1

ANALYSE

Exercice 1.1.

Soit $f : D = (\mathbb{R}_+^*)^3 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y, z) = x \ln(x) + y \ln(y) + z \ln(z)$$

1. La fonction f est-elle minorée, majorée, bornée sur D ?

2. Justifier que la fonction f est de classe C^1 sur D.

Soit a un réel strictement positif. On considère l'ensemble

$$\mathcal{C}_a = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y + z = 3a\right\}$$

et on note $g = f|_{\mathcal{C}_a}$ la restriction de f à $\mathcal{C}_a$.

3. Montrer que si g admet un extremum local au point (x, y, z), alors :

$$1 + \ln(x) = 1 + \ln(y) = 1 + \ln(z)$$

4. Étudier l'existence des extremums locaux de g. Comparer la (les) valeur(s) obtenue(s) à celle(s) trouvée(s) à la première question.

5. Retrouver les extremums de g en se ramenant à l'étude des extremums d'une fonction de deux variables bien choisie.

Solution :

1. Soit la fonction $\varphi : x \mapsto x \ln x$. Alors $\varphi'(x) = 1 + \ln x$ et donc :

x	0		$1/\mathrm{e}$		$+\infty$
$\varphi'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
φ	0	$\searrow$	$-1/\mathrm{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

(on a $\lim\limits_{x\to 0^+}\varphi(x)=0$)

φ décroît sur $]0,1/\mathrm{e}]$ de 0 à $-1/\mathrm{e}$, puis croît sur $[1/\mathrm{e},+\infty[$ de $-1/\mathrm{e}$ à $+\infty$. Ainsi f est non majorée sur D et :

$$\min_D f = -3/\mathrm{e}.$$

2. La fonction f est clairement de classe $\mathcal{C}^1$ sur D ouvert.

On a par exemple $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 1+\ln x$.

3. On cherche ici à déterminer un extremum sous contrainte linéaire. La condition nécessaire d'extremum en M sous contrainte linéaire est :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}_M(f) \in V^\perp$$

où V est l'espace vectoriel associé à $\mathcal{C}_a$. Comme $V^\perp$ est la droite engendrée par le vecteur $(1,1,1)$, cela revient à dire que le gradient a ses trois coordonnées égales, d'où la relation demandée.

4. Le seul point candidat est donc le point (a,a,a). On utilise ensuite un développement limité :

$$\begin{aligned} g(a+u,a+v,a+w) &= (a+u)\left[\ln a + \ln\left(1+\frac{u}{a}\right)\right] + \cdots \\ &= 3a\ln a + (u+v+w)(1+\ln a) \\ &\qquad + \frac{1}{2a}(u^2+v^2+w^2) + o(u^2+v^2+w^2) \end{aligned}$$

Or $(a+u,a+v,a+w)\in\mathcal{C}_a \implies u+v+w=0$, d'où

$g(a+u,a+v,a+w) - g(a,a,a) \geqslant 0$ pour (u,v,w) « assez petit ».

g possède un minimum (local) en (a,a,a), valant $3a\ln a$.

On remarque que $\min\limits_{\mathcal{C}_a} g = 3\varphi(a) \geqslant 3\min\varphi = -3/\mathrm{e} = \min\limits_D f$ *ce qui est cohérent.*

5. Avec $z = 3a-x-y$, il vient :

$$g(x,y,z) = h(x,y) = x\ln(x) + y\ln(y) + (3a-x-y)\ln(3a-x-y)$$

et :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,y) = \ln x - \ln(3a-x-y) \\ \dfrac{\partial h}{\partial y}(x,y) = \ln y - \ln(3a-x-y) \end{cases}$$

Les points critiques de h vérifient : $\begin{cases} \ln x - \ln(3a-x-y) = 0 \\ \ln y - \ln(3a-x-y) = 0 \end{cases}$

Soit : $\begin{cases} x = 3a-x-y \\ y = 3a-x-y \end{cases}$ et il n'y a qu'une solution :$x = y = a$.

Puis :

$$r = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{3a-x-y} \; ; \; t = \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(x,y) = \frac{1}{y} + \frac{1}{3a-x-y}$$

$$s = \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{1}{3a-x-y}$$

D'où en (a,a) : $rt - s^2 = \frac{2}{a} \times \frac{2}{a} - \left(\frac{1}{a}\right)^2 > 0$, et, comme $r > 0$, h admet en (a,a) un minimum local.

Exercice 1.2.

1. Justifier que pour tout n de $\mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 (\ln(1+x))^n dx$ existe.

On la note I_n.

2. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Déterminer sa limite.

3. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a :

$$I_{n+1} = 2(\ln 2)^{n+1} - (n+1)I_n$$

4. a) Soit $\varepsilon \in]0,1[$. Établir la majoration :

$$I_n \leqslant [\ln(2-\varepsilon)]^n + \varepsilon(\ln 2)^n$$

b) En choisissant judicieusement ε (qui peut dépendre de n), montrer que :

$$I_n = o((\ln 2)^n)$$

5. Déduire des questions précédentes un équivalent de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

6. Montrer que la série de terme général $\frac{I_n}{n!}$ est convergente et calculer sa somme.

Solution :

1. La fonction $x \mapsto \left(\ln(1+x)\right)^n$ est continue sur $[0,1]$; l'intégrale I_n existe donc.

2. Pour tout $x \in [0,1]$, $0 \leqslant \ln(1+x) \leqslant \ln 2 < 1$. La suite $\left((\ln(1+x))^n\right)_n$ est donc positive, décroissante et par croissance de l'opérateur « intégration

sur $[0,1]$ », la suite $(I_n)_n$ est positive décroissante. Elle converge donc et sa limite est 0 puisque :

$$0 < I_n \leqslant (\ln 2)^n.$$

3. Une intégration par parties en prenant $x \mapsto x+1$ comme primitive de $x \mapsto 1$ donne :

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_0^1 1\times(\ln(1+x))^{n+1}\,dx \\ I_{n+1} &= \Big[(x+1)(\ln(1+x))^{n+1}\Big]_0^1 - (n+1)\int_0^1 (\ln(1+x))^n\,dx \\ &= 2(\ln 2)^{n+1} - (n+1)I_n. \end{aligned}$$

4. a) Soit $\varepsilon \in]0,1[$. On a :

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{1-\varepsilon} \big(\ln(1+x)\big)^n dx + \int_{1-\varepsilon}^1 \big(\ln(1+x)\big)^n dx \\ &\leqslant (\ln(2-\varepsilon))^n(1-\varepsilon) + (\ln 2)^n\varepsilon \\ &\leqslant [\ln(2-\varepsilon)]^n + \varepsilon(\ln 2)^n. \end{aligned}$$

b) Choisissons $\varepsilon_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ et posons $a_n = \dfrac{[\ln(2-\varepsilon_n)]^n}{(\ln 2)^n}$. Il vient :

$$\ln a_n = \ln\Big(\frac{[\ln(2-\varepsilon_n)]^n}{(\ln 2)^n}\Big) = n\ln\Big(\frac{\ln(2-\varepsilon_n)}{\ln 2}\Big) \underset{(\infty)}{\sim} n\Big[\frac{\ln(2-\varepsilon_n)}{\ln 2} - 1\Big]$$

Soit :

$$\ln(a_n) \underset{(\infty)}{\sim} \frac{n}{\ln 2}\ln\big(1-\tfrac{\varepsilon_n}{2}\big) \underset{(\infty)}{\sim} -\frac{n\varepsilon_n}{2\ln 2}$$

Ainsi $\lim\limits_{n\to\infty} \ln a_n = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Il existe donc n_0 tel que pour $n \geqslant n_0$, $\dfrac{[\ln(2-\varepsilon_n)]^n}{(\ln 2)^n} \leqslant \varepsilon$ et ainsi :

$n \geqslant n_0 \implies \dfrac{I_n}{(\ln 2)^n} \leqslant 2\varepsilon$, d'où

$$\lim_{n\to\infty} \frac{I_n}{(\ln 2)^n} = 0, \text{ soit : } I_n = o((\ln 2)^n)$$

5. La relation de récurrence obtenue à la question 3, donne :

$$I_{n+1} = 2(\ln 2)^{n+1} - (n+1)I_n = o((\ln 2)^{n+1})$$

Donc $(n+1)I_n \sim 2(\ln 2)^{n+1}$, et :

$$I_n \sim \frac{2(\ln 2)^{n+1}}{n+1}$$

6. La série $\sum \frac{I_n}{n!}$ converge car $0 \leqslant \frac{I_n}{n!} \leqslant \frac{(\ln 2)^n}{n!}$. La relation démontrée lors de la question 3 donne, pour tout $k \geqslant 1$:

$$\frac{I_k}{k!} + \frac{I_{k-1}}{(k-1)!} = \frac{2(\ln 2)^k}{k!}$$

En sommant ces relations de 1 à n, il vient :

$$\frac{I_n}{n!} + 2\sum_{k=1}^{n-1} \frac{I_k}{k!} + I_0 = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{(\ln 2)^k}{k!}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{I_n}{n!} = 0$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} 2\sum_{k=1}^{n-1} \frac{I_k}{k!} = \lim_{n\to+\infty} 2\sum_{k=1}^{n} \frac{(\ln 2)^k}{k!} - I_0 = 2(\mathrm{e}^{\ln 2} - 1) + 1$$

Soit :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{I_k}{k!} = \frac{3}{2}$$

Exercice 1.3.

