a_i)$.

4. a) Comme x n'est pas l'un des a_i, on a : $K = \dfrac{f(x) - P(x)}{(x-a_1)\dots(x-a_n)}$

b) La fonction φ possède au moins $n+1$ zéros, donc, comme f est de classe C^n, en appliquant plusieurs fois le théorème de Rolle, il existe $\xi \in]a,b[$ tel que $\varphi^{(n)}(\xi) = 0$.

c) Ainsi, $f^{(n)}(\xi) - n! \times K = 0$.
Comme $f^{(n)}$ est continue sur le segment $[a,b]$, elle admet une borne supérieure.
D'où, pour $x \notin \{a_1, \dots, a_n\}$:

$$|f(x) - P(x)| \leqslant \sup_{[a,b]} |f^{(n)}| \frac{\prod_{i=1}^{n} |x - a_i|}{n!}.$$

Le résultat est encore vrai si x est l'un des a_i, d'où la conclusion.

Exercice 2.14.

Soient $n \geqslant 2$ et $j \geqslant 1$ deux entiers. On considère l'application F définie sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à $n-1$ par : $\forall\, P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], F(P) = Q$, où $Q(X) = P(X) + \dfrac{1-X}{n} P'(X)$.

1. a) Montrer que F est un endomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

b) Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on pose $P_k(X) = X^{n-k}$ et $Q_k = F(P_k)$.

Exprimer Q_k à l'aide de P_k et P_{k+1}.

c) Déterminer la matrice M de F dans la base $(P_1, P_2, \ldots, P_n)$.

2. a) L'endomorphisme F est-il diagonalisable ?

b) Déterminer le sous-espace propre de F associé à la valeur propre 1.

c) Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$.

i) Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \setminus \{0\}$ tel que $F(P) = \dfrac{n-k}{n} P$. Prouver qu'il existe $r \in [\![1, n-1]\!]$ et $R \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$ tels que ce polynôme P s'écrive :

$$P(X) = (X-1)^r R(X), \text{ avec } R(1) \neq 0.$$

ii) Déterminer la valeur de l'entier r et le degré du polynôme R.

iii) Déterminer les sous-espaces propres de F.

3. On considère la suite de polynômes définie par :

$$U_1(X) = X^{n-1} \text{ et } \forall\, j \in \mathbb{N}, U_{j+1} = F(U_j).$$

a) Montrer que $U_1(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (X-1)^k$.

b) Pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, donner une écriture du polynôme U_j comme combinaison linéaire des polynômes $V_k = (X-1)^k$, avec $k \in [\![0, n-1]\!]$.

Solution :

1. a) La linéarité de F est banale.
Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Alors, P' est dans $\mathbb{R}_{n-2}[X]$ et $(1-X)P'$ dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Par suite, $P(X) + \dfrac{1-X}{n} P'(X)$ est dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Ainsi, F est un endomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

b) Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,

$$\begin{aligned} Q_k(X) &= P_k(X) + \frac{1-X}{n} P_k'(X) = X^{n-k} + \frac{1-X}{n} X^{n-k-1} \\ &= \frac{k}{n} X^{n-k} + \frac{n-k}{n} X^{n-k-1} \end{aligned}$$

Ainsi, $Q_k(X) = \dfrac{k}{n} P_k(X) + \dfrac{n-k}{n} P_{k+1}(X)$.

c) La famille $(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ est, réécrite dans le désordre, la base canonique de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et la matrice M de F dans cette base s'écrit :

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{n-1}{n} & \frac{2}{n} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{n-2}{n} & \frac{3}{n} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{n} & \frac{n}{n} \end{pmatrix}$$

2. a) Les valeurs propres de F se lisent sur la diagonale de M. Le spectre de F est donc $\{\frac{i}{n}, 1 \leqslant i \leqslant n\}$. On a ainsi trouvé n valeurs propres pour F. L'endomorphisme F est donc diagonalisable.

b) Comme F admet n valeurs propres, chaque sous-espace propre de F est de dimension 1. Par lecture de la dernière colonne de M, on remarque que $F(P_n) = P_n$, avec $P_n(X) = 1$. Ainsi, en notant E_1 le sous-espace propre associé à 1, $E_1 = \text{Vect}(P_n) = \text{Vect}(1) = \mathbb{R}_0[X]$.

c) Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Soit P un vecteur propre de F associé à la valeur propre $\frac{n-k}{n}$. Alors, P est un polynôme non nul de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $F(P) = \frac{n-k}{n}P$. Ainsi,
$P(X) + \frac{1-X}{n}P'(X) = \frac{n-k}{n}P(X)$. On en déduit que $\frac{k}{n}P(1) = 0$, puis que $P(1) = 0$. On note alors $r \in \mathbb{N}^*$ l'ordre de multiplicité de 1 en tant que racine de P. On obtient alors l'écriture demandée.
En utilisant l'expression de P trouvée précédemment, la relation $F(P) = \frac{n-k}{n}P$ se réécrit :

$$(X-1)^r R(X) + \frac{1-X}{n}(r(X-1)^{r-1}R(X) + (X-1)^r R'(X)) = \frac{n-k}{n}(X-1)^r R(X)$$

En simplifiant par $(X-1)^r$, on trouve $\frac{k-r}{n}R(X) - \frac{(X-1)}{n}R'(X) = 0$.
En évaluant en 1, on obtient $\frac{k-r}{n}R(1) = 0$, d'où $r = k$ puisque $R(1) \neq 0$. On reprend la relation trouvée précédemment en remplaçant r par k, ce qui donne $\frac{(X-1)}{n}R'(X) = 0$, i.e $R' = 0$. Le polynôme R est donc constant.
Nous venons de voir que si P est un vecteur propre associé à la valeur propre $\frac{n-k}{n}$, alors $P(X) = \lambda(X-1)^k$, où $\lambda \in \mathbb{R}$. Comme chaque sous-espace propre est de dimension 1, il s'ensuit que, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, le sous-espace propre de F associé à la valeur propre $\frac{n-k}{n}$ est $\text{Vect}((X-1)^k)$, formule qui reste vraie pour $k = 0$.

3 a) En utilisant la formule du binôme, on écrit :

$$U_1(X) = X^{n-1} = (X - 1 + 1)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} (X-1)^k.$$

b) Pour tout $j \in \mathbb{N}^*$,

$U_j = F^{j-1}(U_1) = F^{j-1}\big(\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}(X-1)^k\big) = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}F^{j-1}((X-1)^k)$.

Or, la question 2 a montré que $V_k(X) = (X-1)^k$ était vecteur propre de F associé à la valeur propre $\frac{n-k}{n}$. Par récurrence, pour tout entier $j \in \mathbb{N}^*$, $F^{j-1}((X-1)^k) = F^{j-1}(V_k) = (\frac{n-k}{n})^{j-1}V_k$. On en déduit l'égalité demandée :

$$U_j = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}(\frac{n-k}{n})^{j-1}V_k$$

Exercice 2.15.

Dans cet exercice $E = \mathbb{R}_3[X]$ est l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 et à coefficients réels.

1. Montrer que l'application $(P,Q) \to \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,dt$ défini un produit scalaire sur E qu'on note $\langle .,. \rangle$. On note $||.||$ la norme euclidienne associée.

2. Montrer qu'il existe une base orthonormale $L_0, \ldots, L_3$ de E et une seule telle que pour tout $i \in [\![0,3]\!]$:

$$\text{Vect}(L_0, \ldots, L_i) = \text{Vect}(1, \ldots, X^i) \text{ et } \langle L_i, X^i \rangle > 0.$$

Calculer L_0, L_1 et L_2. On admet que $L_3 = \frac{5\sqrt{14}}{4}(X^3 - \frac{3}{5}X)$

Soit $\mathcal{S} = \{P \in E \ / \ \|P\| = 1\}$. *Dans la suite de l'exercice P est un élément de $\mathcal{S}$.*

3. On écrit P sous la forme $P = \sum_{i=0}^{3} a_i L_i$.

a) Calculer $\sum_{i=0}^{3} a_i^2$.

b) En déduire que pour tout réel x : $|P(x)| \leqslant \big(\sum_{i=0}^{3} |L_i(x)|^2\big)^{1/2}$.

4. Montrer que $\sup_{x\in[-1,1]} |P(x)| \leqslant 2\sqrt{2}$.

Solution :

1. On vérifie que l'application $(P,Q) \mapsto \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,dt$ est une forme (car cette intégrale existe et est un réel) bilinéaire (par distributivité du produit sur l'addition et linéarité de l'intégration), symétrique (commutativité du produit) et définie positive (par positivité de l'intégrale et car l'intégrale sur

$[-1,1]$ d'une fonction continue positive ne peut être nulle que si la fonction est identiquement nulle).

2. Il s'agit simplement du processus de Gram-Schmidt. Rappelons-en la $k^{\text{ème}}$ étape théorique : si $(L_0,\dots,L_{k-1})$ ont été définis, on pose :

$$\widetilde{L}_k = X^k - \sum_{i=0}^{k-1} \langle X^k, L_i\rangle L_i$$

ce qui permet d'avoir l'orthogonalité, puis on norme : $L_k = \dfrac{\widetilde{L}_k}{||\widetilde{L}_k||}$. Ce qui donne une famille orthonormée avec $\langle X^k, L_k\rangle > 0$. L'unicité est également claire.

Comme L_k est de degré k (par récurrence), la famille (L_0, L_1, L_2, L_3) est bien une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

$\star$ $\displaystyle\int_{-1}^{1} \lambda^2\, dt = 2\lambda^2$ et ceci vaut 1 avec $\lambda > 0$ lorsque $L_0 = \lambda = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\star$ $\begin{cases} \displaystyle\int_{-1}^{1} (\alpha t+\beta)^2\, dt = 1 \Longleftrightarrow \frac{2\alpha^2}{3} + 2\beta^2 = 1 \\ \displaystyle\int_{-1}^{1} (\alpha t+\beta)\, dt = 0 \Longleftrightarrow \beta = 0 \end{cases}$,

avec $\alpha > 0$ il vient $\alpha = \sqrt{\dfrac{3}{2}}, \beta = 0$ et $L_1 = \dfrac{\sqrt{6}}{2} X$

$\star$ On trouve de même $L_2 = \dfrac{3\sqrt{10}}{4}(X^2 - \dfrac{1}{3})$

3. a) On a $||P|| = 1$. Si $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{3} a_i L_i$, alors :

$$1 = ||P||^2 = \langle \sum_{i=0}^{3} a_i L_i, \sum_{i=0}^{3} a_i L_i\rangle = \sum_{i=0}^{3} a_i^2.$$

b) Comme $P(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{3} a_i L_i(x)$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^4$ muni de sa structure euclidienne canonique permet d'écrire :

$$|P(x)| \leqslant \big(\sum_{i=0}^{3} a_i^2\big)^{1/2} \times \big(\sum_{i=0}^{3} L_i(x)^2\big)^{1/2} = \big(\sum_{i=0}^{3} L_i(x)^2\big)^{1/2}$$

4. $\star$ $\displaystyle\sup_{[-1,1]} |L_0| = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\displaystyle\sup_{[-1,1]} |L_1| = \frac{\sqrt{6}}{2}$; $\displaystyle\sup_{[-1,1]} |L_2| = \frac{3\sqrt{10}}{4}(1-\frac{1}{3}) = \frac{\sqrt{10}}{2}$

Une étude rapide donne :

x	0		$1/\sqrt{5}$		1
L_3	0	$\searrow$	$-\sqrt{14}/(2\sqrt{5})$	$\nearrow$	$\sqrt{14}/2$

Donc $\sup\limits_{x\in[-1,1]} |L_3(x)| = \dfrac{\sqrt{14}}{2}$.
Enfin :

$$\sup_{x\in[-1,1]} |P(x)| \leqslant \Big(\sum_{i=0}^{3} \sup_{x\in[-11]} L_i(x)^2\Big)^{1/2} = (\tfrac{1}{2}+\tfrac{3}{2}+\tfrac{5}{2}+\tfrac{7}{2})^{1/2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

Exercice 2.16.

1. Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ f = id$. Justifier que f est diagonalisable.

Dans la suite, n est un entier naturel tel que $n \geqslant 2$, $E = \mathbb{R}_n[X]$ est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n et $\mathcal{B} = \big(1, X, X^2, \ldots, X^n\big)$ désigne la base canonique de E.

Pour $i \in [\![1, n+1]\!]$ et $j \in [\![1, n+1]\!]$, on note P_{j-1} le polynôme :

$$P_{j-1}(X) = (1-X)^{j-1}\,(1+X)^{n-j+1}$$

Soit $a_{i,j}$ le coefficient de X^{i-1} dans l'écriture de P_{j-1} selon $\mathcal{B}$ et

$$A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

2. Dans cette question seulement, on suppose $n = 2$.
Expliciter A et déterminer ses valeurs propres et vecteurs propres. La matrice A est-elle diagonalisable ?

3. n est à nouveau un entier fixé supérieur ou égal à 2.

a) Pour $j \in [\![1, n+1]\!]$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, calculer $(1+x)^n\, P_{j-1}\big(\frac{1-x}{1+x}\big)$ de deux façons et en déduire que :

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_{i,j}\, P_{i-1}(X) = 2^n\, X^{j-1}$$

b) Montrer que $A^2 = 2^n\, I_{n+1}$, où I_{n+1} désigne la matrice identité de taille $n+1$.

c) La matrice A est-elle diagonalisable ? Que dire de ses valeurs propres ?

Solution :

1. On a : $\forall x \in E, x = \frac{1}{2}(x + f(x)) + \frac{1}{2}(x - f(x))$.
Or : $f(x + f(x)) = f(x) + f^2(x) = x + f(x)$, donc $\frac{1}{2}(x + f(x)) \in \mathrm{Ker}(f - I)$, tandis qu'un calcul semblable donne $\frac{1}{2}(x - f(x)) \in \mathrm{Ker}(f + I)$. D'où :

$$\mathrm{Ker}(f - I) + \mathrm{Ker}(f + I) = E$$

Comme $[f(x) = x$ et $f(x) = -x] \implies x = 0$, cette somme est directe. Donc f est diagonalisable et les seules valeurs propres possibles sont -1 et 1.

2. On a : $P_0(X) = (1+X)^2$, $P_1(X) = (1-X)(1+X) = 1-X^2$ et $P_2(X) = (1-X)^2$, d'où :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A-\lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & -\lambda & -2 \\ \mathbf{1} & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \underset{\substack{L_1\leftarrow L_1+(\lambda-1)L_3 \\ L_2\leftarrow L_2-2L_3}}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 2-\lambda & \lambda(2-\lambda) \\ 0 & 2-\lambda & 2\lambda-4 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_1\leftarrow L_1-L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4-\lambda^2 \\ 0 & 2-\lambda & 2\lambda-4 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \underset{C_1\leftrightarrow C_3}{\sim} \begin{pmatrix} 4-\lambda^2 & 0 & 0 \\ 2\lambda-4 & 2-\lambda & 0 \\ 1-\lambda & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

les valeurs propres de A sont donc 2 et -2, et :

$${}^t(\,x \quad y \quad z\,) \in E_{(2)}(A) \Longleftrightarrow x-y-z=0$$

$${}^t(\,x \quad y \quad z\,) \in E_{(-2)}(A) \Longleftrightarrow \begin{cases} 4y-8z=0 \\ x-y+3z=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y=2z \\ x=y-3z=-z \end{cases}$$

Donc $E_{(2)}(A)$ est un plan et $E_{(-2)}(A)$ une droite : A est diagonalisable.

3. a) On a $P_{j-1}(x) = \sum_{i=1}^{n+1} a_{i,j}\, x^{i-1}$, d'où, pour $x \neq -1$:

$$\begin{aligned}(1+x)^n P_{j-1}\big(\tfrac{1-x}{1+x}\big) &= (1+x)^n \sum_{i=1}^{n+1} a_{i,j}\big(\tfrac{1-x}{1+x}\big)^{i-1} \\ &= \sum_{i=1}^{n+1}\Big[a_{i,j}(1-x)^{i-1}(1+x)^{n-i+1}\Big] = \sum_{i=1}^{n+1} a_{i,j}P_{i-1}(x)\end{aligned}$$

Mais, on a aussi :

$$\begin{aligned}(1+x)^n P_{j-1}\big(\tfrac{1-x}{1+x}\big) &= (1+x)^n\big(1-\tfrac{1-x}{1+x}\big)^{j-1}\big(1+\tfrac{1-x}{1+x}\big)^{n-j+1} \\ &= (2x)^{j-1}\,2^{n-j+1} = 2^n\,x^{j-1}\end{aligned}$$

D'où le résultat demandé.

b) Pour tout $j \in [\![1, n+1]\!]$, on a :

$$2^n X^{j-1} = \sum_{i=1}^{n+1}\Big[a_{i,j}\sum_{k=1}^{n+1} a_{k,i}X^{k-1}\Big] = \sum_{k=1}^{n+1}\Big[\sum_{i=1}^{n+1} a_{k,i}a_{i,j}\Big]X^{k-1},$$

d'où, par identification : $\sum_{i=1}^{n+1} a_{k,i}a_{i,j} = 2^n\delta_{k,j} = \begin{cases} 2^n & \text{si } k=j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, soit :

$$A^2 = 2^n\, I_{n+1}$$

c) Ainsi $\big(\frac{A}{2^{n/2}}\big)^2 = I_{n+1}$ et d'après la question 1, $\frac{A}{2^{n/2}}$ est diagonalisable, donc A aussi, et :

$$\mathrm{Spec}(A) \subset \big\{-2^{n/2}, 2^{n/2}\big\}$$

Exercice 2.17.

Soit E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$.

1. Montrer que l'application T définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par

$$\text{si } C = (c_{i,j})_{1\leq i,j\leq n},\ T(C) = \sum_{i=1}^{n} c_{i,i}$$

est une forme linéaire telle que $\forall\, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), T(CD) = T(DC)$.