Soit f l'application définie par :

$$f : x \mapsto \int_0^1 (1-t^2)^x dt.$$

1. Déterminer le domaine de définition D de f.
On admet que f est continue sur D.

2. Montrer que f est décroissante sur D.

3. À l'aide d'une intégration par parties, déterminer, pour tout x de D, une relation entre $f(x+1)$ et $f(x)$.

4. a) En déduire un équivalent de $f(x)$, lorsque x tend vers -1 par valeurs supérieures.

b) Montrer que lorsque x tend vers $+\infty$, $f(x+1)$ et $f(x)$ sont équivalents.

5. a) Soit $n = \lfloor x \rfloor$ (partie entière de x). Montrer que lorsque x tend vers $+\infty$, on a $f(x) \sim f(n)$.

b) Montrer que, lorsque x tend vers $+\infty$, $f(x) \sim Cx^{-1/2}$, où C est une constante qu'on ne demande pas de déterminer.
(on pourra étudier la série de terme général $\ln\big(\frac{f(n-1)}{f(n)}\big)$.)

Solution :

1. L'application $t \mapsto \mathrm{e}^{x\ln(1-t^2)}$ est continue sur l'intervalle $[0,1[$.
Au voisinage gauche de 1 (pour t), on a : $(1-t^2)^x = (1+t)^x(1-t)^x \sim \dfrac{2^x}{(1-t)^{-x}}$, et la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{(1-t)^{-x}}$ est intégrable sur $[1/2,1]$ si et seulement si $x > -1$ (règle de Riemann). Donc :

$$D =]-1,+\infty[$$

2. Soit x, y tels que $-1 < x < y$. Comme $\ln(1-t^2) < 0$ sur $[0,1[$, par croissance de la fonction exponentielle, il vient $\mathrm{e}^{x\ln(1-t^2)} > \mathrm{e}^{y\ln(1-t^2)}$, et $f(x) > f(y)$. Ainsi f est décroissante sur D.

3. On intègre $t \mapsto 1$ en $u : t \mapsto t$ et on dérive $v : t \mapsto (1-t^2)^x$, les fonctions u et v étant de classe C^1 sur $[0,a]$, avec $a < 1$. Ainsi :

$$f_a(x+1) = \int_0^a (1-t^2)^{x+1}dt = \left[t(1-t^2)^{x+1}\right]_0^a + (x+1)\int_0^a 2t^2(1-t^2)^x\,dt$$

En prenant la limite lorsque a tend vers 1, il vient

$$f(x+1) = 2(x+1)\int_0^1 (t^2-1+1)(1-t^2)^x dt = -2(x+1)(f(x+1)+f(x))$$

et donc :

$$f(x+1) = \frac{2x+2}{2x+3}f(x)$$

4. a) Pour x au voisinage de -1, $x+1$ est au voisinage de 0 et par continuité de f :
$\lim\limits_{x\to -1}(2x+2)f(x) = f(0) = 1$, soit :

$$f(x) \underset{(-1^+)}{\sim} \frac{1}{2(x+1)}$$

b) On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x+1)}{f(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+2}{2x+3} = 1$
Soit :

$$f(x) \underset{(+\infty)}{\sim} f(x+1)$$

5. a) On sait que $n \leqslant x < n+1$. Par décroissance $f(n+1) \leqslant f(x) \leqslant f(n)$, et comme $f(n+1) \sim f(n)$:

$$f(x) \underset{(+\infty)}{\sim} f(\lfloor x \rfloor)$$

b) On a $\dfrac{f(n-1)}{f(n)} = \dfrac{2n+1}{2n} = 1 + \dfrac{1}{2n}$, d'où :

$$\ln\frac{f(n-1)}{f(n)} = \ln\left(1+\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2n} + O(\frac{1}{n^2}) = \frac{1}{2n} + w_n$$

où $\sum w_n$ est une série absolument convergente.
On somme ces égalités entre 2 et n. Il vient :

$$\ln f(1) - \ln f(n) = \frac{1}{2} \times \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=2}^{n} w_k$$

Sachant que $n \mapsto 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$ est une suite convergente (vers la constante γ d'Euler), on obtient :

$$n \mapsto \ln f(n) - \frac{1}{2} \ln n \text{ est une suite convergente}$$

Donc :

$$\exists\, C > 0, f(n) \underset{(\infty)}{\sim} \frac{C}{n^{1/2}}$$

et, avec 5. a) :

$$f(x) \underset{(+\infty)}{\sim} Cx^{-1/2}$$

Exercice 1.4.

1. Soit n un entier naturel et $P \in \mathbb{R}_n[X]$ quelconque.

a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} P(t)dt$ est convergente.

On note alors : $I(P) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} P(t)dt$.

b) Pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^k dt$.

2. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on pose $a_k(P) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^k P(t)dt$.
On considère l'application Φ_n de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$ définie par :

$$\Phi_n(P) = (a_0(P), a_1(P), \ldots, a_n(P))$$

Montrer que Φ_n est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

3. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On note P_m le polynôme de $\mathbb{R}_m[X]$ vérifiant :

$$\Phi_m(P_m) = (1,\ 0, \ldots,\ 0) \in \mathbb{R}^{m+1}$$

a) Calculer P_1 et P_2.

b) Soit P'_m le polynôme dérivé de P_m. Montrer que :

$$\Phi_m(P'_m) = (1 - P_m(0),\ -1,\ 0, \ldots,\ 0).$$

c) On suppose ici que $m \geqslant 2$ et on pose : $H_{m-1} = P'_m - P'_{m-1} + P_{m-1}$.
Montrer que pour tout $k \in [\![1, m-1]\!]$:

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^k H_{m-1}(t) dt = 0$$

Qu'obtient-on pour $k = m$?

d) Pour $m \geqslant 2$, calculer H_{m-1}. En déduire que :

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\ P'_m(t) = -\Big[1 + \sum_{k=1}^{m-1} P_k(t)\Big]$$

Solution :

1. a) La convergence connue de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{n+2}\mathrm{e}^{-t}\, dt$ implique, par croissances comparées la convergence de $I(P)$.

b) On obtient par une récurrence immédiate :

$$I(X^k) = k!$$

2. L'application Φ_n est évidemment linéaire.

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, si $\Phi_n(P) = 0$, on a pour tout k de $[\![0, n]\!]$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^k P(t) dt = 0$. Par conséquent $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} P^2(t) dt = 0$, or c'est l'intégrale d'une fonction continue et positive, la fonction $e^{-t}P^2(t)$ est donc nulle et par suite P est le polynôme nul. Φ_n est donc injective donc bijective (car les deux espaces vectoriels sont de même dimension finie $m+1$) ; c'est un isomorphisme.

3. a) Les applications Φ_1 et Φ_2 étant des isomorphismes on obtient l'existence et l'unicité de P_1 et P_2. Le calcul donne, $P_1(t) = 2 - t$ et $P_2(t) = 3 - 3t + \dfrac{t^2}{2}$. De la même manière, Φ_m étant un isomorphisme, P_m existe et est unique.

b) On a successivement,

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} P_m(t)\, dt = \big[P_m(t)(-\mathrm{e}^{-t})\big]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} P'_m(t)\, dt \\ &= P_m(0) + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} P'_m(t)\, dt \end{aligned}$$

D'où

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} P'_m(t)\, dt = 1 - P_m(0)$$

Pour $k \geqslant 1$, on obtient :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^k P'_m(t)\, dt = \big[t^k \mathrm{e}^{-t} P_m(t)\big]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}(kt^{k-1} - t^k) P_m(t)\, dt$$

$$= \begin{cases} -1 & \text{si } k = 1 \\ 0 & \text{si } k \geqslant 2 \end{cases}$$

car $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^k P_m(t)\, dt = 0$ lorsque $k \geqslant 1$.

On a donc bien

$$\Phi_m(P'_m) = (1 - P_m(0), -1, 0, \ldots, 0)$$

c) On a : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t H_{m-1}(t)\, dt = -1 + 1 + 0 = 0.$

Pour $2 \leqslant k \leqslant m-1$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^k H_{m-1}(t)\, dt = 0 - 0 + 0 = 0.$

D'où le résultat.

On a respectivement, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^m P'_m(t)\, dt = 0$, et :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^m P_{m-1}(t)\, dt = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} m t^{m-1} P_{m-1}(t)\, dt + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^m P'_{m-1}(t)\, dt$$

$$= 0 + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^m P'_{m-1}(t)\, dt$$

On en déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^m H_{m-1}(t)\, dt = 0.$

d) Il résulte de la question précédente qu'il existe un réel α tel que

$$\Phi_m(H_{m-1}) = (\alpha,\ 0, \ldots, 0) = \alpha \Phi_m(P_m).$$

D'où, puisque Φ_m est un isomorphisme, $H_{m-1} = \alpha P_m$, ce qui n'est possible que si $\alpha = 0$, en comparant les degrés. Donc $H_{m-1} = 0$.

On a donc pour tout $m \geqslant 2$, $P'_m = P'_{m-1} - P_{m-1}$. En tenant compte du fait que $P'_1 = -1$, on en déduit par télescopage que,

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, P'_m(t) = -\big[1 + \sum_{k=1}^{m-1} P_k(t)\big]$$

Exercice 1.5.

1. Exemple introductif.

a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$ est un entier naturel.

b) En déduire que la série de terme général $\sin(\pi(2+\sqrt{3})^n)$ est absolument convergente.

Soit P un polynôme unitaire de degré 3 à coefficients dans $\mathbb{N}$.

On pose : $P(X) = X^3 + a_1X^2 + a_2X + a_3$.

On suppose que P possède trois racines x_1, x_2, x_3 telles que $|x_1| > 1, |x_2| < 1$ et $|x_3| < 1$.

On pose : $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = \sigma_1 \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = \sigma_2 \\ x_1x_2x_3 = \sigma_3 \end{cases}$.

On pose enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n$.

2. a) Exprimer a_1, a_2, a_3 en fonction de $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

b) Calculer $\sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3$. En déduire l'expression de S_1, S_2 et S_3 en fonction de $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

c) Montrer que pour tout p de $\mathbb{N}^*$: $S_{p+3} - \sigma_1 S_{p+2} + \sigma_2 S_{p+1} - \sigma_3 S_p = 0$.

d) En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, S_n est un entier relatif.

3. Déterminer la nature de la série de terme général $\sin(\pi x_1^n)$.

Solution :

1. a) Pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k}[\sqrt{3}^k + (-\sqrt{3})^k]$$

$$= 2\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} 2^{n-2k} \times 3^k \in 2\mathbb{N}$$

b) Par la question précédente : $[(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n]\pi \in 2\pi\mathbb{Z}$ et

$$u_n = \sin[\pi(2+\sqrt{3})^n] = -\sin[\pi(2-\sqrt{3})^n]$$

De plus, on sait que pour tout $x \in [0, \pi]$, $0 \leqslant \sin x \leqslant x$. Donc

$$0 \leqslant -u_n \leqslant v_n = \pi(2-\sqrt{3})^n.$$

La série de terme général v_n converge puisque $0 < (2-\sqrt{3}) < 1$; la série $\sum u_n$ converge donc également (et elle est à termes négatifs).

2. a) On factorise le polynôme P en $P(X) = (X-x_1)(X-x_2)(X-x_3)$, puis, en développant cette expression et par unicité de l'écriture d'un polynôme dans une base, il vient :

$$P(X) = X^3 - \sigma_1X^2 + \sigma_2X - \sigma_3 \implies \begin{cases} \sigma_1 = -a_1 \\ \sigma_2 = a_2 \\ \sigma_3 = -a_3 \end{cases}$$

b) Le calcul de $\sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3$ donne : $\sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3 = \prod_{1 \leqslant i \neq j \leqslant 3} x_i^2 x_j$.

On a : $S_1 = \sigma_1$. En calculant σ_1^2, il vient $S_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$, et en calculant σ_1^3, il vient $S_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3$.

c) Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $i \in [\![1, 3]\!]$. Alors $x_i^p P(x_i) = 0$, ce qui est équivalent à :

$$x_i^{p+3} - \sigma_1 x_i^{p+2} + \sigma_2 x_i^{p+1} - \sigma_3 x_i^p = 0.$$

En sommant ces égalités, il vient :

$$S_{p+3} - \sigma_1 S_{p+2} + \sigma_2 S_{p+1} - \sigma_3 S_p = 0$$

d) Procédons par récurrence.

• par la question b), S_1, S_2, S_3 sont des entiers relatifs, comme polynômes en $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, qui eux mêmes sont des entiers relatifs comme polynômes à coefficients entiers en les entiers a_1, a_2, a_3.

• On termine par le principe de récurrence, en utilisant la question précédente.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par la question précédente, $S_n \in \mathbb{Z}$ et $\pi x_1^n = \pi S_n - \pi(x_2^n + x_3^n)$. Donc :

$$\begin{aligned} |\sin(\pi x_1^n)| &= |\sin(\pi S_n - \pi(x_2^n + x_3^n))| = |\sin(\pi(x_2^n + x_3^n))| \\ &\leqslant |\pi(x_2^n + x_3^n)| \leqslant \pi|x_2|^n + \pi|x_3|^n \end{aligned}$$

On conclut en remarquant que $|x_2| < 1$ et $|x_3| < 1$.

Exercice 1.6.

Soit α un réel strictement supérieur à 1.

1. Justifier la convergence de l'intégrale : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha}$;

On pose alors :

$$F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha}, G(\alpha) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^\alpha}, H(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha}$$

2. a) Montrer que pour tout $t \in [0, 1]$, et tout n de $\mathbb{N}$ on a :

$$\frac{1}{1+t^\alpha} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{k\alpha} + R_n(t)$$

où R_n est une fonction à préciser.

b) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{k \geqslant 0} \frac{(-1)^k}{1+k\alpha}$ est convergente et exprimer sa somme en fonction de $G(\alpha)$.

3. a) En utilisant le changement de variable défini par $u = t^{1-\alpha}$, montrer que :

$$H(\alpha) = \frac{1}{\alpha - 1} G\Big(\frac{\alpha}{\alpha - 1}\Big)$$

b) En admettant que $2a\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2-a^2} = \frac{\pi}{\sin(\pi a)} - \frac{1}{a}$ pour $a \in]0,1[$, déterminer la valeur de $F(\alpha)$.

Solution :

1. La fonction $f : t \to \frac{1}{1+t^\alpha}$ est définie, positive et continue sur $]0,+\infty[$. Comme $\alpha > 1$ elle se prolonge par continuité en 0 par $f(0) = 1$ et est équivalente au voisinage de $+\infty$ à $\frac{1}{t^\alpha}$.

Or $\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^\alpha}$ est convergente, puisque $\alpha > 1$. Par le théorème sur les fonctions positives équivalentes, $F(\alpha)$ existe pour tout $\alpha > 1$.

2. a) **La** formule géométrique donne $(-t^\alpha \neq 1)$:

$$\frac{1}{1+t^\alpha} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{k\alpha} + (-1)^{n+1}\frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha}$$

b) En intégrant sur $[0,1]$, il vient :

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t^\alpha}\,dt = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_0^1 t^{k\alpha}\,dt + (-1)^{n+1}\int_0^1\frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha}\,dt$$

Donc :

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t^\alpha}\,dt = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{1+k\alpha} + (-1)^{n+1}\int_0^1\frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha}\,dt$$

Or :

$$\Big|\int_0^1\frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha}\,dt\Big| \leqslant \int_0^1 t^{(n+1)\alpha}\,dt = \frac{1}{1+(n+1)\alpha}$$

Cette dernière expression tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Ceci termine la question, soit :

$$G(\alpha) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{1+k\alpha}$$

3. a) Le changement de variable proposé est de classe $\mathcal{C}^1$. En intégrant sur $[1,A]$, il vient :

$$\int_1^A\frac{dt}{1+t^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}\int_{A^{1-\alpha}}^1\frac{du}{1+u^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}$$

En prenant la limite lorsque A tend vers l'infini, on obtient :

$$H(\alpha) = \frac{1}{\alpha-1}G\big(\frac{\alpha}{\alpha-1}\big)$$

b) Après simplifications, $H(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha-1}\sum_{k=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^k}{1+k\frac{\alpha}{\alpha-1}} = \sum_{h=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{h-1}}{h\alpha-1}$.

Il vient donc :

$$F(\alpha) = G(\alpha) + H(\alpha) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\Big(\frac{1}{k\alpha-1} - \frac{1}{k\alpha+1}\Big)$$

$$= 1 + 2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2\alpha^2-1}$$

Or $\dfrac{1}{\alpha} \in]0,1[$. Donc :

$$\frac{2}{\alpha}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2-\frac{1}{\alpha^2}} = \frac{\pi}{\sin(\pi/\alpha)} - \alpha \implies 2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2\alpha^2-1} = \frac{\pi/\alpha}{\sin(\pi/\alpha)} - 1$$

D'où :

$$F(\alpha) = \frac{\pi/\alpha}{\sin(\pi/\alpha)}$$

Exercice 1.7.