Dans tout le reste du problème, (A, B) désigne un couple de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que :

$$AB - BA = A \text{ avec } A \text{ non nulle } \quad (*)$$

2. Montrer que $T(A) = 0$ et que A n'est pas inversible.

3. Montrer que : $\forall\, k \in \mathbb{N},\ A^k B - BA^k = kA^k$.

4. En considérant les valeurs propres de l'endomorphisme φ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par :

$$\varphi : M \mapsto MB - BM$$

montrer qu'il existe un entier $p \in [\![2, n]\!]$ tel que $A^p = 0$.

5. Pour $n = 2$, déterminer les couples (A, B) solutions du problème $(*)$.

Solution :

1. La trace est une forme linéaire et

$$\operatorname{tr}(CD) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_{i,k}d_{k,i} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} d_{k,i}c_{i,k} = \operatorname{tr}(DC)$$

2. Si A inversible :

$$\begin{aligned} AB - BA = A &\implies ABA^{-1} - B = I \implies \operatorname{tr}(ABA^{-1}) - \operatorname{tr}(B) = n \\ &\implies \operatorname{tr}(BA^{-1}A) - \operatorname{tr}(B) = n, \text{ soit } 0 = n, \text{ ce qui est absurde.} \end{aligned}$$

3. Démontrons ceci par récurrence, la propriéré étant banale pour $k = 0$ et dans l'énoncé pour $k = 1$.

Supposons la propriété acquise pour un rang $k \geqslant 1$, alors :

$$\begin{aligned} A^{k+1}B - BA^{k+1} &= A(A^kB) - BA^{k+1} = A(BA^k + kA^k) - BA^{k+1} \\ &= kA^{k+1} + (AB - BA)A^k \\ &= kA^{k+1} + AA^k = (k+1)A^{k+1}. \end{aligned}$$

On conclut donc par le principe de récurrence.

4. • Si A n'est pas nilpotente, alors : $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$, on a $\varphi(A^k) = kA^k \neq 0$, ce qui prouve que k est valeur propre de φ. En dimension finie, on ne peut

avoir qu'un nombre fini de valeurs propres. L'hypothèse est absurde. De plus comme $A \neq 0$, on a bien $p \geqslant 2$.

• Soit p le plus petit des entiers k tels que $A^k = 0$. Soit X une colonne telle que $A^{p-1}X \neq 0$. La famille $(X, AX, \ldots, A^{p-1}X)$ est alors libre.
En effet $\lambda_0 X + \lambda_1 AX + \cdots + \lambda_{p-1}A^{p-1}X = 0$ donne en multipliant à gauche par A^{p-1} : $\lambda_0 A^{p-1}X = 0$ et donc $\lambda_0 = 0$, en multipliant alors à gauche par A^{p-2}, il vient $\lambda_1 = 0$, et ainsi de suite.
Par conséquent cette famille est de cardinal inférieur ou égal à n, soit $p \leqslant n$.

5. Pour $n = 2$, la question précédente entraîne $A^2 = 0$.

• Tous les couples $(0, B)$ sont des solutions évidentes.
• Si $A \neq 0$: il existe une matrice P inversible telle que $P^{-1}AP$ soit de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = J$ (soit a l'endomorphisme canoniquement associé à A, on choisit un vecteur x tel que $a(x) \neq 0$, et, conformément au raisonnement fait en 4., on considère la base $(a(x), x)$).

$AB - BA = A$ s'écrit donc $PJP^{-1}B - BPJP^{-1} = PJP^{-1}$, soit

$$J(P^{-1}BP) - (P^{-1}BP)J = J.$$

On pose alors $P^{-1}BP = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ et un calcul simple montre que la relation précédente est vérifiée lorsque $\gamma = 0$ et $\delta = \alpha + 1$. Les couples solutions sont donc les couples :

$$\left(P \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}, P \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha+1 \end{pmatrix} P^{-1}\right), \alpha, \beta \in \mathbb{R}, P \in GL_2(\mathbb{R})$$

Exercice 2.18.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et u un endomorphisme de E tel que $u^k = 0$ et $u^{k-1} \neq 0$, où 0 est l'endomorphisme nul.
On dit alors que u est un endomorphisme *nilpotent* d'indice k.

1. Montrer qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $u^{k-1}(x_0) \neq 0$.
Prouver que $(x_0, u(x_0), u^2(x_0), \ldots, u^{k-1}(x_0))$ est une famille libre de E. En déduire que $k \leqslant n$.

2. On pose désormais $F = \text{Vect}(x_0, u(x_0), u^2(x_0), \ldots, u^{k-1}(x_0))$

Montrer que F est stable par u.

3. a) Soit H un supplémentaire de $\text{Vect}(u^{k-1}(x_0))$ dans E. Montrer qu'il existe une forme linéaire $\varphi : E \to \mathbb{C}$ vérifiant :

$$\forall\, h \in H, \varphi(h) = 0 \text{ et } \varphi(u^{k-1}(x_0)) \neq 0.$$

Montrer que la famille $(\varphi, \varphi \circ u, \varphi \circ u^2, \ldots, \varphi \circ u^{k-1})$ est une famille libre de $\mathcal{L}(E, \mathbb{C})$.

4. On pose $G = \bigcap_{i=0}^{k-1} \mathrm{Ker}(\varphi \circ u^i)$. Montrer que G est stable par u et déterminer $F \cap G$.

5. a) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soient $H_1, H_2 \ldots, H_p$ des hyperplans de E. Montrer que $\dim(H_1 \cap H_2 \cap \ldots \cap H_p) \geqslant n - p$.

b) Montrer que F et G sont supplémentaires.

Solution :

1. On sait que u^{k-1} n'est pas l'endomorphisme nul. Il existe donc $x_0 \in E$ tel que $u^{k-1}(x_0) \neq 0$. Soit $(\lambda_i)_{0 \leq i \leq k-1} \in \mathbb{C}^k$ tel que $\sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i u^i(x_0) = 0$.
Supposons que les λ_i ne sont pas tous nuls et appelons j le plus petit indice $i \in [\![0, k-1]\!]$ tel que λ_i soit non nul. En appliquant u^{k-j-1} à l'égalité précédente, on obtient $\lambda_j u^{k-1}(x_0) = 0$, ce qui est impossible. Par suite, la famille $(x_0, u(x_0), u^2(x_0), \ldots, u^{k-1}(x_0))$ est une famille libre de E et donc : $k \leqslant \dim(E) = n$.

2. $x \in F \Longrightarrow x = \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i u^i(x_0)$, où $\lambda_i \in \mathbb{C}$; comme $u^k = 0$, il vient : $u(x) = \sum_{i=0}^{k-2} \lambda_i u^{i+1}(x_0) \in F$. Ainsi, F est stable par u.

3. a) Soit $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ une base de H, la forme linéaire φ définie par
$$\varphi(e_1) = \cdots = \varphi(e_{n-1}) = 0 \text{ et } \varphi(u^{k-1}(x_0)) = 1$$
convient. (on définit une application linéaire en se donnant les images des vecteurs d'une base de l'espace de départ)

b) Soit $(\lambda_i)_{0 \leq i \leq k-1} \in \mathbb{C}^k$ telle que $\sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i \varphi \circ u^i = 0$.

$\rightarrow$ Comme $u^k = 0$, en $x = u^{k-1}(x_0)$, on obtient : $\lambda_0 = 0$.

$\rightarrow$ Puis, en appliquant l'égalité en $x = u^{k-2}(x_0)$, on trouve que $\lambda_1 = 0$. De proche en proche, on prouve ainsi que tous les λ_i sont nuls. La famille $(\varphi, \varphi \circ u, \varphi \circ u^2, \ldots, \varphi \circ u^{k-1})$ est donc une famille libre de $\mathcal{L}(E, \mathbb{C})$.

4. $\star$ Soit $x \in G$. Alors, pour tout $i \in [\![0, k-1]\!]$, $\varphi \circ u^i(x) = 0$. Montrons que $u(x) \in G$, *i.e.* que $\varphi \circ u^i(u(x)) = 0$, pour tout $i \in [\![0, k-1]\!]$.
D'une part, si $0 \leqslant i \leqslant k-2$, alors $1 \leqslant i+1 \leqslant k-1$ et $\varphi \circ u^{i+1}(x) = 0$ du fait que $x \in G$.
D'autre part, si $i = k-1$, alors $\varphi \circ u^{i+1}(x) = \varphi(u^k(x)) = 0$ puisque $u^k = 0$.

Ainsi, G est stable par u.

$\star$ Soit $x \in F \cap G$. Alors, il existe des complexes λ_i tels que $x = \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i u^i(x_0)$.
De plus, pour tout $i \in [\![0, k-1]\!]$, $\varphi \circ u^i(x) = 0$.
En particulier, $0 = \varphi \circ u^{k-1}(x) = \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i \varphi \circ u^{k-1+i}(x)$. Or, $u^p = 0$, pour tout $p \geqslant k$, d'où $\lambda_0 = 0$. De proche en proche, on montre ainsi que tous les λ_i sont nuls.
Par suite, $F \cap G = \{0\}$.

5. a) Si $p = 1$, la propriété est évidente. Supposons la propriété vraie à un rang p.
Considérons alors $(p+1)$ hyperplans de E : $H_1, H_2, \ldots, H_{p+1}$.
On pose $F = H_1 \cap H_2 \ldots \cap H_p$. La propriété au rang p donne $\dim(F) \geqslant n-p$.
Enfin

$$\dim(F \cap H_{p+1}) = \dim F + \dim H_{p+1} - \dim(F + H_{p+1}) \geqslant (n-p) + (n-1) - n$$
$$\geqslant n - (p+1), \text{ puisque } F + H_{p+1} \subset E,$$

ce qui donne l'inégalité au rang $p+1$ et on conclut par le principe de récurrence.

b) Comme $F \cap G = \{0\}$, il reste seulement à montrer que :

$$\dim(E) = \dim(F) + \dim(G),$$

autrement dit que $\dim(G) = n - k$.
On a déjà $\dim(E) \geqslant \dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) = k + \dim(G)$. D'où, $\dim(G) \leqslant n - k$.
D'autre part, par la question 5. a), G qui est l'intersection de k hyperplans de E est de dimension au moins égale à $n - k$. D'où, $\dim(G) = n - k$. Par conséquent, F et G sont supplémentaires dans E.

3

PROBABILITÉS

Exercice 3.1.

On cherche à évaluer le nombre N de lions d'Asie, espèce en voie de disparition, encore en vie dans la forêt de Gir. Pour cela, on capture d'abord, en une seule fois, m lions (avec $m \in \mathbb{N}^*$) que l'on tatoue avant de les relâcher dans la nature, et on admet que pendant toute la durée de l'étude il n'y a ni décès ni naissance, puis on utilise l'une des deux méthodes suivantes ...

Première méthode

On capture successivement, au hasard (donc avec équiprobabilité) et avec remise en liberté après l'observation du sujet, n lions. Soit Y_n le nombre de lions tatoués parmi eux.

1. Déterminer la loi de Y_n. En déduire que $\frac{1}{nm}Y_n$ est un estimateur sans biais et convergent de $\frac{1}{N}$.

2. Pourquoi ne peut-on pas prendre $\frac{nm}{Y_n}$ comme estimateur de N ?

3. On pose $B_n = \frac{m(n+1)}{Y_n+1}$. Calculer l'espérance de B_n et montrer que B_n est un estimateur asymptotiquement sans biais de N.

Seconde méthode

On se donne $n \in \mathbb{N}^*$. On capture également, un par un, des lions de Gir au hasard et avec remise en liberté après l'observation du sujet.
On note X_n, la variable aléatoire égale au nombre de lions qu'il a été juste nécessaire de capturer pour en obtenir n tatoués.
On pose $D_1 = X_1$, et pour tout i de $[\![2, n]\!]$, $D_i = X_i - X_{i-1}$. On admet que les D_i sont des variables indépendantes deux-à-deux.

4. a) Pour tout i de $[\![2, n]\!]$, que représente concrètement D_i ?

b) Déterminer, pour tout i de $[\![2, n]\!]$, la loi de D_i, son espérance et sa variance. En déduire l'espérance et la variance de X_n.

c) On pose $A_n = \frac{m}{n} X_n$. Montrer que A_n est un estimateur sans biais et convergent de N et déterminer son risque quadratique.

5. a) Pour n assez grand, par quelle loi peut-on approcher la loi de la variable aléatoire $\widetilde{X_n} = \frac{X_n}{n}$?

b) On a tatoué $m = 200$ lions, puis capturé 450 lions, pour obtenir $n = 50$ lions marqués. On note σ l'écart-type de A_{50}. On a pu prouver que $\sigma \leqslant 100$. Déterminer en fonction de σ, un intervalle de confiance pour N au seuil de confiance $0,9$ (on rappelle que $\Phi(1,64) \simeq 0.95$).

Solution :

1. La probabilité de succès à chaque capture vaut $\frac{m}{N}$, donc $Y_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{m}{N})$.
Comme $E\big(\frac{Y_n}{nm}\big) = \frac{1}{N}$: $\frac{Y_n}{nm}$ est un estimateur sans biais de $\frac{1}{N}$.
De plus :
$V\big(\frac{Y_n}{nm}\big) = \frac{1}{(nm)^2} V(Y_n) = \frac{1}{(nm)^2} \times n \frac{m}{N}(1 - \frac{m}{N}) = \big(1 - \frac{m}{N}\big) \times \frac{1}{nmN} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$
L'inégalité de Bienaymé-Tchebicheff permet d'affirmer que cet estimateur est convergent.

2. Comme $P(Y_n = 0) \neq 0$, $\frac{nm}{Y_n}$ aurait une probabilité non nulle de ne pas être défini : aussi ne peut-on pas le choisir comme estimateur.

3. Par le théorème de transfert :

$$\begin{aligned} E(B_n) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{m(n+1)}{k+1} \binom{n}{k} \big(\tfrac{m}{N}\big)^k \big(1 - \tfrac{m}{N}\big)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} m \binom{n+1}{k+1} \big(\tfrac{m}{N}\big)^k \big(1 - \tfrac{m}{N}\big)^{n-k} \\ &= N \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} \big(\tfrac{m}{N}\big)^{k+1} \big(1 - \tfrac{m}{N}\big)^{n-k} \\ &= N \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} \big(\tfrac{m}{N}\big)^k \big(1 - \tfrac{m}{N}\big)^{n+1-k}, \end{aligned}$$

soit, en utilisant la formule du binôme :
$E(B_n) = N\big(1 - \big(1 - \frac{m}{N}\big)^{n+1}\big) \underset{n\to\infty}{\to} N$. Ainsi B_n est un estimateur asymptotiquement sans biais de N.

4. a) Pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, D_i représente le nombre de lions supplémentaires, à partir du $(i-1)^{\text{ème}}$ lion tatoué obtenu, qu'il faut capturer pour obtenir un $i^{\text{ème}}$ lion tatoué (qui a pu être déjà recapturé), nous sommes donc dans le schéma géométrique ...

b) Ainsi $D_i(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et D_i suit la loi géométrique de paramètre $\frac{m}{N}$. Ainsi :

$$E(D_i) = \frac{N}{m} \text{ et } V(D_i) = \frac{N(N-m)}{m^2}$$

Or $X_n = \sum_{i=1}^{n} D_i$. Donc, par indépendance :

$$E(X_n) = \frac{nN}{m} \text{ et } V(X_n) = \frac{nN(N-m)}{m^2}$$

c) On a $E(A_n) = N$ et $V(A_n) = \frac{N(N-m)}{n}$. Ainsi A_n est un estimateur sans biais de N, convergent et de risque quadratique égal à $V(A_n)$.

5. a) En utilisant le théorème de la limite centrée :

$$\frac{X_n - (nN/m)}{\sqrt{n}\frac{\sqrt{N(N-m)}}{m}} = \frac{mX_n - nN}{\sqrt{nN(N-m)}} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$$

Ainsi, pour n assez grand, on peut approcher la loi de $\frac{X_n}{n}$ par la loi normale $\mathcal{N}\big(\frac{N}{m}, \frac{N(N-m)}{nm^2}\big)$

b) Ici $n = 50, m = 200, X_n = 450$. On pose $\sigma = \sigma(A_n)$. On considère que : $\frac{A_n - N}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

En utilisant cette approximation, pour tout $t > 0$:

$$P\big(\big|\frac{A_n - N}{\sigma}\big| \leqslant t\big) = \Phi(t) - \Phi(-t) = 2\Phi(t) - 1$$

Donc : $P\big(\big|\frac{A_n - N}{\sigma}\big| \leqslant t\big) \geqslant 0.9 \iff \Phi(t) \geqslant 0.95 \iff t \geqslant 1.64$

Comme $\sigma \leqslant 100$, $(A_n - t\sigma \leqslant N \leqslant A_n + t\sigma) \subset (A_n - 100t \leqslant N \leqslant A_n + 100t)$.

Si l'on prend $I = [A_n - 164, A_n + 164]$, alors :

$$P(N \in I) = P\big(\big|\frac{A_n - N}{\sigma}\big| \leqslant 1.64\big) \geqslant 0.9$$

Comme $A_{50} = 1800$, il vient $I = [1636, 1964]$.

Exercice 3.2.

Une urne contient initialement n boules numérotées depuis 1 jusqu'à n, avec $n \geqslant 2$. On vide l'urne en extrayant toutes les boules une à une, au hasard et sans remise.

1. Pour i compris entre 1 et n, on note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule obtenue au $i^{\text{ème}}$ tirage porte le numéro i et 0 dans le cas contraire. Quelle est la loi de X_i ?

2. En déduire l'espérance du nombre de fois où il y a concidence entre le rang du tirage et le numéro de la boule obtenue, lorsque l'on vide l'urne.

3. Pour k compris entre 1 et n, on dit que le résultat du $k^{\text{ème}}$ tirage est un « record » si la boule obtenue à ce tirage porte un numéro strictement supérieur à tous les numéros obtenus jusqu'alors. (par convention, le résultat du premier tirage sera toujours considéré comme un record).

a) Combien existe-t-il de façons de vider l'urne et pour lesquelles il n'y a qu'un seul record ? Pour lesquelles il y a n records ?

b) Montrer que pour p et q entiers naturels, on a la relation suivante :

$$\binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \cdots + \binom{p+q}{p} = \binom{p+q+1}{p+1}$$

(où $\binom{n}{m}$ est le nombre de parties à m éléments d'un ensemble à n éléments).

4. Soit k fixé entre 2 et n et j fixé entre k et n. Combien existe-t-il de façons de vider l'urne, pour lesquelles la $k^{\text{ème}}$ boule obtenue porte le numéro j et le $k^{\text{ème}}$ tirage constitue un record ?

5. Combien existe-t-il de façons de vider l'urne pour lesquelles le $k^{\text{ème}}$ tirage est un record ? En déduire la probabilité que le $k^{\text{ème}}$ tirage soit un record. Pouvait-on avoir ce résultat directement ?

6. Pour k compris entre 1 et n, soit Y_k la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si le résultat du $k^{\text{ème}}$ tirage est un record et 0 sinon. Déterminer la loi de Y_k. Soit R le nombre aléatoire de records obtenus lorsque l'on vide l'urne. Déterminer l'espérance de R.

Solution :

1. Parmi tous les $n!$ tirages possibles, il suffit de compter ceux pour lesquels on a obtenu i au $i^{\text{ème}}$ tirage : il y en a $(n-1)!$. Donc, X_i suit la loi de Bernoulli de paramètre $1/n$.

2. On a : $N = \sum_{i=1}^{n} X_i$ (nombre de coïncidences). Par linéarité de l'espérance, on a : $E(N) = n \times \frac{1}{n} = 1$.

3. a) Le premier tirage étant considéré comme un record, s'il n'y a eu qu'un seul record, c'est que la boule numéro n est sortie au premier tirage. Ensuite, peu importe ce qui se passe. Il y a donc $(n-1)!$ façons de vider l'urne pour lesquelles il n'y a qu'un record.

S'il y eu n records, cela signifie qu'à chaque tirage, on a obtenu un numéro supérieur à celui obtenu au tirage précédent ; la seule possibilité est d'avoir tiré les boules par ordre croissant, donc un seul tirage convient.

b) La formule demandée :

$$\binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \cdots + \binom{p+q}{p} = \binom{p+q+1}{p+1}$$

s'obtient, par exemple, par récurrence en utilisant la formule de Pascal.

4. Si le $k^{\text{ème}}$ tirage est un record avec le numéro j sorti, cela signifie qu'au cours des $(k-1)$ tirages précédents, on n'a obtenu que des numéros inférieurs ou égaux à $j-1$.

- si $j < k$, c'est impossible ;
- si $j \geqslant k$ il y a $\binom{j-1}{k-1}$ façons de choisir les boules sorties lors des $(k-1)$ premiers tirages (elles doivent avoir toutes un numéro compris entre 1 et $j-1$), $(k-1)!$ façons de les ordonner, puis une façon de placer la boule j en place k, et la fin est une permutation quelconque des boules restantes. Finalement, il y a :

$$\binom{j-1}{k-1} \times (k-1)! \times 1 \times (n-k)!$$

façons convenables de vider l'urne

(on pourrait simplifier, mais ce n'est pas intéressant pour la question suivante).

5. Par la question précédente, le nombre de façons d'avoir un record au $k^{\text{ème}}$ tirage est égal à :

$$(n-k)!(k-1)! \sum_{j=k}^{n} \binom{j-1}{k-1} = (n-k)!(k-1)!\binom{n}{k}$$

et la probabilité demandée est donc :

$$\frac{(n-k)!(k-1)!}{n!}\binom{n}{k} = \frac{1}{k}$$

On peut retrouver ce résultat directement avec le raisonnement suivant :

dire que le $k^{\text{ème}}$ tirage est un record, c'est dire que le plus grand des k premiers résultats est le dernier, c'est donc dire qu'en ordonnant k nombres deux à deux distincts le plus grand est le dernier. La probabilité est donc de $\frac{1}{k}$.

6. La variable aléatoire Y_k suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{k}$. La variable aléatoire R est égale à $\sum_{k=1}^{n} Y_k$ et $E(R) = \sum_{k=1}^{n} E(Y_k) = n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Exercice 3.3.

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{2}{\pi(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x})}$.

Montrer que g est une fonction densité de probabilité.

Dans la suite, on note X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ admettant g pour densité (on dit que X suit la loi d'Euler).

2. Déterminer la fonction de répartition F_X de X.

3. Montrer que X admet des moments de tous ordres et calculer son espérance.

4. On pose $Y = \mathrm{e}^X$.

a) Montrer que Y est une variable aléatoire à densité et déterminer une densité de Y.

b) La variable aléatoire Y admet-elle une espérance ?

5. On considère une suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et suivant toutes la même loi que Y. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $M_n = \sup(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$.

a) Déterminer la fonction de répartition de M_n.

b) Pour $n \geqslant 1$, on pose $Z_n = \dfrac{n}{M_n}$. Montrer que la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on donnera la loi.

Solution :

1. La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$ et positive. De plus, en abrégeant :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+1}dx = \Big[\frac{2}{\pi}\operatorname{Arc\,tan}(\mathrm{e}^x)\Big]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{2}{\pi}(\frac{\pi}{2} - 0) = 1.$$

g est bien une densité de probabilité.

2. De la même façon, pour tout réel t :

$$F_X(t) = \Big[\frac{2}{\pi}\operatorname{Arc\,tan}(\mathrm{e}^x)\Big]_{-\infty}^{t} = \frac{2}{\pi}\operatorname{Arc\,tan}(\mathrm{e}^t).$$

3. a) Soit $n \geqslant 1$, et $h_n : x \mapsto x^n g(x)$. La fonction h_n est continue sur $\mathbb{R}$.

- au voisinage de $+\infty$, $h_n(x) \sim \dfrac{2}{\pi}x^n\mathrm{e}^{-x} = o(1/x^2)$,
- au voisinage de $-\infty$, $|h_n(x)| \sim \dfrac{2}{\pi}|x|^n\mathrm{e}^x = o(1/x^2)$.

(on aurait pu invoquer la parité de la fonction g)

Ainsi la convergence (absolue) de l'intégrale sur $\mathbb{R}$ de h_n est acquise et X admet des moments de tous ordres.

b) La fonction h_1 est impaire d'intégrale sur $\mathbb{R}$ convergente, donc $E(X) = 0$.

4. a) On a $Y(\Omega) =]0, +\infty[$ et pour $y > 0$, $(Y \leqslant y) = (\mathrm{e}^X \leqslant y) = (X \leqslant \ln y) \in \mathcal{A}$, donc Y est une variable aléatoire et :

Pour $y > 0$, $P(Y \leqslant y) = P(X \leqslant \ln(y)) = \frac{2}{\pi} \operatorname{Arc\,tan}(y)$. Ainsi :

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ \frac{2}{\pi} \operatorname{Arc\,tan}(y) & \text{si } y \geqslant 0 \end{cases}$$

F_Y est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, donc Y est une variable aléatoire à densité et une densité f_Y de Y s'obtient par exemple par dérivation sur $\mathbb{R}^*$ et en faisant un choix arbitraire en 0 :

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ \frac{2}{\pi} \frac{1}{1+y^2} & \text{si } y \geqslant 0 \end{cases}$$

b) Il est clair que Y n'admet pas d'espérance, puisque $y f_Y(y) \sim \frac{C}{y}$ au voisinage de $+\infty$ et donc déjà l'intégrale $\displaystyle\int^{+\infty} y f_Y(y)\, dy$ diverge.

5. a) On a : $[M_n \leqslant x] = \bigcap_{i=1}^{n} [Y_i \leqslant x]$, ce qui montre que M_n est une variable aléatoire, clairement à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. De plus, pour $x \geqslant 0$, par indépendance des (Y_i), on a :

$$P(M_n \leqslant x) = \prod_{i=1}^{n} P(Y_i \leqslant x) = \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{Arc\,tan}(x)\right)^n.$$

Donc : $F_{M_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{Arc\,tan}(x)\right)^n & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$

b) On a $Z_n(\Omega) =]0, +\infty[$ et pour $x > 0$:

$P(Z_n \geqslant x) = P(M_n \leqslant \frac{n}{x}) = \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{Arc\,tan}(\frac{n}{x})\right)^n = \left(\frac{2}{\pi}(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arc\,tan}(\frac{x}{n}))\right)^n$

car pour $t > 0$, on a $\operatorname{Arc\,tan} t + \operatorname{Arc\,tan} \frac{1}{t} = \frac{\pi}{2}$

Donc : $P(Z_n \geqslant x) = \left(1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{Arc\,tan}(\frac{x}{n})\right)^n = \exp(n \ln(1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{Arc\,tan}(\frac{x}{n})))$

Or : $n \ln(1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{Arc\,tan}(\frac{x}{n})) \underset{(n\to\infty)}{\sim} -\frac{2}{\pi} n \operatorname{Arc\,tan}(\frac{x}{n}) \underset{(n\to\infty)}{\sim} -\frac{2x}{\pi}$

Donc $\forall\, x > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} P(Z_n \leqslant x) = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{2x}{\pi}}$ et comme Z_n est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, ceci prouve que Z_n tend en loi vers la loi exponentielle de paramètre $\frac{2}{\pi}$.

Exercice 3.4.

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n et k boules bleues non numérotées. Les boules sont tirées avec remise jusqu'à ce qu'une boule bleue soit tirée. Au cours de ces tirages, on définit le nombre R de répétitions de la manière suivante :
au début, $R = 0$. Ensuite, on ajoute 1 à R dès que l'on obtient une boule numérotée qui avait été déjà tirée précédemment.

1. Déterminer les probabilités des événements suivants :

A_1 = « la première boule tirée est la boule numéro 1 ».

A_2 = « la première boule tirée est une boule portant un numéro strictement supérieur à 1 ».

A_3 = « la première boule tirée est une boule bleue ».

2. On note A_0 l'événement « la boule numéro 1 n'est jamais tirée lors du jeu ». En utilisant la formule des probabilités totales avec les événements précédents, montrer que $P(A_0) = \dfrac{k}{k+1}$.

3. On note X le nombre de fois où l'on a tiré la boule 1 au cours du jeu. En utilisant un raisonnement analogue à celui de la question précédente, montrer que $E(X) = \dfrac{1}{k}$.

4. On définit la variable aléatoire Y par :

$$\begin{cases} \text{Si } X \geqslant 1, \text{ alors } Y = X - 1 \\ \text{Si } X = 0, \text{ alors } Y = 0 \end{cases}$$

(Y est donc le nombre de répétitions de la boule numérotée 1.)
Montrer que $E(Y) = \sum\limits_{m \geq 1} (m-1)P(X = m)$ puis que $E(Y) = \dfrac{1}{k(k+1)}$.

Soit r un entier naturel. On recherche la valeur minimale de k (en fonction de n et r) de manière à ce que le nombre moyen t de répétitions soit inférieur ou égal à r.

5. Montrer que $t = nE(Y)$.

6. En déduire que la valeur minimale recherchée est $k_0 = \lfloor \sqrt{\dfrac{n}{r} + \dfrac{1}{4}} - \dfrac{1}{2} \rfloor$.

Solution :

1. On a clairement : $P(A_1) = \dfrac{1}{n+k}$ et $P(A_2) = \dfrac{n-1}{n+k}$. La probabilité que le jeu s'arrête dès la première étape vaut $P(A_3) = \dfrac{k}{n+k}$.

2. Les événements A_1, A_2, A_3 forment une partition de l'ensemble Ω. De plus, les événements A_0 et A_1 sont incompatibles. Si la première boule tirée est une boule bleue, le jeu s'arrête et $A_3 \subset A_0$. Les tirages étant indépendants, $P_{A_2}(A_0) = P(A_0)$.
Ainsi, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(A_0) &= \sum_{i=1}^{3} P(A_i)P_{A_i}(A_0) = P(A_1)\times 0 + P(A_2)P_{A_2}(A_0) + P(A_3)\times 1 \\ &= \frac{n-1}{n+k}P(A_0) + \frac{k}{n+k} \end{aligned}$$

Soit : $\frac{n+k-n+1}{n+k}P(A_0) = \frac{k}{n+k}$, d'où $P(A_0) = \frac{k}{k+1}$.

3. On utilise la décomposition selon les événements A_1, A_2, A_3. Ainsi :

$$\begin{aligned}E(X) &= E(X|A_1)P(A_1) + E(X|A_2)P(A_2) + E(X|A_3)P(A_3)\\ &= (E[X]+1)\times P(A_1) + E(X)\times P(A_2) + 0,\end{aligned}$$

soit : $E(X) = \frac{E(X)+1}{n+k} + \frac{n-1}{n+k}E(X)$, d'où : $E(X)\big(1-\frac{n}{n+k}\big) = \frac{1}{n+k}$ et $E(X) = \frac{1}{k}$.

4. D'après la définition, $Y = \max\{0, X-1\}$. Ainsi :

$$\begin{aligned}E(Y) &= \sum_{k=1}^{\infty} kP(Y=k) = \sum_{k=1}^{\infty} kP(Y=k) = \sum_{k=1}^{\infty} kP(X=k+1)\\ &= \sum_{m=2}^{\infty}(m-1)P(X=m), \text{ soit :}\\ E(Y) &= \sum_{m=1}^{\infty}(m-1)P(X=m) = E(X) - \sum_{m=1}^{\infty}P(X=m) = E(X) - P(A_0)\\ &= \frac{1}{k} - \frac{k}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}\end{aligned}$$

5. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, en notant Y_i le nombre de répétitions de la boule numérotée i, on a clairement, par symétrie, $E(Y_i) = E(Y)$. Ainsi :

$$t = E\big(\sum_{i=1}^{n} Y_i\big) = \sum_{i=1}^{n} E(Y_i) = nE(Y).$$

6. Finalement, $t \leqslant r \iff nE(Y) \leqslant r \iff \frac{n}{k(k+1)} \leqslant r \iff rk^2+rk-n \leqslant 0$.

Soit, comme k est entier, $k > \Big\lfloor \sqrt{\frac{n}{r}+\frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \Big\rfloor$.

Exercice 3.5.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Soient $\theta > 0$ et $X, X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $[0, \theta]$.

1. Montrer que $\ln X$ admet une espérance et calculer son espérance m.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = \big(X_1 \times \cdots \times X_n\big)^{\frac{1}{n}}$.

   a) Montrer que la suite $(\ln Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers m.

   b) En déduire que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers e^m.

3. Soit $M_n = \max\limits_{1\leq i\leq n} X_i$. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(M_n \leqslant x)$.

4. En déduire que $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers une variable aléatoire constante C que l'on déterminera en fonction de θ.

5. a) Donner, pour tout réel x, la nature de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} P(M_n \leqslant x)$.

b) Montrer que pour tout $\omega \in \Omega$, la suite $(M_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

c) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que $P(\lim_{n\to+\infty} M_n \leqslant \theta - \varepsilon) = 0$.

Solution :

1. La variable aléatoire X admet pour densité $\frac{1}{\theta}\mathbf{1}_{[0,\theta]}$. De plus, pour $a > 0$, $\int_0^a \ln x\, dx$ converge. Ainsi, d'après le théorème de transfert :

$$m = E(X) = \int_0^\theta \ln x \times \frac{1}{\theta}\, dx = \frac{1}{\theta}\big[x\ln x - x\big]_{\to 0}^{\theta} = \ln\theta - 1.$$

2. a) D'après la loi faible des grands nombres, la suite de variables aléatoires $\big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln Y_i\big)_n$ converge en probabilité vers m. Soit :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \lim_{n\to+\infty} P(|\ln Y_n - m| \geqslant \varepsilon) = 0$$

b) Soient ε, $\eta > 0$. Notons $\varepsilon_0 = \min\{\ln(1+\varepsilon \mathrm{e}^{-m}), -\ln(1-\varepsilon\mathrm{e}^{-m})\}$.
D'après la question précédente, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $P(|\ln Y_n - m| \geqslant \varepsilon_0) \leqslant \eta$. Par suite :

$$\begin{aligned} P(|Y_n - \mathrm{e}^m| \leqslant \varepsilon) &= P\big(\ln(1-\varepsilon\mathrm{e}^{-m}) \leqslant \ln(Y_n) - m \leqslant \ln(1+\varepsilon\mathrm{e}^{-m})\big) \\ &\geqslant P(|\ln Y_n - m| \leqslant \varepsilon_0) \geqslant 1 - \eta. \end{aligned}$$

Soit, $P(|Y_n - \mathrm{e}^m| \geqslant \varepsilon) \leqslant \eta$.
Ainsi, la suite $(Y_n)_n$ converge en probabilité vers e^m.

3. D'après la définition de M_n, la positivité et l'indépendance des (X_i),

- Si $x \leqslant 0$, $P(M_n \leqslant x) = 0$.
- Si $x \geqslant \theta$, $P(M_n \leqslant x) = 1$.
- Si $x \in [0,\theta]$,

$$\begin{aligned} P(M_n \leqslant x) = P(\forall\, i \in [\![1,n]\!],\ X_i \leqslant x) &= \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leqslant x) = \Big(\int_0^x \frac{1}{\theta} dx\Big)^n \\ &= \big(\tfrac{x}{\theta}\big)^n. \end{aligned}$$

4. Soit C la variable aléatoire définie par $P(C = \theta) = 1$. Soit $\varepsilon > 0$. On a :

$$\begin{aligned} P(|M_n - C| \geqslant \varepsilon) &= P(|M_n - \theta| \geqslant \varepsilon) = P(\theta - M_n \geqslant \varepsilon) \\ &= P(M_n \leqslant \theta - \varepsilon) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Ainsi, la suite $(M_n)_n$ converge en probabilité vers la variable aléatoire constante égale à θ.