1. Montrer qu'il existe un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout réel x :

$$(x^2-1)P'(x) + xP(x) = x^3 - x$$

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $h : I \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant la relation suivante : pour tout x élément de I,

$$(E) : (x^2-1)\,h'(x) + xh(x) = x^3 - x$$

2. Montrer que $f = h - P$ est solution d'une équation différentielle (D) de la forme :

$$\forall x \in I, f'(x) = f(x)\,g(x)$$

On précisera la fonction g et les intervalles I sur lesquels g est continue.

3. Résoudre l'équation (D) sur chacun de ces intervalles.

4. En déduire les fonctions h vérifiant (E) sur ces intervalles.

5. Existe-t-il des fonctions vérifiant (E) sur $\mathbb{R}$?

6. Soit M_0 un point du plan, de coordonnées (x_0, y_0). Discuter selon les valeurs de x_0 et y_0 le nombre de courbes $\mathcal{C}$ passant par M_0 et d'équation $y = h(x)$, où h est une fonction vérifiant (E).

Solution :

1. En notant k le degré du polynôme P cherché, on a :

$$P(x) = ax^k + \cdots,\ P'(x) = kax^{k-1} + \cdots$$

D'où :

$$(x^2-1)P'(x) + xP(x) = (k+1)ax^{k+1} + \cdots$$

Donc $k = 2$ et on peut écrire $P(x) = ax^2 + bx + c$ et en remplaçant dans l'équation, il vient :

$$\begin{cases} 3a = 1 \\ 2b = 0 \\ c - 2a = -1 \\ -b = 0 \end{cases}, \text{ soit } \begin{cases} a = 1/3 \\ b = 0 \\ c = -1/3 \end{cases} \text{ et :}$$

$$P(x) = \frac{1}{3}(x^2-1)$$

2. En soustrayant, la fonction f vérifie l'équation :

$$f'(x)(x^2-1) + xf(x) = 0$$

Ainsi $g(x) = \dfrac{-x}{x^2-1}$, sur les intervalles $]-\infty,-1[$, $]-1,1[$ ou $]1,+\infty[$.

3. Sur chacun de ces intervalles, f est de la forme Ke^G, où K est une constante (dépendant de l'intervalle) et G une primitive de g sur cet intervalle ; soit :

$$f(x) = \frac{K}{\sqrt{|x^2-1|}}$$

4. Par les questions précédentes,

$$h_I(x) = \frac{K_I}{\sqrt{|x^2-1|}} + \frac{x^2-1}{3}$$

sur chaque intervalle I.

5. S'il existe une solution φ de (E) définie sur $\mathbb{R}$, sa restriction à chaque intervalle I doit être une fonction h_I trouvée dans la question précédente. De plus, la fonction φ doit être dérivable sur $\mathbb{R}$.

Or les fonctions h_I se raccordent en ± 1 si et seulement si $K_I = 0$, pour chaque intervalle. Ainsi P est la seule solution sur $\mathbb{R}$.

6. $\star$ Si $x_0 \neq \pm 1$, quel que soit y_0, il existe une solution unique donnée par la constante $K = \left(y_0 - \dfrac{x_0^2-1}{3}\right)\sqrt{|x_0^2-1|}$.

$\star$ Si $(x_0, y_0) = (\pm 1, 0)$, alors $K = 0$ donne **la** solution.

$\star$ Si $x_0 = \pm 1$ et $y_0 \neq 0$, il n'existe pas de solution.

Exercice 1.8.

1. Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ non identiquement nulle telle que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt > 0$.

2. a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^3 \mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{n^4+t^4}}\,dt$ converge.

On pose alors, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $I_n = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^3 \mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{n^4+t^4}}\,dt$.

b) Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

c) Montrer la convergence de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et déterminer sa limite.

3. a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{6}{n^4}$.

b) En déduire le développement limité de I_n à l'ordre 7.

4. Justifier la convergence de la série de terme général I_n et exprimer sa somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} I_n$ sous la forme d'une intégrale.

Solution :

1. C'est une question de cours : comme f est positive, on sait que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt \geqslant 0$. Supposons cette intégrale nulle. Alors, pour tout $A > 0$:

$$0 \leqslant \int_0^A f(t)\,dt \leqslant \int_0^{+\infty} f(t)\,dt = 0$$

Donc $\displaystyle\int_0^A f(t)\,dt = 0$. La fonction f est continue sur $[0, A]$ et positive : c'est la fonction nulle sur $[0, A]$. Ceci étant valable pour tout A, f est identiquement nulle sur $\mathbb{R}^+$.

2. a) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $h : t \mapsto \dfrac{t^3 \mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{n^4+t^4}}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}^+$.
Au voisinage de $+\infty$, $h(t) = o(\mathrm{e}^{-t/2})$. On conclut par le théorème de comparaison des fonctions positives :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^3 \mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{n^4+t^4}}\,dt \text{ converge}$$

b) De manière évidente :

$$0 < \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n^2} \text{ , et } \frac{t^3 \mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{(n+1)^4+t^4}} < \frac{t^3 \mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{n^4+t^4}}$$

Ainsi $0 < I_{n+1} < I_n$. La suite (I_n) est strictement décroissante.

c) Par la question précédente, la suite (I_n) converge puisqu'elle est minorée par 0. En fait, pour $n \geqslant 1$:

$$0 < I_n \leqslant \frac{1}{n^2}\int_0^{+\infty} \frac{t^3\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t^4}}\,dt = \frac{C}{n^2}$$

ce qui montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

3. a) On a :

$$0 < I_n \leqslant \frac{1}{n^2}\int_0^{+\infty} \frac{t^3\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{n^4}}dt = \frac{\Gamma(4)}{n^4} = \frac{6}{n^4}$$

b) On a :

$$\begin{aligned}\big|I_n - \frac{6}{n^4}\big| &\leqslant \frac{1}{n^4}\int_0^{+\infty} t^3\mathrm{e}^{-t}\big|\frac{n^2}{\sqrt{n^4+t^4}} - 1\big|\,dt \\ &\leqslant \frac{1}{n^4}\int_0^{+\infty} t^3\mathrm{e}^{-t}\big|\frac{t^4}{\sqrt{n^4+t^4}(n^2+\sqrt{n^4+t^4})}\big|\,dt \leqslant \frac{\Gamma(8)}{n^8}\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\big|I_n - \frac{6}{n^4}\big| = o\big(\frac{1}{n^7}\big)$$

4. La convergence est immédiate au vu de la question 3. a). Pour calculer la somme de la série, on effectue dans I_n le changement de variable linéaire $t = nu$. Il vient, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{k=1}^{N} I_k = \int_0^{+\infty} \frac{u^3\mathrm{e}^{-u}}{(1-\mathrm{e}^{-u})\sqrt{1+u^4}}\,du - R_N$$

avec

$$R_N = \int_0^{+\infty} \frac{u^3\mathrm{e}^{-(N+1)u}}{(1-\mathrm{e}^{-u})\sqrt{1+u^4}}\,du$$

Soit $\varphi : u \mapsto \dfrac{u^3\mathrm{e}^{-u}}{(1-\mathrm{e}^{-u})\sqrt{1+u^4}}$. La fonction φ est définie et continue sur $]0,+\infty[$ et telle que $\lim\limits_{u\to0}\varphi(u) = \lim\limits_{u\to+\infty}\varphi(u) = 0$. Ainsi, il existe $M > 0$ tel que :

$$\sup_{u\in\mathbb{R}^+} |\varphi(u)| \leqslant M$$

et

$$0 \leqslant R_N \leqslant M\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-Nu}du = \frac{M}{N} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Donc :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} I_k = \int_0^{+\infty} \frac{u^3\mathrm{e}^{-u}}{(1-\mathrm{e}^{-u})\sqrt{1+u^4}}\,du$$

Exercice 1.9.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \frac{1}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$$

1. Déterminer les valeurs de n pour lesquelles l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)dx$ converge.

On pose alors $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)dx$.

2. a) Montrer que $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^+} \dfrac{f_n(x)}{f_2(x)}$ existe (avec $n \geqslant 2$) et donner un majorant de cette quantité.

b) En déduire la nature de la série de terme général I_n.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

a) Donner un équivalent de H_n lorsque n tend vers $+\infty$.

b) Pour tout $x \in [0,1]$, calculer $\dfrac{f_n'(x)}{f_n(x)}$. Donner un encadrement de cette quantité en fonction des termes de la suite $(H_k)_{k\geqslant 1}$.

c) En déduire que, lorsque n tend vers $+\infty$, $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx$ est équivalent à $\dfrac{1}{n!\ln n}$.

4. Exprimer, pour tout $n \geqslant 2$, I_{n+1} en fonction de $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx$. Donner un équivalent de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Solution :

1. La fonction f_n est continue sur $[0,+\infty[$ et $f_n(x) \underset{(+\infty)}{\sim} \dfrac{1}{x^n}$, la règle de Riemann montre alors que I_n existe si et seulement si $n \geqslant 2$.