5. a) D'après la question 3., la série de terme général $P(M_n \leqslant x)$ converge si et seulement si $x \leqslant \theta$.

b) La suite $(M_n(\omega))$ étant croissante et majorée par θ, elle converge.

c) En utilisant la question précédente :

$$P(\lim_{n\to\infty} M_n \leqslant \theta - \varepsilon) = P(\forall\, n \in \mathbb{N}, M_n \leqslant \theta - \varepsilon) = P(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{M_n \leqslant \theta - \varepsilon\})$$
$$\leqslant P(M_k \leqslant \theta - \varepsilon), \text{ pour tout entier naturel } k.$$

Or, d'après les questions précédentes, $\lim_{k\to\infty} P(M_k \leqslant \theta - \varepsilon) = 0$, soit :

$$P(\lim_{n\to\infty} M_n \leqslant \theta - \varepsilon) = 0.$$

Exercice 3.6.

Soient $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ des variables aléatoires, définies sur le même espace probabilisé, indépendantes qui suivent toutes la loi de Poisson de paramètre 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Soit M un nombre réel tel que $M > 0$.

1. Donner la loi de S_n, son espérance et sa variance. Justifier la convergence en loi de la suite $\big(\frac{S_n - n}{\sqrt{n}}\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers une variable aléatoire N dont on précisera la loi.

2. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in [\![1, n]\!]$, montrer que :

$$\prod_{i=0}^{k} \big(1 - \frac{i}{n}\big) \leqslant \exp\big(-\frac{k^2}{2n}\big).$$

b) On note β_n la partie entière de $M\sqrt{n}$. Montrer qu'il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$n \geqslant n_1 \implies n \geqslant \beta_n + 1.$$

Dans toute la suite on se place dans le cas où $n \geqslant n_1$.

3. Soit la variable aléatoire $Y_n = h\big(\frac{S_n - n}{\sqrt{n}}\big)$, où la fonction réelle h est définie par :

$$h(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x \in [-M, 0] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a) Montrer que :

$$E(Y_n) = \frac{\mathrm{e}^{-n}}{\sqrt{n}}\big(\frac{n^{n+1}}{n!} - \frac{n^{n-\beta_n}}{(n-\beta_n-1)!}\big).$$

b) Puis que :

$$E(Y_n) \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-n} n^{n+\frac{1}{2}}}{n!} \leqslant E(Y_n) + \frac{\mathrm{e}^{-n} n^{n+\frac{1}{2}}}{n!}\, \mathrm{e}^{-\frac{\beta_n^2}{2n}}.$$

4. En étudiant la série de terme général $u_n = \ln(a_{n+1}) - \ln(a_n)$, montrer la convergence de la suite de terme général $a_n = \dfrac{\mathrm{e}^{-n} n^{n+\frac{1}{2}}}{n!}$ vers une limite $K > 0$.

5. En admettant que $E(Y_n)$ converge vers $E(h(N))$ quand n tend vers $+\infty$, montrer que :

$$\frac{1-\mathrm{e}^{-\frac{M^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \leqslant K \leqslant \frac{1-\mathrm{e}^{-\frac{M^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} + K\,\mathrm{e}^{-\frac{M^2}{2}}.$$

En déduire que : $n! \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-n}$.

Solution :

1. S_n suit la loi de Poisson de paramètre n, d'espérance n et de variance n. D'après le théorème central limite, la suite $\big(\dfrac{S_n - n}{\sqrt{n}}\big)_n$ converge en loi vers N qui suit la loi normale centrée réduite.

2. a) D'après l'inégalité de convexité $1 - x \leqslant \mathrm{e}^{-x}$, on a : (tout est positif) :

$$\prod_{i=0}^{k} \big(1 - \frac{i}{n}\big) \leqslant \prod_{i=0}^{k} \mathrm{e}^{-\frac{i}{n}} = \exp\big(-\sum_{i=0}^{k} \frac{i}{n}\big) = \exp\big(-\frac{k(k+1)}{2n}\big) \leqslant \exp\big(-\frac{k^2}{2n}\big).$$

b) Comme $\beta_n \leqslant M\sqrt{n}$, pour avoir $n \geqslant \beta_n + 1$ il suffit que $n - M\sqrt{n} - 1 \geqslant 0$. Cette inéquation du second degré en $\sqrt{n}$ possède un coefficient dominant positif donc elle est vraie au voisinage de $+\infty$.
On peut aussi dire que $\beta_n = \lfloor M\sqrt{n} \rfloor \underset{(\infty)}{\sim} M\sqrt{n} \underset{(\infty)}{=} o(n)$

3. a) Par théorème de transfert, sous réserve de convergence de la série, on a :

$$E(Y_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} h\big(\frac{k-n}{\sqrt{n}}\big) \frac{\mathrm{e}^{-n} n^k}{k!}, \text{ or } h\big(\frac{k-n}{\sqrt{n}}\big) = \begin{cases} -\dfrac{k-n}{\sqrt{n}} & \text{si } \dfrac{k-n}{\sqrt{n}} \in [-M, 0] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Et : $\dfrac{k-n}{\sqrt{n}} \in [-M, 0] \iff k \in [n - M\sqrt{n}, n] \iff k \in [n - \beta_n, n]$.
Donc la série converge (il n'y a qu'un nombre fini de termes non nuls) et, comme $[n - \beta_n, n] \subset \mathbb{N}^*$ (d'après la condition $n \geqslant n_1$), on a :

$$\begin{aligned} E(Y_n) &= \sum_{k=n-\beta_n}^{n} -\frac{k-n}{\sqrt{n}} \times \frac{\mathrm{e}^{-n} n^k}{k!} = \frac{\mathrm{e}^{-n}}{\sqrt{n}} \sum_{k=n-\beta_n}^{n} \big(\frac{n^{k+1}}{k!} - \frac{n^k}{(k-1)!}\big) \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-n}}{\sqrt{n}} \big(\frac{n^{n+1}}{n!} - \frac{n^{n-\beta_n}}{(n-\beta_n-1)!}\big) \end{aligned}$$

b) La première inégalité est évidente d'après l'égalité ci-dessus. Pour la seconde on utilise 2. a) avec $k = \beta_n$:

$$\frac{n^{n-k}}{(n-k-1)!}\times\frac{n!}{n^{n+1}} = \prod_{i=0}^{k}\big(1-\frac{i}{n}\big) \leqslant \exp\big(-\frac{k^2}{2n}\big).$$

D'où :

$$\frac{n^{n-\beta_n}}{(n-\beta_n-1)!} \leqslant \frac{n^{n+1}}{n!}\exp\big(-\frac{\beta_n^2}{2n}\big).$$

4. Le calcul donne :

$$u_n = \big(n+1+\tfrac{1}{2}\big)\ln(n+1)-(n+1)-\ln((n+1)!)-\big((n+\tfrac{1}{2})\ln n-n-\ln(n!)\big)$$

$$u_n = \big(n+1+\tfrac{1}{2}\big)\ln(n+1)-1-\ln(n+1)-\big(n+\tfrac{1}{2}\big)\ln n = \big(n+\tfrac{1}{2}\big)\ln\big(1+\tfrac{1}{n}\big)-1$$

$$= \big(n+\tfrac{1}{2}\big)\big(\tfrac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}+o(\tfrac{1}{n^3})\big)-1 = \frac{1}{12n^2}+o(\tfrac{1}{n^2}) \underset{(\infty)}{\sim} \frac{1}{12n^2}$$

Ainsi, par la règle de Riemann $\sum u_n$ converge ; la suite $\ln(a_n)$ converge donc par télescopage ; ainsi (a_n) a une limite K strictement positive (c'est une exponentielle).

5. On passe à la limite quand n tend vers l'infini dans l'encadrement 3. b) en utilisant :

- $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{\beta_n^2}{2n} = -\dfrac{M^2}{2}$, d'après $M\sqrt{n}-1 < \beta_n \leqslant M\sqrt{n}$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{\beta_n^2}{2n}} = \mathrm{e}^{-\frac{M^2}{2}}$.

- $\lim\limits_{n\to+\infty} E(Y_n) = E(h(N))$ (admis) et par le théorème de transfert :

$$E(h(N)) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\frac{\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,dx = \int_{-M}^{0} -x\frac{\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,dx = \frac{1-\mathrm{e}^{-\frac{M^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\frac{1-\mathrm{e}^{-\frac{M^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \leqslant K \leqslant \frac{1-\mathrm{e}^{-\frac{M^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} + K\,\mathrm{e}^{-\frac{M^2}{2}}.$$

L'encadrement obtenu est valable pour tout $M > 0$. En faisant tendre M vers $+\infty$ on a $K = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$, d'où l'équivalence d'après le résultat de la question 4.

Exercice 3.7.

Soit a et c deux paramètres réels avec $c > 0$. Pour n entier supérieur ou égal à 2, soit $x_1, \ldots, x_n$ des réels fixés non tous nuls. On considère n variables aléatoires $Y_1, \ldots, Y_n$ mutuellement indépendantes telles que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, Y_i suit une loi normale avec $E(Y_i) = ax_i$ et $V(Y_i) = c$.

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note y_i une réalisation de Y_i et f_{Y_i} la densité continue sur $\mathbb{R}$ de Y_i.

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_*^+$, à valeurs réelles, telle que :

$$F(a,c) = \ln\Big(\prod_{i=1}^{n} f_{Y_i}(y_i)\Big).$$

1. Montrer que F est de classe C^2 sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_*^+$.

2. Montrer que F admet sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_*^+$ un unique point critique $(\widehat{a}, \widehat{c})$ que l'on déterminera.

3. a) Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a : $\sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i)^2 \geqslant \sum_{i=1}^{n}(y_i - \widehat{a}x_i)^2$.

b) En déduire que pour tout $(a, c) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_*^+$, on a : $F(a, c) - F(\widehat{a}, \widehat{c}) \leqslant 0$. Conclure.

4. On pose : $s_n = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$, $A_n = \frac{1}{s_n}\sum_{i=1}^{n} x_i Y_i$ et $C_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - A_n x_i)^2$.

a) Que représentent $\widehat{a}$ et $\widehat{c}$ pour A_n et C_n ?

b) Calculer $E(A_n)$ et $V(A_n)$.

c) On admet que la définition et les propriétés de la covariance de deux variables aléatoires discrètes s'appliquent aux variables aléatoires à densité. Montrer que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a : $\mathrm{Cov}(Y_i, A_n) = \frac{x_i}{s_n}\, c$.

En remarquant que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la variable aléatoire $(Y_i - A_n x_i)$ est centrée, calculer $E(C_n)$.

Solution :

1. On a : $f_{Y_i}(y_i) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi c}} \exp\big(-\frac{1}{2c}(y_i - ax_i)^2\big)$, donc

$$F(a, c) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi c) - \frac{1}{2c}\sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i)^2$$

Les fonctions polynomiales sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et les fonctions $c \mapsto 1/c$ et $c \mapsto \ln c$ sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}_*^+$, donc F est de classe C^2 sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_*^+$.

2. $\frac{\partial F}{\partial a}(a, c) = \frac{1}{c}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{a}{c}\, s_n$ et $\frac{\partial F}{\partial c}(a, c) = -\frac{n}{2c} + \frac{1}{2c^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i)^2$.

L'unique point critique $(\widehat{a}, \widehat{c})$ est donné par : $\widehat{a} = \frac{1}{s_n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ et $\widehat{c} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \widehat{a}x_i)^2$.

3. a) $\sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i)^2 - \sum_{i=1}^{n}(y_i - \widehat{a}x_i)^2 = -2a\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + a^2 s_n + 2\widehat{a}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \widehat{a}^2 s_n$

donc $\sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i)^2 - \sum_{i=1}^{n}(y_i - \widehat{a}x_i)^2 = s_n(a - \widehat{a})^2 \geqslant 0$, car $s_n > 0$.

Bilan : pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i)^2 \geqslant \sum_{i=1}^{n}(y_i - \widehat{a}x_i)^2$.

b) Compte tenu de l'expression de $\widehat{c}$, on a : $F(\widehat{a},\widehat{c}) = -\frac{n}{2}\big(1+\ln(2\pi\widehat{c})\big)$. La question a) permet d'écrire :

$$F(a,c)-F(\widehat{a},\widehat{c}) = \frac{n}{2}\Big(1+\ln\big(\frac{\widehat{c}}{c}\big)\Big) - \frac{1}{2c^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i-ax_i)^2 \leqslant \frac{n}{2}\Big(1+\ln\big(\frac{\widehat{c}}{c}\big)-\frac{\widehat{c}}{c}\Big) \leqslant 0$$

(car $u>0 \Longrightarrow \ln u \leqslant u-1$).

Bilan : $\forall\,(a,c)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_*^+, F(a,c)-F(\widehat{a},\widehat{c})\leqslant 0$. Le couple $(\widehat{a},\widehat{c})$ est le point de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_*^+$ en lequel F admet un maximum global.

4. a) Les réels $\widehat{a}$ et $\widehat{c}$ sont les réalisations des variables aléatoires A_n et C_n respectivement.

b) $E(A_n) = \dfrac{1}{s_n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i(ax_i) = \frac{s_n}{s_n}\,a = a.$

Par indépendance des Y_i, on a : $V(A_n) = \dfrac{1}{s_n^2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 c = \frac{c}{s_n}$.

c) $\forall\, i\in[\![1,n]\!]$,

$$\mathrm{Cov}(Y_i,A_n) = \mathrm{Cov}\,\big(Y_i,\frac{1}{s_n}\sum_{i=1}^{n}x_iY_i\big) = \frac{1}{s_n}\,\mathrm{Cov}(Y_i,x_iY_i) = \frac{x_i}{s_n}c.$$

D'autre part, $E(C_n) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} E\big((Y_i-A_nx_i)^2\big) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} V(Y_i-A_nx_i)$.

Or :

$$V(Y_i-A_nx_i) = V(Y_i)+x_i^2V(A_n)-2x_i\,\mathrm{Cov}(Y_i,A_n) = c+\frac{x_i^2c}{s_n}-\frac{2{x_i}^2c}{s_n}$$
$$= c-\frac{x_i^2c}{s_n}.$$

Par suite :

$$E(C_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\big(c-\frac{x_i^2c}{s_n}\big) = \frac{n-1}{n}\,c$$

Exercice 3.8.

Soit $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n,\ldots$ une suite de variables de Bernoulli indépendantes telles que :

$$\text{pour tout } n\in\mathbb{N}^*,\ P(\varepsilon_n=+1)=P(\varepsilon_n=-1)=1/2.$$

1. Calculer l'espérance $E\big((\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_n)^2\big)$ en fonction de n.

2. Soit $a\in\,]0,1[$ fixé.

a) Montrer l'inégalité $P(|\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_n|\geqslant an)\leqslant\dfrac{1}{a^2n}$.

b) Montrer que

$$P(|\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_n|\geqslant an) = \frac{1}{2^n}\sum_{\ell=0}^{n}\binom{n}{\ell}\mathbf{1}_{\{|2\ell-n|\geq an\}}$$

où $\mathbf{1}_{\{|2\ell-n|\geq an\}} = 1$ si ℓ satisfait $|2\ell-n|\geqslant an$ et 0 sinon.

c) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} \sum\limits_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} \mathbf{1}_{\{|2\ell-n|\geqslant an\}} = 0$.

3. Soit N une variable aléatoire suivant la loi de Poisson, de paramètre $\theta > 0$, indépendante de la suite $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$. Calculer, en fonction de θ, l'espérance :

$$E\Big(\big(\sum_{n=1}^{N+1} \varepsilon_n\big)^2\Big).$$

Solution :

1. On a $E(\varepsilon_k) = 0$ et $V(\varepsilon_k) = 1$. D'après l'hypothèse d'indépendance :

$$V(\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n) = V(\varepsilon_1) + \cdots + V(\varepsilon_n) = n$$

et, puisque les variables aléatoires sont centrées :

$$E\big((\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n)^2\big) = V(\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n) = n.$$

2. a) D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$P(|\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n| \geqslant an) \leqslant \frac{V(\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n)}{a^2 n^2} = \frac{1}{a^2 n}.$$

b) Si parmi les variables aléatoires $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ il y en a exactement ℓ qui valent 1 (les autres valant -1), alors on a : $\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n = \ell - (n-\ell) = 2\ell - n$. Comme il y a $\binom{n}{\ell}$ façons de choisir les places des 1 et que les événements du type $\{\varepsilon_1 = \pm 1, \ldots, \varepsilon_n = \pm 1\}$ sont tous de probabilité $1/2^n$, on en déduit que :

$$P(\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n = 2\ell - n) = \frac{1}{2^n}\binom{n}{\ell}$$

Par suite :

$$\begin{aligned} P(|\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n| \geqslant an) &= \sum_{\ell=0}^{n} P(\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n = 2\ell - n)\, \mathbf{1}_{\{|2\ell-n|\geq an\}} \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} \mathbf{1}_{\{|2\ell-n|\geq an\}}. \end{aligned}$$

c) D'après la question précédente, quand n tend vers l'infini, la limite de cette expression vaut 0.

3. Suivant les valeurs de N, nous avons en vertu de l'indépendance de N et de la suite (ε_n), la décomposition :

$$E\big(\big(\sum_{n=1}^{N+1} \varepsilon_n\big)^2\big) = E\Big(\sum_{k=0}^{\infty} \big(\sum_{n=1}^{k+1} \varepsilon_n\big)^2 \mathbf{1}_{\{N=k\}}\Big) = \sum_{k=0}^{\infty} E\big(\big(\sum_{n=1}^{k+1} \varepsilon_n\big)^2\big) P(N=k)$$

Par ailleurs, comme $E\big(\big(\sum\limits_{n=1}^{k} \varepsilon_n\big)^2\big) = \sum\limits_{n=1}^{k} V(\epsilon_n) = k$, on obtient :

$$E\big(\big(\sum_{n=1}^{N+1} \varepsilon_n\big)^2\big) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, \frac{\theta^n}{n!} \mathrm{e}^{-\theta} = \theta + 1.$$

Exercice 3.9.

Soit $n \geqslant 1$ un entier naturel. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telles que $X(\Omega) = [\![1, n+1]\!]$ et $Y(\Omega) = [\![1, n+1]\!]$.