2. a) Pour $n \geqslant 3$, $0 \leqslant \dfrac{f_n(x)}{f_2(x)} = \dfrac{1}{(x+3)\ldots(x+n)} \leqslant \dfrac{2}{n!}$, le résultat restant valable pour $n = 2$:

$$\forall\, n \geqslant 2, \forall\, x \geqslant 0, \frac{f_n(x)}{f_2(x)} \leqslant \frac{2}{n!}$$

b) On a donc, par conservation des inégalités par intégration, lorsque les bornes sont dans l'ordre croissant :

$$\forall\, n \geqslant 2, I_n \leqslant \frac{2I_2}{n!}$$

La série de terme général I_n est donc convergente.

3. a) Pour tout k de $\mathbb{N}^*$: $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{k}$, d'où par sommation :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leqslant \int_1^n \frac{dt}{t} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Soit :

$$\ln n \leqslant H_n \leqslant 1 + \ln n$$

b) $\forall\, x \in [0,1], \dfrac{f_n'(x)}{f_n(x)} = \big(\ln f_n\big)'(x) = -\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x+k}$, et ainsi :

$$H_{n+1} - 1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \leqslant -\frac{f_n'(x)}{f_n(x)} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = H_n$$

c) On a donc :

$$-\frac{1}{H_n} f_n'(x) \leqslant f_n(x) \leqslant -\frac{1}{H_{n+1}-1} f_n'(x)$$

et, en intégrant sur $[0,1]$:

$$-\frac{1}{H_n}(f_n(1) - f_n(0)) \leqslant \int_0^1 f_n(x)\,dx \leqslant -\frac{1}{H_{n+1}-1}(f_n(1) - f_n(0))$$

Comme $f_n(0) - f_n(1) = \dfrac{1}{n!} - \dfrac{1}{(n+1)!} = \dfrac{n}{(n+1)!}$:

$$\frac{n}{(n+1)!H_n} \leqslant \int_0^1 f_n(x)\,dx \leqslant \frac{n}{(n+1)!(H_{n+1}-1)}$$

Avec $H_n \sim H_{n+1} - 1 \sim \ln n$, il vient donc :

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx \sim \frac{1}{n! \ln n}$$

4. Pour $n \geqslant 2$:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f_n(x)\,dx &= \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx - \int_1^{+\infty} f_n(x)\,dx \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)} - \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+2)(x+3)\dots(x+n+1)} \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{n}{(x+1)(x+2)\dots(x+n+1)}\,dx
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = nI_{n+1}$$

et :

$$I_n = \frac{1}{n-1}\int_0^1 f_{n-1}(x)\,dx \sim \frac{1}{n(n-1)!\ln(n-1)} \sim \frac{1}{n!\ln n}$$

Exercice 1.10.

Dans tout l'exercice, f désigne une fonction convexe et de classe C^2 sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. Dans cette question, on suppose que $I = \mathbb{R}$.

a) Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}^+$, on a $f(a) - f(0) \leqslant af'(a)$.

b) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $g(x) = \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$. Montrer que g est croissante.

c) En déduire que le rapport $\dfrac{f(x)}{x}$ admet toujours une limite (finie ou égale à $+\infty$) lorsque x tend vers $+\infty$.

d) On suppose dans cette question que f est majorée sur $\mathbb{R}$. Vérifier que la fonction $x \mapsto f(-x)$ est aussi convexe et majorée sur $\mathbb{R}$. Montrer que $f(0)$ est un maximum global (on pourra appliquer ce qui précède à la fonction f et à la fonction $x \mapsto f(-x)$). Prouver ensuite que c'est aussi un minimum global et en déduire que f est nécessairement constante.

2. Dans cette question on suppose que $I = \mathbb{R}^+$ et que le rapport $\dfrac{f(x)}{x}$ tend vers une limite finie ℓ lorsque x tend vers $+\infty$.

a) Montrer que la fonction g, définie sur $\mathbb{R}^+$ par $g(x) = f(x) - \ell x$, est convexe.

b) Soit a un réel positif et h la fonction définie sur $\mathbb{R}^+ \setminus \{a\}$ par :

$$h(x) = \frac{g(x) - g(a)}{x - a}.$$

Montrer que h est croissante. Quelle est la limite de h en $+\infty$?

c) Montrer que la fonction g est décroissante.

d) En déduire que g admet une limite en $+\infty$ qui peut être finie ou égale à $-\infty$.

e) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = -\ln(1 + x)$. Déterminer, pour cette fonction f, la limite de g en $+\infty$.

3. On suppose que $I = \mathbb{R}$. En utilisant la fonction $x \mapsto f(-x)$, que peut-on déduire de la question précédente ?

4. Soit φ une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\varphi(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\varphi(x)}{x} = 0$. Montrer que φ'' s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

Solution :

1. a) Comme f est convexe et dérivable, f' est croissante et :

$$f(a) - f(0) = \int_0^a f'(t)\,dt \leqslant f'(a)\int_0^a dt = af'(a)$$

b) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x > 0$:

$$g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x) + f(0)}{x^2} \geqslant 0$$

La fonction g est bien croissante.

c) La fonction g étant croissante, la seule alternative est :

$$\text{soit } \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty, \text{ soit } \exists\,\ell \in \mathbb{R},\ \lim_{x\to+\infty} g(x) = \ell$$

Dans le premier cas, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ et dans le second $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \ell$.

d) Si f est majorée sur $\mathbb{R}$ il en est de même de la fonction $\varphi : x \mapsto f(-x)$ et comme $\varphi''(x) = (-1)^2 f''(-x) \geqslant 0$, φ est également convexe.

La fonction g associée à f est donc croissante et de limite nulle en $+\infty$, donc $\forall\, x \in \mathbb{R}^+, g(x) \leqslant 0$, ainsi f est majorée sur $\mathbb{R}^+$ par $f(0)$, donc admet un maximum global sur $\mathbb{R}^+$ valant $f(0)$ et en particulier $f'_d(0) \leqslant 0$. Le même raisonnement appliqué à la fonction φ prouve que $f(0)$ est un maximum global de f sur $\mathbb{R}^-$ et en particulier $f'_g(0) \geqslant 0$.
Ainsi $f'(0) = 0$ et comme f' est croissante, f' est positive sur $\mathbb{R}^+$, négative sur $\mathbb{R}^-$ et f admet un minimum global en 0. Finalement f est constante sur $\mathbb{R}$.

2. a) Comme $g'' = f''$, la fonction g est convexe sur $\mathbb{R}^+$.

b) Pour $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{a\}$, on a $h'(x) = \dfrac{(x-a)g'(x) - g(x) + g(a)}{(x-a)^2}$.

Comme g est convexe, on a $g(a) \geqslant g(x) + (a-x)g'(x)$ (la courbe est au-dessus de sa tangente au point d'abscisse x) et $h'(x) \geqslant 0$.
La fonction h est donc croissante sur $[0, a[$ et sur $]a, +\infty[$ et comme elle est prolongeable par continuité en a (la fonction g est dérivable en a), la fonction h est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

Par ailleurs $h(x) = \dfrac{x}{x-a} \times \dfrac{f(x)}{x} - \ell - \dfrac{f(a)}{x-a}$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$.

c) La fonction h est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et de limite nulle en $+\infty$, donc h est négative sur l'intervalle $[a, +\infty[$ pour tout $a \geqslant 0$.
Ainsi $x \geqslant a \implies g(x) \leqslant g(a)$ et l'universalité de cette implication montre que g est décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

d) La fonction g est décroissante et cette fois l'alternative est : ou bien elle a une limite en $+\infty$ ou bien elle diverge vers $-\infty$ en $+\infty$.

e) On a $f''(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2} > 0$ et f est bien convexe sur $\mathbb{R}^+$. Clairement $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.

3. En appliquant ce qui précède à la fonction $x \mapsto f(-x)$, on en déduit que $\dfrac{f(x)}{x}$ a une limite finie ou infinie en $-\infty$ et que si la limite est finie valant ℓ, alors $x \mapsto f(x) - \ell x$ a une limite en $-\infty$, finie ou valant $-\infty$.

4. Supposons que φ'' ne s'annule pas, alors quitte à changer φ en $-\varphi$, on peut supposer que φ'' est toujours positive et φ est alors convexe. Ce qui précède montre que φ admet une limite en $-\infty$ et en $+\infty$, ces limites étant finies ou valant $-\infty$. Ainsi φ est majorée sur $\mathbb{R}$ et est donc constante, ce qui est incompatible avec le fait que φ'' ne s'annule jamais !

Exercice 1.11.

Dans tout cet exercice $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite réelle décroissante de limite nulle.

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose : $b_n = n(a_{n-1} - a_n)$.

1. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $\sum\limits_{k=1}^{n} b_k = \big(\sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k\big) - na_n$.

2. On suppose dans cette question que la série de terme général a_n converge.

a) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} na_n = 0$.

b) En déduire que la série de terme général b_n converge et que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$.

3. On suppose dans cette question que la série de terme général b_n converge.

a) Montrer que pour tout n et k de $\mathbb{N}^*$, on a : $n(a_n - a_{n+k}) \leqslant \sum_{j=n+1}^{n+k} b_j$.

b) En déduire que la série de terme général a_n converge et que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Solution :

1. Il suffit de faire le calcul :
$\sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} (ka_{k-1} - ka_k) = \sum_{h=0}^{n-1} (h+1)a_h - \sum_{k=0}^{n} ka_k$, et par télescopage partiel :

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=0}^{n-1} a_k - na_n$$

2. a) $\star$ Par décroissance et positivité de la suite (a_n), on a :

$$0 \leqslant na_{2n} \leqslant \sum_{k=n+1}^{2n} a_k$$

Avec $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, on a donc : $0 \leqslant na_{2n} \leqslant A_{2n} - A_{n+1}$ et la convergence de la série de terme général a_n étant la convergence de la suite (A_n), en notant L sa limite, on a $\lim_{n\to\infty} A_{2n} - A_{n+1} = L - L = 0$, soit par encadrement :

$$\lim_{n\to\infty} 2na_{2n} = 0$$

$\star$ Puis, $0 \leqslant (2n+1)a_{2n+1} \leqslant 2na_{2n} + a_{2n}$ donne, puisque $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$:

$$\lim_{n\to\infty} (2n+1)a_{2n+1} = 0$$

Donc, par exhaustion :

$$\lim_{n\to\infty} na_n = 0$$

b) Le résultat de la question 1. donne alors directement la convergence de la série de terme général b_n, avec :

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

3. a) $\sum_{j=n+1}^{n+k} b_j = \sum_{j=1}^{n+k} b_j - \sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{k=0}^{n+k-1} a_k - (n+k)a_{n+k} - \sum_{k=0}^{n-1} a_k + na_n$

$$= \sum_{k=n}^{n+k-1} a_k + na_n - (n+k)a_{n+k}$$

et comme $\sum_{k=n}^{n+k-1} a_k \geqslant k a_{n+k}$, il vient bien :

$$\sum_{j=n+1}^{n+k} b_j \geqslant n(a_n - a_{n+k})$$

b) On en déduit :

$$\sum_{j=1}^{n+k} b_j = \sum_{j=1}^{n} b_j + \sum_{j=n+1}^{n+k} b_j \geqslant \sum_{m=0}^{n-1} a_m - na_n + n(a_n - a_{n+k})$$

$$\geqslant \sum_{m=0}^{n-1} a_m - na_{n+k}$$

$$\sum_{m=0}^{n-1} a_m \leqslant \sum_{j=1}^{n+k} b_j + na_{n+k}$$

On fixe k et on fait tendre n vers l'infini, comme $a_{n+k} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, il vient par prolongement des inégalités à la limite :

$$\sum_{m=0}^{n-1} a_m \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} b_j$$

Les sommes partielles étant majorées et le terme général positif, on en déduit que la série de terme général u_n est convergente et la question 2. assure alors l'égalité des sommes demandées.

Exercice 1.12.

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ fixé. Étudier, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{kn}}{1+x^k}dx$.

Pour les valeurs de n pour lesquelles cette intégrale converge, on pose alors :

$$I_n = (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{kn}}{1+x^k}dx$$

2. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

3. Déterminer un équivalent de I_n lorsque n tend vers $+\infty$ (on pourra effectuer une intégration par parties).

4. Exprimer $I_0 - I_n$ sous forme d'une somme et en déduire la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{kn+1}$.

5. On considère la procédure Pascal suivante :

```
procedure Oral_escp(N,K : integer)
```

```
Var S : integer ;
Begin
      if (N=0) then writeln('1')
            else begin
               Oral_escp(N-1,K) ;
               if (N MOD 2=0) then S := 1 else S := -1 ;
               writeln(S/(K*N+1))
               end ;
End ;
```

Que produit l'appel suivant : `Oral_escp (3,2) ;` ?

Solution :

1. $\star$ Si $n \geqslant 0$, I_n existe car la fonction à intégrer est continue sur le segment $[0,1]$.

$\star$ Si $n < 0$, alors $\dfrac{x^{kn}}{1+x^k} \underset{(0)}{\sim} x^{kn}$ et l'intégrale existe si et seulement si $kn < -1$, ce qui est toujours le cas, sauf pour $n = -1$ et $k = 1$. Bref :

$$I_n \text{ existe sauf dans le cas } n = -1 \text{ et } k = 1$$

2. $|I_n| \leqslant \displaystyle\int_0^1 x^{kn}\,dx = \frac{1}{kn+1}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

3. En intégrant par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^{kn}}{1+x^k}\,dx &= \Big[\frac{x^{kn+1}}{kn+1}\times\frac{1}{1+x^k}\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{kn+1}}{kn+1}\times\frac{-kx^{k-1}}{(1+x^k)^2}\,dx \\ &= \frac{1}{2(kn+1)} + \frac{k}{kn+1}\int_0^1 \frac{x^{k(n+1)}}{(1+x^k)^2}\,dx\end{aligned}$$

Comme $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{k(n+1)}}{(1+x^k)^2}\,dx \leqslant \int_0^1 x^{k(n+1)}\,dx = \frac{1}{k(n+1)+1}$, on en déduit :

$$\frac{1}{2(kn+1)} \leqslant (-1)^n I_n \leqslant \frac{1}{2(kn+1)} + \frac{k}{kn+1}\times\frac{1}{kn+k+1}$$

Ainsi :

$$I_n \underset{(\infty)}{\sim} \frac{(-1)^n}{2kn}$$

4. $I_0 - I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1-(-x^k)^n}{1+x^k}\,dx = \sum_{\ell=0}^{n-1}\int_0^1 (-x)^{k\ell}\,dx = \sum_{\ell=0}^{n-1}\frac{(-1)^{k\ell}}{k\ell+1}$

Ainsi :

$$(-1)^k(I_0 - I_n) = \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{(-1)^\ell}{k\ell+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (-1)^k I_0$$

Ce qui prouve la convergence demandée.

5. Il affiche, pour $k = 2$, les valeurs de u_0, u_1, u_2, u_3.

Exercice 1.13.

1. a) Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, on a :

$$|x \ln(x^2 + y^2)| \leqslant 2\sqrt{x^2 + y^2} \times |\ln(x^2 + y^2)|$$

b) En déduire que la fonction f dfinie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, à valeurs réelles par :

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)^x$$

est prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$.

2. Étudier l'existence des dérivées partielles d'ordre 1 de f en tout point .

3. Déterminer les points critiques de f.

4. a) Montrer que f n'admet pas d'extremum local en $(0, 0)$ (on pourra étudier $h : x \mapsto f(x, 0) - 1$).

b) Montrer que f admet un minimum local en $(\mathrm{e}^{-1}, 0)$.

c) Montrer que f n'admet pas d'extremum local en $(0, 1)$.

Solution :

1. a) On a $|x| \leqslant \sqrt{x^2 + y^2}$, donc $|x \ln(x^2 + y^2)| \leqslant \sqrt{x^2 + y^2} \ln(x^2 + y^2)$, ou encore :

$$|x \ln(x^2 + y^2)| \leqslant 2\sqrt{x^2 + y^2} \ln(\sqrt{x^2 + y^2})$$

b) Comme $\lim\limits_{u\to 0^+} 2u \ln u = 0$, il vient :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x \ln(x^2 + y^2) = 0$$

Or pour $(x, y) \neq (0, 0)$, $f(x, y) = \exp(x \ln(x^2 + y^2)) \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 1$, soit :

$$\text{En posant } f(0, 0) = 1,\ f \text{ est continue sur } \mathbb{R}^2.$$

2. $\star$ f est clairement de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, avec en particulier :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \big(\ln(x^2 + y^2) + \frac{2x^2}{x^2 + y^2}\big) \exp\big(x \ln(x^2 + y^2)\big)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2} \exp\big(x \ln(x^2 + y^2)\big)$$

$\star$ $\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=0 \underset{y\to 0}{\longrightarrow} 0$, donc $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existe et vaut 0.

$\star$ $\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\dfrac{\mathrm{e}^{x\ln x^2}-1}{x} \underset{x\to 0}{\sim} \ln x^2 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\infty$, donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ n'existe pas.

3. $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} xy=0 \\ \ln(x^2+y^2)+\dfrac{2x^2}{x^2+y^2}=0 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} x=0 \text{ et } y\in\{-1,1\} \\ \text{ou} \\ y=0 \text{ et } x\in\{-1/\mathrm{e},1/\mathrm{e}\} \end{cases}$$

Il existe donc quatre points critiques.