Pour tout $(i, j) \in [\![1, n+1]\!]^2$, on pose

$$a_{i,j} = P((X = j) \cap (Y = i)) \text{ et } b_{i,j} = P_{(X=j)}(Y = i).$$

1. Dans cette première partie, on suppose qu'il existe un réel λ tel que :

$$\forall\, (i, j) \in [\![1, n+1]\!]^2, a_{i,j} = \lambda \binom{n}{i-1} \binom{n}{j-1}.$$

a) Calculer la valeur de λ.

b) Déterminer les lois marginales de X et de Y.

c) Montrer que les variables X et Y sont indépendantes.

d) Soit $Z = X - 1$. Reconnaître dans la loi de Z une loi usuelle. En déduire l'espérance et la variance de X.

2. On note $B \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice dont le coefficient de la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne est $b_{i,j}$.

a) Calculer la dimension de l'image et celle du noyau de B.

b) Calculer B^p, pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$.

c) Déterminer l'ensemble des valeurs propres de B. La matrice B est-elle diagonalisable ?

3. On suppose à présent que :

$$\forall\, (i, j) \in [\![1, n+1]\!]^2, a_{i,j} = \begin{cases} \alpha & \text{si } |i + j - n - 2| = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

a) Déterminer α.

b) Déterminer les lois marginales de X et de Y. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

c) On note $B \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice dont le coefficient de la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne est $b_{i,j}$. Écrire B dans le cas particulier $n = 4$.

Solution :

1. a) Pour que les $(a_{i,j})$ définissent une loi conjointe, il faut que pour tout $(i, j) \in [\![1, n+1]\!]^2$, $a_{i,j} \geqslant 0$ et $1 = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} a_{i,j} = \lambda \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n}{i-1} \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1}$.

En utilisant la formule $\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n$, on trouve : $1 = \lambda . 2^n . 2^n$. Ainsi, $\lambda = 2^{-2n}$.

b) On a $X(\Omega) = [\![1, n+1]\!]$ et pour tout $j \in [\![1, n+1]\!]$,

$$P(X = j) = \sum_{i=1}^{n+1} a_{i,j} = \lambda \binom{n}{j-1} \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n}{i-1} = 2^{-n} \binom{n}{j-1}.$$

Par symétrie, Y suit la même loi ($X - 1$ et $Y - 1$ suivent la loi $\mathcal{B}(n, 1/2)$).

c) Pour tout $(i, j) \in [\![1, n+1]\!]^2$:

$$P(X = j)P(Y = i) = 2^{-n} \binom{n}{j-1} 2^{-n} \binom{n}{i-1} = P(X = j \cap Y = i).$$

Les variables X et Y sont donc indépendantes.

d) On l'a dit : $Z \hookrightarrow \mathcal{B}(n, 1/2)$. On en déduit :

$$E(X) = E(Z+1) = E(Z) + 1 = \frac{n}{2} + 1 \text{ et } V(X) = V(Z+1) = V(Z) = \frac{n}{4}.$$

2. a) Comme X et Y sont indépendantes, pour tout $(i, j) \in [\![1, n+1]\!]^2$,

$$b_{i,j} = P_{(X=j)}(Y = i) = P(Y = i) = 2^{-n} \binom{n}{i-1}.$$

On en déduit l'écriture de la matrice B. On remarque en particulier que toutes les colonnes de B sont identiques. Par suite, $\mathrm{Im}(B)$ est de dimension 1. Par le théorème du rang, $\mathrm{Ker}(B)$ est de dimension n.

b) On pose $B^2 = [c_{i,j}]$. Pour tout $(i, j) \in [\![1, n+1]\!]^2$, on a :

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n+1} b_{i,k} b_{k,j} = 2^{-2n} \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{i-1} \binom{n}{k-1} = 2^{-n} \binom{n}{i-1} = b_{i,j}$$

D'où : $B^2 = B$. Par suite, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $B^p = B$.

c) La question précédente montre que $P(X) = X^2 - X$ est un polynôme annulateur de B. Les seules valeurs propres possibles pour B sont donc 0 et 1. Comme $E_0 = \mathrm{Ker}(B)$ est de dimension $n > 0$, 0 est bien valeur propre de B. On remarque d'autre part que comme $B^2 = B$, on a $BX = X$, où X est le vecteur correspondant à la première colonne de B. Ainsi, 1 est également valeur propre de B et $E_1 = \mathrm{Ker}(B - I_{n+1})$ est de dimension au moins égale à 1. Il s'ensuit que $\dim(E_0) + \dim(E_1) \geqslant n+1$, donc $\dim(E_0) + \dim(E_1) = n+1$. Ainsi, la matrice B est diagonalisable.

On peut aussi dire que B ne vaut ni 0 ni I, donc représente un projecteur non trivial.

3. a) Pour tout $(i, j) \in [\![1, n+1]\!]^2$, on doit avoir $a_{i,j} \geqslant 0$ et $1 = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} a_{i,j} = N\alpha$, où N désigne le nombre de couples $(i, j) \in [\![1, n+1]\!]^2$ tel que $|i + j - n - 2| = 1$. Facilement $N = 2n$, donc $\alpha = \frac{1}{2n}$.

b) $\forall\, j \in [\![1, n+1]\!]$, $P(X = j) = \sum_{i=1}^{n+1} a_{i,j}$.

Si $j \in [\![2, n]\!]$, on a donc $P(X = j) = a_{n+3-j,j} + a_{n+1-j,j} = \alpha + \alpha = \frac{1}{n}$.

D'autre part, $P(X = 1) = P(X = n+1) = \frac{1}{2n}$.

On remarque que $P(X=1)P(Y=1)=\dfrac{1}{4n^2}$ alors que $P(X=1\cap Y=1)=0$. Ainsi, X et Y ne sont pas indépendantes.

c) La matrice B s'écrit : $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 3.10.

Pour tout entier naturel n, on définit l'ensemble $\mathcal{D}_n$ des densités de probabilité $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ nulles sur $\mathbb{R}^-$ et telles que $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^n f(x)dx$ converge. On note alors $m_n(f)$ la valeur de cette intégrale. On note enfin : $\mathcal{D}_\infty=\bigcap_{k=0}^{+\infty}\mathcal{D}_k$

1. Soit n un entier naturel. Déterminer tous les couples de réels positifs (α,β) tels que :

$$f_1 \text{ et } f_2\in\mathcal{D}_n \Longrightarrow \alpha f_1+\beta f_2\in\mathcal{D}_n$$

2. a) Soit $f\in\mathcal{D}_n$.
Montrer que pour tout entier k tel que $0\leqslant k\leqslant n$, on a :

$$f\in\mathcal{D}_k \text{ et } 0<m_k(f)\leqslant 1+m_n(f).$$

b) Soit la fonction $c:x\in\mathbb{R}\mapsto\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\times\dfrac{1}{x^2+1} & \text{si } x>0\\ 0 & \text{si } x\leqslant 0\end{cases}$. Montrer que $c\in\mathcal{D}_0\setminus\mathcal{D}_1$.

Dans toute la suite, on note $T:\mathcal{D}_1\to\mathcal{D}_0$, l'application définie pour tout $f\in\mathcal{D}_0$ par $T(f)(x)=\dfrac{x}{m_1(f)}f$.

3. On note $f_{\mathcal{E},\lambda}$ la densité de probabilité d'une loi exponentielle de paramètre $\lambda>0$, nulle sur $\mathbb{R}^-$ et continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que $f_{\mathcal{E},\lambda}\in\mathcal{D}_\infty$ et calculer $T(f_{\mathcal{E},\lambda})$.

4. Soit α et β deux réels positifs tels que $\alpha+\beta=1$ et $f,g\in\mathcal{D}_1$. Exprimer $T(\alpha f+\beta g)$ en fonction de $T(f)$ et de $T(g)$.

Soit $f_0\in\mathcal{D}_\infty$. On définit pour tout entier $n\geqslant 0$: $f_{n+1}=T(f_n)$.

5. Dans le cas général, exprimer f_n en fonction de f_0 et $m_n(f)$ puis calculer et reconnaître f_n lorsque f_0 est la fonction $f_{\mathcal{E},\lambda}$.

6. Soit X et Y deux variables aléatoires continues de densités respectives $f\in\mathcal{D}_1$ pour X et $T(f)$ pour Y.
On note F et G leurs fonctions de répartition respectives.

Comparer F et G. Dans quelle portion du plan est situé l'ensemble des points $\{(F(t), G(t)), t \in \mathbb{R}\}$?

Solution :

1. Comme $\alpha \geqslant 0$ et $\beta \geqslant 0$, la seule condition à réaliser est $\int_0^{+\infty} \alpha f_1 + \beta f_2 = 1$. Les couples solutions sont : $(\alpha, 1-\alpha), \alpha \in [0,1]$ et $(\mathcal{D}_n, +, .)$ n'est pas un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

2. a) Soit $f \in \mathcal{D}_n$. Comme pour $x \geqslant 1$, on a $k \leqslant n \implies x^k f(x) \leqslant x^n f(x)$, l'existence du moment d'ordre n entraîne celle du moment d'ordre k.
On a $\int_0^{+\infty} f(x)dx = 1$, donc il existe un intervalle non vide $[a,b] \subset \mathbb{R}_+$ sur lequel $f > 0$ et $0 < \int_a^b x^k f(x)\,dx \leqslant \int_0^{+\infty} x^k f(x)\,dx$, donc $m_k > 0$. Enfin :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} x^k f(x)dx &\leqslant \int_0^1 f(x)dx + \int_1^{+\infty} x^k f(x)dx \\ &\leqslant \int_0^{+\infty} f(x)dx + \int_0^{+\infty} x^n f(x)dx.\end{aligned}$$

Donc $0 < m_k \leqslant 1 + m_n$.

b) La fonction $c : x \mapsto \frac{2}{\pi} \times \frac{1}{x^2+1}\,\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$ est continue et positive et :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} c(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \left[\tfrac{2}{\pi}\operatorname{Arc\,tan} x\right]_0^{\to+\infty} = 1.$$

En revanche $x \times c(x) \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{2}{\pi} \times \frac{1}{x}$ et l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} xc(x)\,dx$ diverge, donc $c \in \mathcal{D}_0$, mais $c \notin \mathcal{D}_1$.

3. On a $f \in \mathcal{D}_1 \implies m_1 > 0 : T(f)$ est bien défini et on vérifie aisément que $T(f)$ appartient bien à $\mathcal{D}_0$.
Or $f_{\mathcal{E},\lambda} : x \mapsto \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+$.
Soit $k \in \mathbb{N}, x^k f_{\mathcal{E},\lambda}(x) = o\big(\frac{1}{x^2}\big)$ au voisinage de $+\infty$, d'où l'existence de m_n.
Donc $f_{\mathcal{E},\lambda} \in \mathcal{D}_\infty$ et comme $m_1 = \frac{1}{\lambda} : T(f_{\mathcal{E},\lambda}) = \lambda^2 x \mathrm{e}^{-\lambda x}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}$.

4. Soit $\alpha \geqslant 0$ et $\beta \geqslant 0$ tels que $\alpha + \beta = 1$ et $f, g \in \mathcal{D}_1$. On a :

$$T(\alpha f + \beta g) = \frac{\alpha m_1(f)}{\alpha m_1(f) + \beta m_1(g)} T(f) + \frac{\beta m_1(g)}{\alpha m_1(f) + \beta m_1(g)} T(g)$$

5. On a : $f_1 = \frac{x}{m_1(f)} f_0$. Soit $n \geqslant 0$, on suppose que $f_n = \frac{x^n}{m_n(f)} f_0$; alors

$$m_1(f_n) = \int_0^{+\infty} x f_n(x)dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{m_n(f)} f_0(x)dx = \frac{m_n + 1(f)}{m_n(f)} \text{ et :}$$

$$f_{n+1} = \frac{x m_n(f)}{m_{n+1}(f)} \times \frac{x^n}{m_n(f)} f_0 = \frac{x^{n+1}}{m_{n+1}(f)} f_0.$$

Pour la loi exponentielle de paramètre λ :

$$m_n(f) = \int_0^{+\infty} x^n \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda^n} \int_0^{+\infty} u^n \mathrm{e}^{-u} du = \frac{n!}{\lambda^n}.$$

et $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n!} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(x)$, qui est une densité de la loi $\gamma(\lambda, n+1)$

6. Soit $f \in \mathcal{D}_1$,

$$F(x) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x) \int_0^x f(t)dt \text{ et } T(f) \in \mathcal{D}_0,\ G(x) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+(x)} \int_0^x \frac{t}{m_1(f)} f(t)dt.$$

$\rightarrow$ Si $x \leqslant m_1(f)$, on a :$F(x) - G(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{m_1 - t}{m_1} f(t)dt \geqslant 0$ car $0 \leqslant t \leqslant x \leqslant m_1$.

$\rightarrow$ Si $x \geqslant m_1(f) > 0$, on a :

$$F(x) - G(x) = \big(1 - \int_x^{+\infty} f(t)dt\big) - \big(\frac{1}{m_1}[m_1 - \int_x^{+\infty} t f(t)dt]\big)$$

$$= \int_x^{+\infty} \frac{t - m_1}{m_1} f(t)dt \geqslant 0. \text{ D'où } F \geqslant G.$$

On a ainsi : $\forall t \in \mathbb{R}, 0 \leqslant G(t) \leqslant F(t) \leqslant 1$: la courbe est située dans le triangle de sommets O, A, B, avec $A : (1, 0)$ et $B : (1, 1)$.

Exercice 3.11.

Une grenouille se déplace par bonds mutuellement *indépendants de longueur fixe* 1 en restant dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On note (X_n, Y_n) ses coordonnées après n bonds et $D_n = \sqrt{X_n^2 + Y_n^2}$ sa distance à l'origine. Au départ de l'histoire elle est en O, donc : $X_0 = Y_0 = 0$.

1. Dans cette question uniquement, la grenouille reste sur la droite $(O, \vec{i})$ (donc $\forall n \geqslant 0, Y_n = 0$). Elle fait des bonds $x_i = X_i - X_{i-1}, (i \geqslant 1)$ successifs vers la droite (*i.e.* tels que $x_i = 1$) avec la probabilité constante $p \in [0, 1]$ ou dans l'autre sens (*i.e.* $x_i = -1$) avec la probabilité $q = 1 - p$.

a) Calculer la probabilité qu'elle soit revenue à son point de départ après $2n$ bonds.

b) Déterminer la loi de la variable aléatoire D_n.

c) Déterminer deux réels a et b tels que $z_i = ax_i + b$ suive une loi de Bernoulli pour tout $i \geqslant 1$. On note $Z_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} z_i$. Exprimer X_n à l'aide de Z_n puis calculer les moments d'ordre 1 et 2 des variables aléatoires Z_n et X_n.

2. La grenouille s'enhardit : elle effectue des bonds dans une direction quelconque. On note θ_n l'angle que fait le $n^{\text{ème}}$ saut avec l'axe $(O\overrightarrow{i})$. On suppose que pour tout n, θ_n suit la uniforme sur $[0, 2\pi]$.

a) Exprimer X_n et Y_n en fonction des θ_i, $1 \leqslant i \leqslant n$ et calculer leurs moments d'ordre 1 et 2.

b) Montrer que : $\begin{cases} E(X_{n-1}Y_{n-1}^2\cos(\theta_n)) = E(X_{n-1}^2Y_{n-1}\sin(\theta_n)) = 0 \\ E(Y_{n-1}\cos^2(\theta_n)\sin(\theta_n)) = E(X_{n-1}\cos(\theta_n)\sin^2(\theta_n)) = 0 \end{cases}$

c) En déduire $\text{Cov}(X_n, Y_n)$ et $\text{Cov}(X_n^2, Y_n^2)$. Les variables X_n et Y_n sont-elles indépendantes ?

Solution :

1. a) $[X_{2n} = 0]$ signifie qu'il y a eu n sauts à droite et n à gauche. Donc par application du schéma binomial :

$$P(X_{2n} = 0) = \binom{2n}{n} p^n q^n = \frac{2n!}{n!n!}\, p^n q^n$$

b) On a $X_n(\Omega) \subset [\![-n, n]\!]$, et $[X_n = k]$ est réalisé si et seulement si le nombre de sauts à droite (nsd) est égal au nombre de sauts à gauche (nsg) $+k$, et comme $nsg + nsd = n$ on en déduit : $nsg = \dfrac{n-k}{2}$ et $nsd = \dfrac{n+k}{2}$. Ces 2 quantités doivent être des entiers d'où :

$$P(X_n = k) = \begin{cases} \binom{n}{\frac{n+k}{2}} p^{\frac{n+k}{2}} q^{\frac{n-k}{2}} & \text{si } k \text{ et } n \text{ de même parité} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Par conséquent $D_n(\Omega) \subset [\![0, n]\!]$ et :

- $P(D_n = 0) = P(X_n = 0) = \begin{cases} \binom{n}{\frac{n}{2}} p^{\frac{n}{2}} q^{\frac{n}{2}} & \text{si } n \text{ pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$.
- Pour $0 < k \leqslant n$: $P(D_n = k) = P(X_n = k) + P(X_n = -k)$, soit par symétrie des coefficients binomiaux :

$$P(D_n = k) = \begin{cases} \binom{n}{\frac{n+k}{2}} \left(p^{\frac{n+k}{2}} q^{\frac{n-k}{2}} + p^{\frac{n-k}{2}} q^{\frac{n+k}{2}}\right) & \text{si } k \text{ et } n \text{ de même parité} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

c) $ax_i + b$ prend les valeurs $b - a$ et $b + a$, on peut donc prendre $a = b = \dfrac{1}{2}$ et $z_i = ax_i + b$ suit alors la loi de Bernoulli de paramètre p.

On a $X_n = \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} (2z_i - 1) = 2Z_n - n$ avec $Z_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$. Ainsi :

$$E(X_n) = 2E(Z_n) - n = 2np - n\,;\; V(X_n) = 4V(Z_n) = 4npq$$

2. a) On a $X_n = \sum_{i=1}^{n} \cos(\theta_i)$ et $Y_n = \sum_{i=1}^{n} \sin(\theta_i)$. Par le théorème de transfert :

$E(\cos(\theta_i)) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi}\cos(\theta)d\theta = 0$ et de même $E(\sin(\theta_i)) = 0$. D'où :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, E(X_n) = E(Y_n) = 0$$

De même :

$V(\cos(\theta_i)) = E(\cos^2(\theta_i)) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi}\cos^2(\theta)d\theta = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} (1+\cos(2\theta))\,d\theta = \frac{1}{2}$;

d'où, par indépendance $V(X_n) = \dfrac{n}{2}$. De la même façon $V(Y_n) = \dfrac{n}{2}$

b) Les variables aléatoires $X_{n-1}Y_{n-1}^2$ et $X_{n-1}^2Y_{n-1}$ sont des fonctions des θ_i pour $i \in [\![1, n-1]\!]$, donc sont indépendantes de θ_n. Ainsi :

$$\begin{cases} E(X_{n-1}Y_{n-1}^2\cos(\theta_n)) = E(X_{n-1}Y_{n-1}^2)E(\cos(\theta_n)) = 0 \\ E(X_{n-1}^2Y_{n-1}\sin(\theta_n)) = 0 \end{cases}$$

On a : $E(\cos^2(\theta_n)\sin(\theta_n)) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\sin\theta\,d\theta = -\frac{1}{6\pi}\big[\cos^3\theta\big]_0^{2\pi} = 0$, et de la même façon : $E(\cos(\theta_n)\sin^2(\theta_n)) = 0$. Donc encore par indépendance :

$$E(Y_{n-1}\cos^2(\theta_n)\sin(\theta_n)) = 0 \text{ et } E(X_{n-1}\cos(\theta_n)\sin^2(\theta_n)) = 0.$$

c) On a :

$\mathrm{Cov}(X_n, Y_n) = \displaystyle\sum_{1\le i,j\le n} \mathrm{Cov}(\cos(\theta_i), \sin(\theta_j)) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Cov}(\cos(\theta_i), \sin(\theta_i))$

Or $\mathrm{Cov}(\cos\theta_i, \sin\theta_i) = E(\cos\theta_i\sin\theta_i) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos\theta\sin\theta\,d\theta = 0$ et donc $\mathrm{Cov}(X_n, Y_n) = 0$.

On a : $E(X_n^2Y_n^2) = E\big((X_{n-1} + \cos(\theta_n))^2(Y_{n-1} + \sin(\theta_n))^2\big)$

On développe, on utilise la linéarité de l'espérance, l'indépendance de θ_n avec X_{n-1} et Y_{n-1}, et les résultats précédents. Il reste :

$$\begin{aligned} E(X_n^2Y_n^2) &= E(X_{n-1}^2Y_{n-1}^2) + \frac{n-1}{2} + E(\cos^2(\theta_n)\sin^2(\theta_n)) \\ &= E(X_{n-1}^2Y_{n-1}^2) + \frac{n-1}{2} + \frac{1}{8}, \text{ et en sommant :} \\ E(X_n^2Y_n^2) &= \frac{n(n-1)}{4} + \frac{n}{8} = \frac{n(2n-1)}{8} \\ \mathrm{Cov}(X_n^2, Y_n^2) &= E(X_n^2Y_n^2) - E(X_n^2)E(Y_n^2) = -\frac{n}{8} \neq 0 \end{aligned}$$

Si les variables X_n et Y_n étaient indépendantes il en serait de même de X_n^2 et de Y_n^2, or celles-ci sont corrélées, donc X_n et Y_n ne sont pas indépendantes.

Exercice 3.12.

Soit X une variable aléatoire prenant un nombre fini de valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ avec les probabilités respectives $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

On définit la fonction φ_X sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}^*, \varphi_X(t) = \frac{1}{t}\ln(E(\mathrm{e}^{tX}))$$

où E désigne l'opérateur espérance.

1. Montrer que φ_X est ainsi bien définie sur $\mathbb{R}^*$ et prolongeable par continuité en 0, en posant $\varphi_X(0) = E(X)$.
On note encore φ_X la fonction ainsi prolongée.

2. Démontrer que φ_X est dérivable en 0 et calculer $\varphi'_X(0)$ à l'aide de la variance de X.

3. a) Montrer que pour tout $u \leqslant 0$, on a : $\mathrm{e}^u \leqslant 1 + u + \frac{1}{2}u^2$.

b) Montrer que si X ne prend que des valeurs négatives ou nulles, on a :

$$\forall\, t \geqslant 0, \varphi_X(t) \leqslant E(X) + \frac{t}{2}E(X^2)$$

4. a) Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note f_i la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{tx_i}$. Montrer que la famille $(f_1, \ldots, f_n)$ est libre.

b) En déduire que deux variables discrètes finies X et Y ont la même loi si et seulement si les fonctions φ_X et φ_Y sont égales.

5. Montrer que si X et Y sont des variables discrètes finies indépendantes, alors $\varphi_{X+Y} = \varphi_X + \varphi_Y$.

6. Montrer que φ_X est impaire si et seulement si X est une variable symétrique, c'est-à-dire telle que X et $-X$ ont la même loi.

Solution :

1. e^{tX} ne prend que des valeurs strictement positives (en nombre fini) donc son espérance existe et est strictement positive, ce qui prouve que φ_X est bien définie sur $\mathbb{R}^*$.
On a $E(\mathrm{e}^{tX}) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{tx_i} p_i$. Or : $\mathrm{e}^{tx_i} = 1 + tx_i + o(t)$, donc

$$E(\mathrm{e}^{tX}) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{tx_i} p_i = \sum_{i=1}^{n} p_i + \sum_{i=1}^{n} tx_i p_i + o(t) = 1 + \sum_{i=1}^{n} tx_i p_i + o(t)$$

Ainsi :

$$\varphi_X(t) = \frac{1}{t} \ln(1 + \sum_{i=1}^{n} tx_i p_i + o(t)) \underset{(t\to 0)}{\sim} \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{n} tx_i p_i$$

et $\varphi_X(t) \underset{(t\to 0)}{\longrightarrow} \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = E(X)$.

2. On poursuit les développements asymptotiques :

$$\begin{aligned} E(\mathrm{e}^{tX}) &= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{tx_i} p_i = 1 + \sum_{i=1}^{n} tx_i p_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} t^2 x_i^2 p_i + o(t^2) \\ &= 1 + E(X)t + \frac{E(X^2)}{2} t^2 + o(t^2) \end{aligned}$$

et avec $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$, il vient :

$$\begin{aligned}\varphi_X(t) &= \frac{1}{t}\ln(1 + E(X)t + \frac{E(X^2)}{2}t^2 + o(t^2)) \\ &= E(X) + \frac{E(X^2) - E(X)^2}{2}t + o(t)\end{aligned}$$

Ainsi φ_X est dérivable en 0, avec $\varphi'_X(0) = \frac{1}{2}V(X)$.

3. a) la fonction $u \mapsto \mathrm{e}^u - 1 - u - \frac{1}{2}u^2$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^-$ et $f'(u) = \mathrm{e}^u - 1 - u$, $f''(u) = \mathrm{e}^u - 1 \leqslant 0$. Avec $f'(0) = 0$, on en déduit que f' est positive sur $\mathbb{R}^-$ et comme $f(0) = 0$, f est bien négative sur $\mathbb{R}^-$.

b) On peut donc écrire dans ce cas :

$E(\mathrm{e}^{tX}) = \sum \mathrm{e}^{tx_i}p_i \leqslant (1 + t\sum x_i + \frac{1}{2}t^2\sum x_i^2)p_i = 1 + tE(X) + \frac{1}{2}t^2E(X^2)$

et donc :

$$\varphi_X(t) \leqslant \frac{1}{t}\ln(1 + tE(X) + \frac{1}{2}t^2E(X^2)) \leqslant E(X) + \frac{t}{2}E(X^2))$$

Car on sait que $\ln(1+u) \leqslant u$.

4. a) L'application $f \mapsto f'$ est un endomorphisme de l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et l'application $t \mapsto \mathrm{e}^{tx_i}$ est propre pour la valeur propre x_i, d'où la liberté demandée.

b) $\star$ Si X et Y ont même loi, il est clair que $\varphi_X = \varphi_Y$.

$\star$ Réciproquement supposons que X et Y soient discrètes finies telles que $\varphi_X = \varphi_Y$. Quitte à ajouter des valeurs prises avec une probabilité nulle, on peut supposer que $X(\Omega) = Y(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ et on pose $p_i = P(X = x_i), q_i = P(Y = x_i)$. On a alors $\forall\, t \neq 0, \sum_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{tx_i}p_i = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{tx_i}q_i$, résultat bien entendu valable pour $t = 0$. La liberté précédente donne $\forall\, i, p_i = q_i$: X et Y ont même loi.

5. Si X et Y sont indépendantes, il en est de même de e^{tX} et e^{tY} et :

$$E(\mathrm{e}^{t(X+Y)}) = E(\mathrm{e}^{tX}\mathrm{e}^{tY}) = E(\mathrm{e}^{tX})E(\mathrm{e}^{tY})$$

D'où, par passage au logarithme : $\varphi_{X+Y} = \varphi_X + \varphi_Y$.

6. φ_X impaire $\Longleftrightarrow \varphi_X(t) = -\varphi_X(-t)$, or le retour à la relation de définition donne : $-\varphi_X(-t) = \varphi_{-X}(t)$

Donc φ_X impaire $\Longleftrightarrow \varphi_X = \varphi_{-X} \Longleftrightarrow X$ et $-X$ ont même loi (résultat 4. b)).

Exercice 3.13.

On note $VP(\lambda, \theta)$ la loi de Pareto de paramètres $\lambda > 0, \theta > 0$ et 0 , c'est-à-dire la loi de densité f définie par : $f(x) = \frac{\lambda}{\theta}\left(\frac{\theta}{x}\right)^{\lambda+1}$ si $x > \theta$, et $f(x) = 0$ sinon.

Un phénomène économique suit une loi $VP(\lambda, \theta)$, θ étant connu et λ un paramètre que l'on veut estimer. On dispose pour cela d'un échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ de variables aléatoires indépendantes suivant cette loi.

On pose $T = \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{X_i}{\theta}\right)$ et $\widehat{\lambda} = \frac{n}{T}$.

1. Soit X une variable aléatoire suivant la loi $VP(\lambda, \theta)$ et $Y = \ln\left(\frac{X}{\theta}\right)$.

   a) Déterminer la fonction de répartition F_X de X .

   b) Déterminer, lorsqu'elles existent, l'espérance et la variance de X .

   c) Montrer que Y suit une loi Γ dont on précisera les paramètres.

2. Quelle est la loi de T ? En donner une densité.

3. Calculer l'espérance et la variance de $\widehat{\lambda}$.

4. Déduire de $\widehat{\lambda}$ un estimateur $\widehat{\lambda_1}$ sans biais de λ. L'estimateur $\widehat{\lambda_1}$ est-il convergent ?

5. On admet que la suite de variables aléatoires $n \mapsto Z_n = \frac{\sqrt{n}(\widehat{\lambda} - \lambda)}{\lambda}$ converge en loi vers la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$, et on rappelle que la fonction de répartition Φ de la loi normale centrée réduite vérifie $\Phi(1,96) \simeq 0{,}975$.

En utilisant la loi $\mathcal{N}(0,1)$ comme approximation de la loi de Z_n, donner, en fonction de n (supposé assez grand) et de la valeur observée λ_0 de $\widehat{\lambda}$, un intervalle de confiance à 95% de λ.

Solution :

1. a) Pour $x \leqslant \theta$, $F_X(x) = 0$ et pour $x > \theta$, $F_X(x) = 1 - \left(\frac{\theta}{x}\right)^{\lambda}$

   b) La variable aléatoire X admet une espérance si et seulement si $\lambda > 1$ et dans ce cas : $E(X) = \frac{\lambda\theta}{\lambda - 1}$.
De même, la variable aléatoire X admet une variance si et seulement si $\lambda > 2$ et alors : $V(X) = \frac{\lambda\theta^2}{(\lambda-2)(\lambda-1)^2}$.

   c) La variable aléatoire Y prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall\, x > 0, F_Y(x) = P(X \leqslant \theta.\mathrm{e}^x) = F_X(\theta.\mathrm{e}^x) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}$$

Donc Y suit la loi exponentielle de paramètre λ, c'est-à-dire la loi Γ de paramètres $\frac{1}{\lambda}$ et 1.

2. La variable aléatoire T est la somme de n variables aléatoires indépendantes de même loi $\Gamma(\frac{1}{\lambda},1)$, donc T suit la loi $\Gamma(\frac{1}{\lambda},n)$. Une densité f_T de T est donnée par :

$$\forall\, t \leqslant 0, f_T(x) = 0,\ \forall\, t > 0, f_T(x) = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda x} x^{n-1} \lambda^n}{(n-1)!}$$

3. $\star$ On a $\widehat{\lambda} = \frac{n}{T}$, donc sous réserve d'existence :

$$E(\widehat{\lambda}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n}{x} f_T(x)\, dx = \frac{n\lambda}{n-1} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\lambda x} x^{n-2} \lambda^{n-1}}{(n-2)!}\, dx$$

On reconnaît l'intégrale d'une densité d'une variable suivant la loi $\Gamma(\frac{1}{\lambda}, n-1)$, ce qui prouve que l'espérance existe et vaut :

$$E(\widehat{\lambda}) = \frac{n\lambda}{n-1}$$

$\star$ En procédant de la même façon on montre que $\widehat{\lambda}$ admet un moment d'ordre 2 valant $\frac{n^2\lambda^2}{(n-1)(n-2)}$, donc une variance valant : $V(\widehat{\lambda}) = \frac{n^2\lambda^2}{(n-1)^2(n-2)}$

4. $\widehat{\lambda}_1 = \frac{n-1}{n}\widehat{\lambda}$ vérifie $E(\widehat{\lambda}_1) = \lambda$ et $V(\widehat{\lambda}_1) = \frac{\lambda^2}{n-2}$. Cette variance est de limite nulle lorsque n tend vers l'infini, donc $\widehat{\lambda}_1$ est un estimateur sans biais et convergent de λ.

5. En approchant la loi de Z par la loi normale centrée réduite, on obtient :

$$P(-1,96 \leqslant \frac{\sqrt{n}(\widehat{\lambda} - \lambda)}{\lambda} \leqslant 1,96) = 0,95$$

C'est-à-dire : $P(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1,96}\widehat{\lambda} \leqslant \lambda \leqslant \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}-1,96}\widehat{\lambda}) = 0,95$

On obtient donc comme intervalle de confiance pour λ, au niveau de confiance $0,95$:

$$\big[\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1,96}\lambda_0, \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}-1,96}\lambda_0\big]$$

Exercice 3.14.

Soit α et λ deux réels strictement positifs et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \lambda\alpha x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\lambda x^\alpha} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que f est une fonction de densité.

On note X une variable aléatoire admettant f pour densité. On dit alors que X suit la loi $W(\alpha,\lambda)$)

2. Calculer la fonction de répartition F de X, ainsi que la fonction r définie sur $\mathbb{R}^+$ par $r(x) = \frac{f(x)}{1-F(x)}$.

3. Dans cette question, on suppose que $\alpha > 1$ et que X suit la loi $W(\alpha, \lambda)$.

a) Montrer que la fonction r est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et vérifie $r(0) = 0$

b) Montrer que la variable aléatoire $Y = r(X)$ suit la loi $W(\alpha', \lambda')$ avec $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha'} = 1$. Exprimer λ' en fonction de λ, α.

4. Réciproquement, on suppose que la fonction r vérifie les deux propriétés :

• la fonction est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et vérifie $r(0) = 0$,
• la variable aléatoire $Y = r(X)$ suit la loi $W(\alpha', \lambda')$, avec $\alpha' > 1$.

Montrer que X suit la loi $W(\alpha, \lambda)$, le lien entre (α, λ) et (α', λ') étant donné dans la question précédente.

Solution :

1. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sur $\mathbb{R}^-$. Elle est positive sur $\mathbb{R}$ et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_0^{+\infty} \lambda\alpha t^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\lambda x^\alpha} dt = \big[-\mathrm{e}^{-\lambda x^\alpha} \big]_0^\infty = 1$$

2. Pour $x \leqslant 0$, on a $F(x) = 0$ et pour $x > 0$,

$$F(x) = \int_0^x \lambda\alpha t^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\lambda x^\alpha} dt = \big[-\mathrm{e}^{-\lambda x^\alpha} \big]_0^x = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x^\alpha}$$

Et donc, pour $x > 0$: $r(x) = \dfrac{f(x)}{1 - F(x)} = \lambda\alpha x^{\alpha-1}$

3. a) On suppose que $\alpha > 1$, ce qui fait que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$. Par la question précédente, $r(x) = \lambda\alpha x^{\alpha-1}$ est strictement positive sur $\mathbb{R}^+$, vérifie $r(0) = 0$ et $r'(x) = \lambda\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Posons $Y = r(X)$. La fonction de répartition G de Y est nulle sur $\mathbb{R}^-$ et pour $x > 0$: $G(x) = P(Y \leqslant x) = P(r(X) \leqslant x) = P(X \leqslant r^{-1}(x)) = F(r^{-1}(x))$

puisque la fonction r est bijective strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

On montre aisément que $r^{-1}(x) = \big(\frac{x}{\lambda\alpha}\big)^{1/(\alpha-1)}$. Ainsi :

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 - \exp\big(-\lambda(\frac{x^{\alpha/(\alpha-1)}}{(\lambda\alpha)^{\alpha/(\alpha-1)}})\big) & \text{sinon} \end{cases}$$

On a donc $\alpha' = \dfrac{\alpha}{\alpha-1}$ et $\lambda' = \dfrac{\lambda}{(\lambda\alpha)^{\alpha'}}$. On vérifie que l'on a bien : $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha'} = 1$.