4. a) Soit h définie par : $h(x)=f(x,0)-1=\begin{cases} \mathrm{e}^{x\ln x^2}-1 & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$

Si $x\in\,]0,1[$, $f(x,0)-1<0$ et si $x\in\,]-1,0[$, $f(x,0)-1>0$

Donc f n'a pas d'extremum local en $(0,0)$.

b) Pour $y\neq 0, \ln(x^2+y^2)>\ln x^2$, donc si $x>0, x\ln(x^2+y^2)\geqslant x\ln x^2$ et

$$f(x,y)\geqslant f(x,0)=h(x)+1.$$

Une étude rapide de la fonction h montre que la restriction de h à $\mathbb{R}^+$ est minimale au point $1/\mathrm{e}$ (car on a $h'(x)=\mathrm{e}^{x\ln x^2}(2+\ln x^2)$), on peut donc écrire :

$$\forall\, x>0, \forall\, y\neq 0, f(x,y)\geqslant h(\mathrm{e}^{-1})+1=f(\mathrm{e}^{-1},0)$$

f admet donc un minimum local en $(\mathrm{e}^{-1},0)$.

c) $f(x,1)-f(0,1)=\mathrm{e}^{x\ln(x^2+1)}-1$ qui est du signe de x, donc f n'admet pas d'extremum en $(0,1)$.

Exercice 1.14.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$, et f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\dfrac{x^k}{k!}\mathrm{e}^{-x}$.

1. Étudier les variations de la fonction f_n et tracer sa courbe représentative dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

2. Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, l'intégrale, $I_n=\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n\mathrm{e}^{-t}dt$ converge et donner sa valeur en fonction de n.

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \geqslant 0$, on a : $f_n(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{t^n}{n!}\mathrm{e}^{-t}dt$.

4. Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\mathrm{e}^{-x} f_{n-k}(x) = f_n(2x)$.

5. Vérifier que, pour tout $x > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} f_n(t)\,dt$ est convergente et a pour valeur $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f_k(x)$.

6. Comparer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\lim_{n\to+\infty}\int_0^x \frac{t^n}{n!}\mathrm{e}^{-t}dt\right]$$

et

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\lim_{x\to+\infty}\int_0^x \frac{t^n}{n!}\mathrm{e}^{-t}dt\right]$$

Solution :

1. On a : $f_n'(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\mathrm{e}^{-x} - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}x^k = -\frac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}$

Donc :

n pair :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_n'(x)$		$-$	0	$-$	
f_n	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	0

n impair :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
f_n	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

2. La question précédente donne :

$$\int_a^b t^n\mathrm{e}^{-t}\,dt = n!\big(f_n(a) - f_n(b)\big)$$

Donc :

$$I_n = n!$$

3. De même :

$$\int_x^{+\infty} t^n\mathrm{e}^{-t}\,dt = n!f_n(x)$$

4. $f_n(2x) = \displaystyle\int_{2x}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}\mathrm{e}^{-t}\,dt$. Et, avec le changement de variable $t = u + x$:

$$f_n(2x) = \int_x^{+\infty} \frac{(u+x)^n}{n!} \mathrm{e}^{-(u+x)}\, du = \int_x^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(n-k)!} x^k u^{n-k} \mathrm{e}^{-x} \mathrm{e}^{-u}\, du$$

$$= \mathrm{e}^{-x} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \int_x^{+\infty} \frac{u^{n-k}}{(n-k)!} \mathrm{e}^{-u}\, du$$

$$f_n(2x) = \mathrm{e}^{-x} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f_{n-k}(x)$$

5. La convergence est immédiate, par croissances comparées, et :

$$\int_x^{+\infty} f_n(t)\, dt = \sum_{k=0}^{n} \int_x^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \mathrm{e}^{-t}\, dt = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$$

6. On a, respectivement :

$$\lim_{x\to+\infty} \left[\lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{t^n}{n!} \mathrm{e}^{-t} dt \right] = \lim_{x\to+\infty} \left(1 - \lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) = \lim_{x\to+\infty} (1-1) = 0$$

et :

$$\lim_{n\to+\infty} \left[\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{t^n}{n!} \mathrm{e}^{-t} dt \right] = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$$

Exercice 1.15.

Pour tout entier naturel n, on définit le polynôme P_n par :

$$P_0 = 1,\ P_1 = X, \ldots, P_n = \frac{X(X-1)\cdots(X-n+1)}{n!}, \ldots$$

Soit f une application définie sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs réelles, de classe C^∞.

1. Montrer que pour tout entier relatif j, $P_n(j)$ est un entier relatif.

2. Montrer qu'il existe une unique suite de réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possédant la propriété suivante :

« pour tout n de $\mathbb{N}$, $f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k P_k(x)$ s'annule aux points $0, 1, 2, \ldots, n$. »

(on pourra résoudre un système d'équations linéaires d'inconnues $a_0, a_1, \ldots, a_n$.)

3. Soit $b > 0$ donné.
Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associée à la fonction $f : x \mapsto f(x) = b^x$ est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $a_n = (b-1)^n$.

4. Soit $x \geqslant 0$ fixé. Montrer que pour tout entier naturel N, il existe un réel θ tel que :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k P_k(x) + P_{N+1}(x) f^{(N+1)}(\theta)$$

(on pourra utiliser la fonction $g : t \mapsto g(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{N} a_k P_k(t) - AP_{N+1}(t)$, où A est une constante judicieusement choisie, et appliquer le théorème de Rolle).

Solution :

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.
$\star$ Si $0 \leqslant j \leqslant n-1$, alors $P_n(j) = 0$;
$\star$ Si $j \geqslant n$, alors $P_n(j) = \binom{n}{j}$;
$\star$ Si $j < 0$, $P_n(j) = (-1)^n \dfrac{|j|(|j|+1)\dots(|j|+n-1)}{n!} = (-1)^n \binom{|j|+n-1}{|j|}$.
dans tous les cas $P_n(j) \in \mathbb{Z}$.

2. Pour tout n de $\mathbb{N}$, on veut réaliser $\sum_{k=0}^{n} a_k P_k(j) = f(j)$ pour tout j de $[\![0, n]\!]$.
Matriciellement cela se traduit par :

$$M \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(0) \\ \vdots \\ f(n) \end{pmatrix}$$

où M est la matrice de terme générique $m_{i,j} = \binom{i}{j}$, les lignes et les colonnes étant pour une fois numérotées de 0 à n.
Cette matrice est trigonale inférieure, les coefficients diagonaux valant tous 1, ce qui prouve que M est inversible.
On peut calculer l'inverse de M en interprétant l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ canoniquement associé à ${}^tM$: cet endomorphisme est l'application $P(X) \mapsto P(X+1)$, dont l'isomorphisme réciproque est l'application $P(X) \mapsto P(X-1)$ de matrice ${}^tM^{-1}$.
Bref, on trouve M^{-1} de terme générique $m'_{i,j} = (-1)^{i+j}\binom{i}{j}$ et ainsi :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, j \in [\![0, n]\!], a_j = \sum_{k=0}^{j} (-1)^{j+k} \binom{j}{k} f(k)$$

On constate que ces nombres sont bien indépendants de n et uniquement déterminés par f.

3. Ici : $a_j = \sum_{k=0}^{j} (-1)^{j+k} \binom{j}{k} b^k = (-1)^j \sum_{k=0}^{j} (-b)^k \binom{j}{k} = (-1)^j (1-b)^j$, soit :

$$\forall\, j \in \mathbb{N}, a_j = (b-1)^j$$

4. $\star$ Supposons dans un premier temps que $x \notin [\![0, N]\!]$.
On définit la fonction g comme dans l'énoncé en choisissant A de façon à ce que l'on ait $g(x) = 0$ (c'est possible, puisque $P_{N+1}(x) \neq 0$).

La fonction g est indéfiniment dérivable et s'annule en $(N+2)$ points distincts (les points $0, 1, \ldots, N$ et x). En rangeant ces points et en appliquant de nombreuses fois le théorème de Rolle, on en déduit que la fonction $g^{(N+1)}$ s'annule au moins une fois en un point que nous noterons θ et qui est compris entre le plus petit et le plus grand des points utilisés, donc appartient à $\mathbb{R}^+$.

Or P_{N+1} est de degré $N+1$ et de coefficient dominant $\dfrac{1}{(N+1)!}$, donc $P_{N+1}^{(N+1)} = 1$ et il reste :

$$g^{(N+1)}(t) = f^{(N+1)}(x) - A$$

Donc $A = f^{(N+1)}(\theta)$, ce qu'il fallait.

$\star$ Si $x \in [\![0, N]\!]$, la formule demandée est vraie quel que soit le choix de θ.

Exercice 1.16.