4. Notons $R : x \mapsto \displaystyle\int_0^x r(t)dt$. Cette fonction est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ et $R'(x) = r(x)$. Ainsi :

$r(x) = \dfrac{F'(x)}{1-F(x)} \implies R'(x) = -\dfrac{d}{dx}(\ln(1-F(x))$ et $R(x) = \ln(1-F(x)) + K$.

La condition initiale donne $K = 0$ et :

$$F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-R(x)} \qquad (\star)$$

Par stricte croissance de r, pour $x > 0$:

$$1 - \mathrm{e}^{\lambda' x^{\alpha'}} = P(r(X) \leqslant x) = P(X \leqslant r^{-1}(x))$$

et donc :

$$F(x) = P(X \leqslant x) = 1 - \mathrm{e}^{\lambda'(r(x))^{\alpha'}} \qquad (\star\star)$$

En utilisant les relations $(\star)$ et $(\star\star)$, il vient :

$$R(x) = \lambda'(r(x))^{\alpha'} = \lambda'(R'(x))^{\alpha'}, \text{ soit } R'(x)R(x)^{-1/\alpha'} = \left(\frac{1}{\lambda'}\right)^{1/\alpha'}$$

En intégrant, il vient, comme $R(0) = 0$:

$$\frac{1}{1-\frac{1}{\alpha'}} R^{\frac{1}{1-1/\alpha'}} = \frac{1}{\lambda'^{1/\alpha'}} x$$

Comme $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\alpha'} = 1$, cela est équivalent à : $R^{1/\alpha}(x) = \dfrac{1}{\alpha(\lambda')^{1/\alpha'}} x$ et

$$R(x) = \frac{1}{(\alpha\lambda'^{1/\alpha'})^{\alpha}} x^{\alpha}$$

On termine en utilisant la relation $(\star)$: $F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-R(x)} = 1 - \exp(\lambda x^{\alpha})$.

Exercice 3.15.

Soit $(A_n)_n$ une suite d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On note $p_n = P(A_n)$. On note B l'événement $\bigcap\limits_{n\geq 1} \big(\bigcup\limits_{k\geq n} A_k \big)$.

On rappelle que cet événement est en fait :

$$B = \{\omega \in \Omega \mid \omega \text{ appartient à une infinité des } A_n\}.$$

1. On suppose que la série $\sum\limits_k P(A_k)$ converge. Montrer que $P(B) = 0$.

2. On suppose que les événements (A_n) sont indépendants et que la série $\sum\limits_n P(A_n)$ est divergente.

a) Montrer que l'événement $\overline{B}$ est égal à $\bigcup\limits_{n\geq 1} \big(\bigcap\limits_{k\geq n} \overline{A_k} \big)$, où $\overline{M}$ désigne l'événement contraire de l'événement M.

b) Exprimer $P\big(\bigcap\limits_{k=n}^{m} \overline{A_k} \big)$ en fonction des p_k.

c) Montrer que la série $\sum\limits_k \ln(1-p_k)$ est divergente.

d) En déduire que $P(B) = 1$.

3. Soit α un réel strictement positif et (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes telles que pour tout n, X_n suit la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{n^\alpha}$.

a) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} E(X_n) = 0$.

b) On suppose que $0 < \alpha < 1$. Montrer qu'avec une probabilité égale à 1, l'ensemble $\{n \mid X_n = 1\}$ contient une infinité d'éléments.

c) On suppose que $\alpha > 1$. Montrer qu'avec une probabilité égale à 1, l'ensemble $\{n \mid X_n = 1\}$ est fini.

Solution :

1. Pour tout entier m, on a : $\bigcap\limits_{n=1}^{m} \bigcup\limits_{k\geq n} A_k = \bigcup\limits_{k=m}^{\infty} A_k$.

La série $\sum P(A_n)$ est convergente. Donc $\lim\limits_{m\to+\infty} \sum\limits_{k=m}^{\infty} P(A_k) = 0$.

Or $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leqslant P(A) + P(B)$, donne par une récurrence simple $P(A_m \cup A_{m+1} \cup \ldots \cup A_n) \leqslant P(A_m) + P(A_{m+1}) + \cdots + P(A_n)$ et par passage à la limite par σ-additivité :

$$P\Big(\bigcup_{k=m}^{\infty} A_k\Big) \leqslant \sum_{k=m}^{\infty} P(A_k)$$

ce qui montre que $P(B) = \lim\limits_{m\to\infty} P\Big(\bigcap\limits_{n=1}^{m} \bigcup\limits_{k\geq n} A_k\Big) = 0$.

2. a) Les règles de de Morgan donnent immédiatement $\overline{\Big(\bigcap\limits_{n\geq 1} \bigcup\limits_{k\geq n} A_k\Big)} = \bigcup\limits_{n\geq 1} \bigcap\limits_{k\geq n} \overline{A_n}$.

b) Par indépendance des événements (A_n) et donc de leurs complémentaires :

$$P\Big(\bigcap_{k=n}^{m} \overline{A_k}\Big) = \prod_{k=n}^{m} P(\overline{A_k}) = \prod_{k=n}^{m} (1 - p_k)$$

c) Deux cas :

- si (p_n) ne tend pas vers 0, alors $\ln(1 - p_n)$ ne tend pas vers 0 et la série $\sum \ln(1 - p_n)$ diverge grossièrement.
- si $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = 0$, alors, $-\ln(1 - p_n) \sim p_n$, et par hypothèse de la question, la série $\sum p_n$ diverge. On conclut par le théorème d'équivalence des séries à termes positifs ou nuls.

Dans les deux cas, la série $\sum \ln(1 - p_n)$ diverge vers $-\infty$.

d) Comme $\ln\big(\prod_{k=n}^{m}(1-p_k)\big) = \sum_{k=n}^{m}\ln(1-p_k)$, par continuité de la fonction exponentielle, il vient : $\lim_{m\to+\infty}\prod_{k=n}^{m}(1-p_k) = \prod_{k=n}^{\infty}(1-p_k) = 0$. Ainsi, $P\big(\bigcap_{k\geq n}\overline{A_k}\big) = 0$.

Comme la suite $\big(\bigcap_{k\geq n}\overline{A_k}\big)_n$ est décroissante, pour tout m, on a :

$$\bigcup_{n=1}^{m}\bigcap_{k\geq n}\overline{A_k} = \bigcap_{k\geq m}\overline{A_k}$$

et donc, $P\big(\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{k\geq n}\overline{A_k}\big) = 0$, ce qui entraîne que $P\big(\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{k\geq n}A_k\big) = 1$.

3. a) De manière évidente $E(X_n) = P(Z_n = 1) = \dfrac{1}{n^\alpha}$ qui tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$

Pour les deux questions suivantes, on pose : $A_n = [X_n = 1]$. Les variables aléatoires (X_n) étant indépendantes, les événements (A_n) le sont aussi.

b) La série $\sum P(A_n)$ diverge. Par la question 2, $P(B) = 1$, ce qui signifie que les événements $[X_n = 1]$ sont réalisés infiniment souvent avec la probabilité 1.

c) La série $\sum P(A_n)$ converge. Par la question 1, $P(B) = 0$, ce qui signifie que les événements $[X_n = 1]$ sont réalisés infiniment souvent avec une probabilité de 0, ou qu'ils ne sont réalisés qu'un nombre fini de fois avec la probabilité 1.

Exercice 3.16.

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto f(t) = \dfrac{1}{2}\exp(-|t|)$.

Montrer que f est la densité de probabilité d'une variable aléatoire X dont on déterminera la fonction de répartition, l'espérance et l'écart-type.

2. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes, de même loi que X. Déterminer une densité g de $Y = X_1 + X_2$. Quelles sont les valeurs de l'espérance et de l'écart-type de Y ?

3. a) Donner une densité de la variable aléatoire $X_1 - X_2$.

b) On effectue indépendamment l'une de l'autre, deux mesures de la masse d'un même objet. On suppose que l'erreur commise à chaque fois suit la loi de X.

Soit a réel positif. Quelle est la probabilité que les deux mesures effectuées ne diffèrent pas de plus de a ?

c) Pour quelles valeurs de a l'inégalité de Bienaymé-Chebychev donne-t-elle une information sur cette probabilité ?

Solution :

1) La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, positive.

On a : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \frac{2}{2}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,dt = 1$, donc f est une densité.

$\star$ Si F est la fonction de répartition de X, on a :

Si $x \leqslant 0$, $F(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{t}\,dt = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{x}$

Si $x \geqslant 0$, par symétrie, $F(x) = 1 - F(-x) = 1 - \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-x}$.

$\star$ La convergence (absolue) de l'intégrale définissant l'espérance est banale et, par symétrie, l'espérance est nulle.

$\star$ Enfin la variance est égale au moment d'ordre 2 et :

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}\,t^2\mathrm{e}^{-|t|}\,dt = \int_0^{+\infty} t^2\mathrm{e}^{-t}\,dt = \Gamma(3) = 2$$

2) Une densité g de Y est donnée, par convolution, par :

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-|t|}\mathrm{e}^{-|x-t|}\,dt$$

Pour $x < 0$, $4g(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{2t-x}\,dt + \int_x^0 \mathrm{e}^{x}\,dt + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{x-2t}\,dt$

D'où : $g(x) = \dfrac{1}{4}(1-x)\mathrm{e}^{x}$

Tandis que pour $x > 0$: $4g(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{2t-x}\,dt + \int_0^x \mathrm{e}^{-x} + \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{x-2t}\,dt$

D'où : $g(x) = \dfrac{1}{4}(x+1)\mathrm{e}^{-x}$.

On peut donc écrire :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, g(x) = \frac{1}{4}(1+|x|)\mathrm{e}^{-|x|}$$

Par linéarité de l'espérance : $E(Y) = 0$ et, par indépendance :

$V(Y) = V(X_1) + V(X_2) = 4$.

3) a) La variable $-X_2$ a même loi que X_2, donc, toujours par indépendance, $X_1 - X_2$ a même loi que $Y = X_1 + X_2$.

b) Soit X_1 l'erreur aléatoire commise lors de la première mesure et X_2 celle commise lors de la seconde. On cherche la probabilité de l'événement $|X_1 - X_2| \leqslant a$, c'est-à-dire $-a \leqslant X_1 - X_2 \leqslant a$. On peut donc écrire :

$$p = P(-a \leqslant X_1 - X_2 \leqslant a) = \int_{-a}^{a} g(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^a (x+1)\mathrm{e}^{-x}\,dx$$

Une intégration par parties donne la solution et :

$$p = \frac{1}{2}\big(2 - (a+2)\mathrm{e}^{-a}\big)$$

c) L'inégalité de Bienaymé-Chebychev donne une indication dès que la largeur de l'intervalle considéré est égale au moins à deux fois l'écart-type de Y, c'est-à-dire pour $a \geqslant 2$.

Exercice 3.17.

On note φ la densité continue sur $\mathbb{R}$ de la loi normale centrée réduite et Φ la fonction de répartition correspondante. On dira qu'une variable aléatoire réelle positive X suit la loi $LN(\mu,\theta), \mu \in \mathbb{R}, \theta \in \mathbb{R}_+^*$ si sa fonction de répartition F_X est donnée par :

$$F_X(x) = \begin{cases} \Phi\big(\frac{1}{\theta}((\ln x) - \mu)\big) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

1. On suppose que X suit la loi $LN(\mu,\theta)$, et on pose $Y = \ln X$. Déterminer la fonction de répartition F_Y de Y.

2. Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes, respectivement de lois $LN(\mu_1,\theta_1)$, $LN(\mu_2,\theta_2)$. Déterminer la loi du produit X_1X_2.

3. Soit Z est une variable aléatoire de loi $LN(\mu,\theta)$. Montrer que pour tout $c, \alpha \in \mathbb{R}_+^*$, la variable aléatoire cZ^α est de loi $LN(\mu',\theta')$, où on précisera les valeurs de μ' et θ'.

4. Soit $p \in]0,1[$ et $q = 1-p$. On définit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi définie par :

$$P(X_i = \mathrm{e}) = p, P(X_i = 1) = q = 1 - p.$$

a) Quelle est la loi de $S_n = \sum_{i=1}^{n} (\ln X_i)$?

b) Montrer que lorsque n tend vers $+\infty$, la fonction de répartition de la variable aléatoire $T_n = \mathrm{e}^{-p\sqrt{n}}\big(\prod_{i=1}^{n} X_i\big)^{\frac{1}{\sqrt{n}}}$ converge en tout point de $\mathbb{R}_+^*$ vers une limite que l'on déterminera.

Solution :

1. On a : $\forall x \in \mathbb{R}, P(Y \leqslant x) = P(\ln X \leqslant x) = P(X \leqslant \mathrm{e}^x) = \Phi\big(\frac{1}{\theta}(x-\mu)\big)$.

Donc Y suit la loi $\mathcal{N}(\mu,\theta)$.

2. Si on pose $Y_i = \ln X_i$, on a $X_1X_2 = \mathrm{e}^{Y_1+Y_2}$. Par stabilité et indépendance, Y_1+Y_2 suit la loi $\mathcal{N}(\mu_1+\mu_2, \sqrt{\theta_1^2+\theta_2^2})$. Par suite X_1X_2 suit la loi $LN(\mu_1+\mu_2, \sqrt{\theta_1^2+\theta_2^2})$.

3. On a $\ln(cZ^\alpha) = \ln c + \alpha \ln Z = \ln c + \alpha T$.
Soit $t \in \mathbb{R}$, on a :
$$P(\alpha T + \ln c \leqslant t) = P\big(T \leqslant \frac{1}{\alpha}(t - \ln c)\big) = \Phi_T\big(\frac{1}{\alpha}(t - \ln c)\big)$$
$$= \Phi\big(\frac{1}{\theta}\big(\frac{1}{\alpha}(t - \ln c) - \mu\big)\big) = \Phi\big(\frac{1}{\alpha\theta}(t - \ln c - \mu\alpha)\big).$$
Donc cZ^α suit la loi $LN\big(\mu\alpha + \ln c, \frac{1}{\alpha\theta}\big)$.

4. a) $\ln X_i$ suit la loi $\mathcal{B}(p)$. Par suite S_n suit la loi $\mathcal{B}(n, p)$.

b) On a :
$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+^*, P(T_n \leqslant t) = P\big(\mathrm{e}^{-p\sqrt{n}}(\prod_{i=1}^{n} X_i)^{1/\sqrt{n}} \leqslant t\big)$$
$$= P(-p\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}\, S_n \leqslant \ln t) = P(\frac{S_n - np}{\sqrt{n}} \leqslant \ln t)$$
Or $\big(\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}}\big)_n$ converge en loi vers une variable suivant la loi normale centrée réduite, donc :
$$\lim_{n\to\infty} P(T_n \leqslant t) = \lim_{n\to\infty} P(\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leqslant \frac{\ln t}{\sqrt{pq}}) = \Phi(\frac{\ln t}{\sqrt{pq}})$$

Exercice 3.18.

Dans cet exercice, toutes les variables aléatoires sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $P(X \geqslant n) > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On appelle *taux de panne* de X la suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des probabilités conditionnelles définies par :
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, x_n = P_{(X\geq n)}\big(X = n\big).$$

1. a) Vérifier que $P(Y = n) = \dfrac{1}{n(n+1)}$ définit bien une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^*$.
(On pourra déterminer deux réels a et b tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on ait : $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1}$.)

b) Déterminer le taux de panne de la variable aléatoire Y.

2. Dans le cas général, montrer que :
$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, P(X \geqslant n) = \prod_{k=0}^{n-1}(1 - x_k) = (1 - x_0)(1 - x_1)\ldots(1 - x_{n-1})$$
puis exprimer $p_n = P(X = n)$ en fonction des x_k.

3. Déterminer les lois de variables à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ ayant un taux de panne constant pour $n > 0$.

4. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, de taux de panne $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $[0,1]$.
Soit Z définie par :

$$\forall\,\omega\in\Omega, Z(\omega)=\begin{cases}0 & \text{si } \forall\, k\in\mathbb{N}, U_k(\omega)>x_k\\ \min\left\{k\in\mathbb{N}\ /\ U_k(\omega)\leqslant x_k\right\} & \text{sinon}\end{cases}$$

Montrer que Z est une variable aléatoire et déterminer sa loi.

Solution :

1. a) $\forall\, n\in\mathbb{N}^*, p_n=\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\geqslant 0$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}p_k=1-\frac{1}{n+1}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}1$.
On a donc bien affaire à une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^*$.

b) Le taux de panne (y_n) est donné par $y_0=0$ et comme pour tout $n\geqslant 1$:

$$P(Y\geqslant n)=\lim_{p\to+\infty}\sum_{k=n}^{p}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\lim_{p\to+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{p+1}\right)=\frac{1}{n}$$

il vient :

$$y_n=\frac{\frac{1}{n(n+1)}}{\frac{1}{n}}=\frac{1}{n+1}$$

2. On a : $1=P_{(X\geq n)}(X\geqslant n)=P_{(X\geq n)}(X\geqslant n+1)+P_{(X\geq n)}(X=n)$, ce qui donne :

$$1-x_n=\frac{P[(X\geqslant n+1)\cap(X\geqslant n)]}{P(X\geqslant n)}=\frac{P(X\geqslant n+1)}{P(X\geqslant n)}$$

d'où :

$$\prod_{k=0}^{n-1}(1-x_k)=\frac{P(X\geqslant n)}{P(X\geqslant 0)}=P(X\geqslant n)$$

puis :

$$p_n=P(X\geqslant n)-P(X\geqslant n+1)=x_n\prod_{k=0}^{n-1}(1-x_k)$$

3. Condition nécessaire : si X est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, de taux de panne $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ constant égal à x, alors $p_0=x_0=0$ et par la question précédente, $p_n=x(1-x)^{n-1}$ donc $X\hookrightarrow\mathcal{G}(x)$.

Condition suffisante : Si $X\hookrightarrow\mathcal{G}(p)$, on a $p_0=0$ et $P(X\geqslant 0)=1$, d'où $x_0=0$ puis, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$P(X=n)=pq^{n-1}, P(X\geqslant n)=\sum_{k=n}^{+\infty}pq^{k-1}=\frac{pq^{n-1}}{1-q}=q^{n-1}>0$$

d'où :

$$x_n=\frac{P(X=n)}{P(X\geqslant n)}=p$$

4. Soit $A = \big\{\omega \in \Omega \ / \ \forall\, k \in \mathbb{N}, U_k(\omega) > x_k\big\} = \bigcap\limits_{k=0}^{+\infty} \big(U_k > x_k\big)$.
Par indépendance des U_k et $x_k \in [0,1]$, on a :
$P\big(\bigcap\limits_{k=0}^{n} (U_k > x_k)\big) = \prod\limits_{k=0}^{n} P(U_k > x_k) = \prod\limits_{k=0}^{n} (1 - x_k) = P(X \geqslant n+1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
d'où $P(A) = 0$, par limite monotone, et donc Z est définie presque partout.
On a $Z(\Omega) \subset \mathbb{N}$ et, par indépendance des U_k de loi uniforme sur $[0,1]$:

$$\begin{aligned} P(Z = n) &= P\big(\big(\bigcap_{k=0}^{n-1} (U_k > x_k)\big) \cap (U_n \leqslant x_n)\big) = P(U_n \leqslant x_n) \prod_{k=0}^{n-1} P(U_k > x_k) \\ &= x_n \prod_{k=0}^{n-1} (1 - x_k) = p_n \end{aligned}$$

Conclusion : Z suit la même loi que X.

Exercice 3.19.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a $1 - x \leqslant \mathrm{e}^{-x}$.

2. On dispose d'une urne vide au départ. Le premier jour, une personne met une boule numérotée 1 dans l'urne, la tire, note son numéro et la remet dans l'urne (!). Ensuite, à chaque nouvelle journée, elle ajoute une boule qui porte le numéro du jour considéré, elle tire alors une boule au hasard, note le numéro de cette boule et la remet dans l'urne. Le processus se poursuit indéfiniment ...

a) Soient $\ell \in \mathbb{N}^*$ et $E_1, E_2, \ldots, E_\ell$ une famille de ℓ événements indépendants. Montrer que l'on a

$$P\big(\bigcap_{1\leq i\leq \ell} \overline{E_i}\big) \leqslant \mathrm{e}^{-\sum\limits_{i=1}^{\ell} P(E_i)}.$$

où $\overline{E}$ est l'événement contraire de l'événement E.

b) On note A_k l'événement « la boule numérotée 10 sort lors du $k^{\text{ème}}$ tirage. Que vaut la probabilité de A_k ?

c) Quelle est la probabilité que la boule 10 sorte au moins une fois à partir du $n^{\text{ème}}$ tirage, où n est un entier positif fixé ?

d) Quelle est la probabilité que la boule numérotée 10 sorte une infinité de fois ?

e) Calculer la probabilité que le 10 sorte une infinité de fois de suite.

3. On suppose cette fois que la personne remplit l'urne de sorte qu'il y ait dans l'urne n^2 boules, numérotées de 1 à n^2, le $n^{\text{ème}}$ jour (elle met donc une boule numérotée 1 le premier jour, trois boules numérotées $2, 3, 4$ le deuxième

jour, cinq boules le troisième, ...). Comme à la question précédente, elle tire alors une boule, note son numéro et la remet immédiatement dans l'urne.

a) Soient $\ell \in \mathbb{N}^*$ et $E_1, E_2, \ldots, E_\ell$ une famille de ℓ événements . Montrer que l'on a : $P\big(\bigcup_{1\leqslant i\leqslant \ell} E_i\big) \leqslant \sum_{i=1}^{\ell} P(E_i)$.

b) Quelle est la probabilité que le nombre 10 sorte une infinité de fois ?

Solution :

1. Banal, par inégalité de convexité ou étude de la fonction associée.

2. a) Comme les événements considérés sont indépendants, en utilisant la question 1, il vient :

$$P\big(\bigcap_{1\leq i\leq \ell} \overline{E_i}\big) = \prod_1^{\ell} P(\overline{E_i}) = \prod_1^{\ell}(1 - P(E_i)) \leqslant \prod_1^{\ell} \mathrm{e}^{-P(E_i)} = \mathrm{e}^{-\sum_{i=1}^{\ell} P(E_i)}.$$

b) Il est clair que :

$$P(A_k) = 0 \text{ si } 1 \leqslant k < 10 \text{ et } P(A_k) = \frac{1}{k} \text{ si } k \geqslant 10.$$

c) Ceci correspond à la probabilité de l'événement $\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k$. Passons à l'événement contraire, on obtient :

$$P\big(\bigcap_{k\geq n} \overline{A_k}\big) = \lim_{\ell\to+\infty} P\big(\bigcap_{n\leq k\leq l} \overline{A_k}\big).$$

Or d'après la question 2 a), on a :

$$P\big(\bigcap_{n\leq k\leq \ell} \overline{A_k}\big) \leqslant \exp\big(-\sum_{k=n}^{l} P(A_k)\big) = \exp\big(-\sum_{k=\sup(n,10)}^{\ell} 1/k\big) \underset{\ell\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

D'où $P\big(\bigcap_{k\geq n} \overline{A_k}\big) = 0$ et par suite, $P\big(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k\big) = 1$.

d) L'événement « le 10 sort une infinité de fois » s'écrit au moyen de l'intersection décroissante des événements précédents. C'est donc :

$$P\big(\bigcap_{n\geq 1}\big(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k\big)\big) = \lim_{n\to+\infty} P\big(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k\big) = 1$$

Le 10 sort donc presque sûrement une infinité de fois.

e) Ici l'événement considéré correspond à la réunion croissante : $\bigcup_{n\geq 1}\Big(\bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k\Big)$ et on a :

$$P\big(\bigcup_{n\geq 1}\big(\bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k\big)\big) = \lim_{n\to+\infty} P\big(\bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k\big) \leqslant \lim_{n\longrightarrow+\infty} P(A_n) = 0.$$

La probabilité que le 10 sorte une infinité de fois de suite est donc nulle.

3. a) La formule de Poincaré $P(A \bigcup B) = P(A) + P(B) - P(A \bigcap B)$ implique $P(A \bigcup B) \leqslant P(A) + P(B)$. On obtient ensuite l'inégalité souhaitée par récurrence.

b) Dans ce cas, on a : $P(A_k) = 0$ si $1 \leqslant k < 10$ et $P(A_k) = \dfrac{1}{k^2}$ si $k \geqslant 10$.

Avec la majoration donnée en 3. a), on obtient en passant à la limite :

$$P\Big(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k\Big) \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2},$$

d'où :

$$P\Big(\bigcap_{n\geq 1}\big(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k\big)\Big) = \lim_{n\to+\infty} P\Big(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k\Big) \leqslant \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = 0$$

puisque le reste d'une série convergente tend vers 0.
Cette fois la probabilité que le 10 sorte une infinité de fois est nulle.

Exercice 3.20.

Soit $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ un espace probabilisé. On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des variables aléatoires X à densité définies sur cet espace, à valeurs dans $[-1, 1]$ et centrées (*i.e.* telles que l'espérance $E(X)$ existe et vaut 0).

1. Soit $X \in \mathcal{E}$.

a) Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la variable aléatoire $\mathrm{e}^{\lambda X}$ admet une espérance.

b) Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $\lambda \geqslant 0$, on a :

$$P(X \geqslant a) \leqslant \mathrm{e}^{-\lambda a} E\big(\mathrm{e}^{\lambda X}\big)$$

c) L'ensemble $\mathcal{E}$ est-il un espace vectoriel ?

2. Soit $\lambda \geqslant 0$ et soit $X \in \mathcal{E}$.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que : $(2n)! \geqslant 2^n n!$.

b) En déduire que : $\dfrac{1}{2}\big(\mathrm{e}^{\lambda} + \mathrm{e}^{-\lambda}\big) \leqslant \mathrm{e}^{\frac{\lambda^2}{2}}$.

c) Montrer que, pour tout $x \in [-1, 1]$, on a : $\mathrm{e}^{\lambda x} \leqslant \dfrac{1}{2}\big(\mathrm{e}^{\lambda} + \mathrm{e}^{-\lambda}\big) + \dfrac{x}{2}\big(\mathrm{e}^{\lambda} - \mathrm{e}^{-\lambda}\big)$.

d) Déduire des questions précédentes que :

$$E\big(\mathrm{e}^{\lambda X}\big) \leqslant \mathrm{e}^{\frac{\lambda^2}{2}} \text{ et } E\big(\mathrm{e}^{-\lambda X}\big) \leqslant \mathrm{e}^{\frac{\lambda^2}{2}}.$$

3. Montrer que, pour tout $a \geqslant 0$ et tout $X \in \mathcal{E}$, on a : $P(|X| \geqslant a) \leqslant 2\,\mathrm{e}^{-\frac{a^2}{2}}$.

4. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes qui appartiennent à $\mathcal{E}$. Montrer que :

$$\forall\, a \geqslant 0, \forall\, n \in \mathbb{N}^*, P\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big|\sum_{i=1}^{n} X_i\Big| \geqslant a\Big) \leqslant 2\,\mathrm{e}^{-\frac{a^2}{2}}.$$

Solution :

1. a) Soit f une densité de X nulle en dehors de $[-1,1]$. Par le théorème de transfert il suffit que l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\lambda x} f(x)\,dx$ converge, ce qui est banalement le cas car la fonction à intégrer est nulle en dehors de $[-1,1]$.

b) L'inégalité est évidente pour $\lambda = 0$ car alors $\mathrm{e}^{-\lambda a} E\big(\mathrm{e}^{\lambda X}\big) = 1$.
Pour $\lambda > 0$, d'après l'inégalité de Markov appliquée à la variable positive $\mathrm{e}^{\lambda X}$, on a :

$$P(X \geqslant a) = P\big(\mathrm{e}^{\lambda X} \geqslant \mathrm{e}^{\lambda a}\big) \leqslant \frac{E(\mathrm{e}^{\lambda X})}{\mathrm{e}^{\lambda a}}.$$

c) Non : si X suit une loi uniforme sur $[-1,1]$, alors $X \in \mathcal{E}$ mais $2X \notin \mathcal{E}$, car cette variable aléatoire prend ses valeurs entre -2 et 2 ....

2. a) Pour $n \geqslant 1$, $\dfrac{(2n)!}{n!} = (n+1)(n+2)\dots(2n)$ et les n facteurs sont minorés par 2, donc $(2n)! \geqslant 2^n n!$ et le résultat est banal au rang 0.

b) On a par simplifications des sommations de séries :

$$\frac{1}{2}\big(\mathrm{e}^{\lambda} + \mathrm{e}^{-\lambda}\big) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2n}}{(2n)!} \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2n}}{2^n n!} = \mathrm{e}^{\frac{\lambda^2}{2}}$$

c) Cette relation s'écrit : $\mathrm{e}^{\lambda x} \leqslant \dfrac{x+1}{2}\mathrm{e}^{\lambda} + \dfrac{1-x}{2}\mathrm{e}^{-\lambda}$, soit encore, en posant $t = \dfrac{x+1}{2} \in [0,1]$:

$$\mathrm{e}^{\lambda[t.1+(1-t).(-1)]} \leqslant t\mathrm{e}^{\lambda} + (1-t)\mathrm{e}^{-\lambda},$$

inégalité qui est vraie d'après la convexité de la fonction $u \mapsto \mathrm{e}^{\lambda u}$ sur $[-1,1]$.
[On peut aussi étudier la fonction $\varphi : x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x} - \dfrac{1}{2}\big(\mathrm{e}^{\lambda} + \mathrm{e}^{-\lambda}\big) - \dfrac{x}{2}\big(\mathrm{e}^{\lambda} - \mathrm{e}^{-\lambda}\big)$ *associée, dont la dérivée seconde est évidemment strictement positive sur* $[-1,1]$. *Comme* $\varphi(-1) = \varphi(1) = 0$, *il n'est même pas nécessaire d'étudier le signe de* φ' *...]*

d) D'après 2. b) et 2. c), on a :

$$E\big(\mathrm{e}^{\lambda X}\big) = \int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{\lambda x} f(x)\,dx \leqslant \int_{-1}^{1} \big(\mathrm{e}^{\frac{\lambda^2}{2}} + \frac{x}{2}(\mathrm{e}^{\lambda} - \mathrm{e}^{-\lambda})\big) f(x)\,dx = \mathrm{e}^{\frac{\lambda^2}{2}} + 0$$

Comme $-X \in \mathcal{E}$ on peut remplacer X par $-X$ ce qui donne : $E\big(\mathrm{e}^{-\lambda X}\big) \leqslant \mathrm{e}^{\frac{\lambda^2}{2}}$.

3. On peut écrire, pour tout $\lambda \geqslant 0$:

$$\begin{aligned} P(|X| \geqslant a) &= P(X \geqslant a) + P(X \leqslant -a) = P(X \geqslant a) + P(-X \geqslant a) \\ &\leqslant \mathrm{e}^{-\lambda a} E(\mathrm{e}^{\lambda X}) + \mathrm{e}^{-\lambda a} E(\mathrm{e}^{-\lambda X}) \end{aligned}$$

$$\leqslant 2\mathrm{e}^{-\lambda a}\mathrm{e}^{\frac{\lambda^2}{2}}$$

et en prenant $\lambda = a$: $P(|X| \geqslant a) \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{a^2}{2}}$

4. De la même façon, on remarque que $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \in \mathcal{E}$. Donc, pour tout $\lambda \geqslant 0$, comme à la question précédente, on a :

$$\begin{aligned}
P\big(\tfrac{1}{\sqrt{n}}|\sum_{i=1}^{n} X_i| \geqslant a\big) &= P\big(\tfrac{1}{n}|\sum_{i=1}^{n} X_i| \geqslant \tfrac{a}{\sqrt{n}}\big) \\
&\leqslant \mathrm{e}^{-\lambda\frac{a}{\sqrt{n}}}[E(\exp(\tfrac{\lambda}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i)) + E(\exp(-\tfrac{\lambda}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i))] \\
&\leqslant \mathrm{e}^{-\lambda\frac{a}{\sqrt{n}}}\big[\prod_{i=1}^{n} E(\mathrm{e}^{\frac{\lambda}{n}X_i}) + \prod_{i=1}^{n} E(\mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{n}X_i})\big] \text{ (par indépendance)} \\
&\leqslant 2\mathrm{e}^{-\lambda\frac{a}{\sqrt{n}}}\prod_{i=1}^{n}\mathrm{e}^{\frac{\lambda^2}{2n^2}} = 2\mathrm{e}^{-\lambda\frac{a}{\sqrt{n}}}\mathrm{e}^{\frac{\lambda^2}{2n}}
\end{aligned}$$

Pour conclure il suffit donc de trouver $\lambda \geqslant 0$ tel que $-\lambda\frac{a}{\sqrt{n}} + \frac{\lambda^2}{2n} \leqslant -\frac{a^2}{2}$, soit $\big(a - \frac{\lambda}{\sqrt{n}}\big)^2 \leqslant 0$. On doit prendre : $\lambda = a\sqrt{n}$.

5

QUESTIONS COURTES

Soit A une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = {}^tA$.
Quand la matrice A est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$?
Montrer que A est une matrice orthogonale.

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. Soit g une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On suppose que $Xg(X)$ et $g'(X)$ admettent une espérance.

a) Montrer que $E(g'(X)) = E(Xg(X))$.

b) En déduire la valeur des moments de X.

Soit f une fonction T-périodique, avec $T > 0$, dérivable sur $\mathbb{R}$.
On suppose que f s'annule en p points distincts de $[0, T[$. Montrer que f' s'annule en au moins p points de $[0, T[$ distincts de ceux de f.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_n(x) = \prod_{k=0}^{n} (x - k)$.

a) Montrer qu'il existe un unique réel $r_n \in]0, 1[$ tel que $P_n'(r_n) = 0$.

b) Montrer que $\dfrac{P_n'(x)}{P_n(x)} = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{x - k}$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} r_n$.

Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes, suivant la même loi géométrique de paramètre p.
Déterminer la probabilité de l'événement $3X = 2Y$.

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$; pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $P(X = k) = p_k$.
On suppose que X vérifie la propriété suivante :

$$\exists\, a \in \mathbb{R}_-, \exists\, b \in \mathbb{R}_+^* \text{ tels que } \forall\, k \in \mathbb{N}^*, p_k = \left(a + \frac{b}{k}\right) p_{k-1}$$

La variable aléatoire X peut-elle suivre :

a) une loi exponentielle ? b) une loi de Poisson ? c) une loi binomiale ? d) une loi géométrique ?

On considère un certain jeu de casino et on note X la variable aléatoire égale au gain du casino à chaque partie jouée. Un joueur joue une partie et il note X_0 la variable aléatoire égale à la somme qu'il perd.

Pour mesurer sa malchance, celui-ci observe les pertes $X_1, X_2, \ldots, X_n \ldots$ des joueurs suivants, en supposant que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que X.
Il s'intéresse alors à l'indice du premier joueur qui perd plus que lui, autrement dit à la variable aléatoire N du plus petit indice n tel que $X_n > X_0$ soit réalisé.

a) Justifier que $P(N > n-1) = \dfrac{1}{n}$.

b) Le joueur a-t-il raison de penser qu'il est vraiment malchanceux ?

Soit λ, μ deux réels fixés avec $\lambda \neq 0$ et P_0 un polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$. On définit une suite $(P_n)_n$ de polynômes par son premier terme P_0 et la relation : pour tout $n \geqslant 0$, $P_{n+1} = \lambda P_n + \mu P_n'$.

a) Montrer que pour tout $n \geqslant 0, P_n \in \mathbb{R}_2[X]$

b) Soit n fixé, et $Q \in \mathbb{R}_2[X]$. Existe-t-il $P_0 \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $P_n = Q$?

Soient A, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $AMB = 0$. Montrer que $A = 0$ ou $B = 0$.