Soit n un entier naturel. On considère la fonction F_n définie sur $\mathbb{R}$ par, pour tout x réel :

$$F_n(x) = \frac{1}{2^n n!}(x^2-1)^n = \frac{1}{2^n n!}(x-1)^n(x+1)^n$$

et P_n l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par, pour tout x réel :

$$P_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ F_n^{(n)}(x) & \text{si } n \geqslant 1 \end{cases}$$

où $F_n^{(n)}$ désigne la dérivée d'ordre n de F_n.

1. Montrer que P_n est une fonction polynôme dont on déterminera le degré et le coefficient du terme de plus haut degré.

2. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. On note $B_{n,k}$ le polynôme défini par $B_{n,k} = (X+1)^k(X-1)^{n-k}$.

a) Montrer que $(B_{n,0},\ B_{n,1},\ \ldots,\ B_{n,n})$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Montrer l'égalité :

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^n}\binom{n}{k}^2 B_{n,k}$$

c) En déduire que $P_n(1) = 1$ et $P_n(-1) = (-1)^n$.

d) Démontrer que $P_n(-X) = (-1)^n P_n(X)$. Étudier la parité de P_n suivant les valeurs de n.

3. On suppose dans cette question que $n \in \mathbb{N}^*$. Soit p un entier tel que $0 \leqslant p \leqslant n-1$.

a) Démontrer que, pour tout x réel :

$$F_n^{(p)}(x) = \sum_{k=0}^{p} \frac{p!}{2^n n!} \binom{n}{k} \binom{n}{p-k} B_{2n-p,n-k}(x)$$

b) En déduire que $F_n^{(p)}(1) = 0$ et $F_n^{(p)}(-1) = 0$.

c) Démontrer que P_n possède n racines réelles distinctes dans l'intervalle $]-1,\ 1[$.

Solution :

1. F_n est une fonction polynôme de degré $2n$ et de coefficient dominant $\frac{1}{2^n n!} X^{2n}$, il en résulte que $P_n = F_n^{(n)}$ est une fonction polynôme de degré n et de coefficient dominant :

$$\frac{2n(2n-1)\dots(n+1)}{2^n n!} X^n = \frac{1}{2^n} \binom{2n}{n} X^n$$

2. a) Soit $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k B_{n,k}(X) = 0$ une relation de dépendance entre les polynômes de la famille. Supposons les coefficients non tous nuls et soit i le plus petit des indices k tels que $\alpha_k \neq 0$. Il reste donc :

$$\alpha_i B_{n,i}(X) + \sum_{k=i+1}^{n} \alpha_k B_{n,k}(X) = 0.$$

Dans $\mathbb{R}[X]$ on peut alors simplifier par $(X+1)^i$ et en substituant ensuite à X la valeur -1, on trouve $\alpha_i = 0$, ce qui prouve que notre hypothèse est absurde.
(En clair la famille est libre car échelonnée en valuation par rapport à $(X+1)$).
La famille est libre, formée d'éléments de $\mathbb{R}_n[X]$, et de cardinal *ad hoc*,il s'agit bien d'une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Tout polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ se décompose sur cette base, et en appliquant la formule de Leibniz :

$$\begin{aligned} P_n(X) &= \frac{1}{2^n n!}[(X-1)^n (X+1)^n]^{(n)} \\ &= \frac{1}{2^n n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [(X-1)^n]^{(k)} [(X+1)^n]^{(n-k)} \\ &= \frac{1}{2^n n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times \frac{n!}{(n-k)!} (X-1)^{n-k} \times \frac{n!}{k!} (X+1)^k \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 B_{n,k}(X)$$

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^n} \binom{n}{k}^2 B_{n,k}$$

c) A chaque fois, il n'y a qu'un terme utile et :

$$P_n(1) = \frac{1}{2^n} B_{n,n}(1) = 1 \; ; \; P_n(-1) = \frac{1}{2^n} B_{n,0}(-1) = (-1)^n$$

d) On a :

$$P_n(-X) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 (-X+1)^k (-X-1)^{n-k}$$

$$= (-1)^n \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 (X-1)^k (X+1)^{n-k} = (-1)^n P_n(X)$$

Ainsi P_n a même parité que n, si vous nous permettez cet abus.

3. a) Toujours grâce à la formule de Leibniz :

$$F_n^{(p)}(X) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \times \frac{n!}{(n-k)!} (X-1)^{n-k} \times \frac{n!}{(n-p+k)!} (X+1)^{n-p-k}$$

et en regroupant :

$$F_n^{(p)}(X) = \sum_{k=0}^{p} \frac{p!}{2^n n!} \binom{n}{k} \binom{n}{p-k} B_{2n-p,n-k}(X)$$

b) C'est clair par la formule précédente et on pourrait aussi invoquer le rapport entre l'ordre de multiplicité d'une racine et l'annulation des dérivées successives ...

c) $\star$ F_n s'annule en -1 et 1, donc (Rolle) F_n' s'annule en au moins un point de $]-1,1[$.

$\star$ F_n' s'annule en -1 et 1 et en au moins un point de $]-1,1[$, donc (Rolle et Rolle) F_n'' s'annule en au moins deux points de $]-1,1[$.

$\star$ Au bout de n opérations, $F_n^{(n)}$ s'annule en au moins n points de l'intervalle $]-1,1[$ et comme F_n est de degré n, F_n s'annule exactement n fois sur $]-1,1[$.

Exercice 1.17.

1. Soit f une fonction croissante de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout réel $t > 0$, on considère la fonction g_t définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $g_t(x) = \dfrac{f(tx)}{f(x)}$.

On suppose que, pour tout $t > 0$, $g_t(x)$ admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$. On définit alors la fonction L par : $\forall\, t > 0, L(t) = \lim\limits_{x \to +\infty} g_t(x)$.

a) Montrer que L est croissante et calculer $L(1)$

b) Montrer que $\forall (s,t) \in (]0,+\infty[)^2,\ L(st) = L(s) \times L(t)$.

En déduire que : $\forall\, x \in]0,+\infty[, L\big(\frac{1}{x}\big) = \frac{1}{L(x)}$, puis que :

$$\forall\, s \in]0,+\infty[, \forall\, n \in \mathbb{N}^*, L(s^n) = (L(s))^n \text{ et } L(s^{1/n}) = (L(s))^{1/n}.$$

2. Montrer que L est continue sur $]0,+\infty[$ (on pourra distinguer $t = 1$ et $t \neq 1$).

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $h(x) = \ln(L(\mathrm{e}^x))$.

a) Montrer que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^2,\ h(x+y) = h(x) + h(y)$.

b) En considérant $\displaystyle\int_0^1 h(x+t)dt$, montrer que h est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et calculer $h'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

c) En déduire qu'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall\, t \in]0,+\infty[,\ L(t) = t^k$.

Solution :

1. a) $0 < t_1 < t_2 \implies \forall\, x \geqslant 0, 0 \leqslant t_1 x \leqslant t_2 x \implies g_{t_1}(x) \leqslant g_{t_2}(x)$ et, par prolongement des inégalités à la limite : $L(t_1) \leqslant L(t_2)$:

La fonction L est croissante.

Il est clair que $L(1) = 1$.

b) $\star$ On peut écrire : $g_{st}(x) = \dfrac{f(stx)}{f(x)} = \dfrac{f(s(tx))}{f(tx)} \times \dfrac{f(tx)}{f(x)}$ et par passage à la limite lorsque x (donc aussi tx) tend vers $+\infty$:

$$L(st) = L(s)L(t)$$

$\star$ Ainsi $1 = L(1) = L\big(x\frac{1}{x}\big) = L(x)L\big(\frac{1}{x}\big)$ et :

$$L\big(\frac{1}{x}\big) = \frac{1}{L(x)}$$

$\star$ $L(st) = L(s)L(t)$ donne par un argument de récurrence simple :

$$\forall\, s > 0, \forall\, n \in \mathbb{N}^*, L(s^n) = (L(s))^n$$

$\star$ Ainsi : $L(s) = L((s^{1/n})^n) = (L(s^{1/n}))^n$ et $L(s^{1/n}) = (L(s))^{1/n}$

2. La fonction L est croissante, donc admet en tout point t une limite à gauche $L_-(t)$ et une limite à droite $L_+(t)$ et L est continue en t si la limite à gauche et la limite à droite en t sont égales (d'ailleurs alors égales à $L(t)$).

⋆ On a, par exemple : $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^{1/n} = 1$ et :

$$L_+(1) = \lim_{n\to+\infty} L(2^{1/n}) = \lim_{n\to+\infty} (L(2))^{1/n} = L(2)^0 = 1 = L(1)$$

⋆ On procède exactement de la même façon pour la limite à gauche en 1 en partant par exemple de $(1/2)^{1/n}$ ...

$$L \text{ est continue au point 1.}$$

⋆ Soit $x_0 \neq 1$ et (u_n) une suite quelconque convergente de limite x_0, alors par continuité de L en 1 :

$$L(u_n) = L\big(\frac{u_n}{x_0}x_0\big) = L\big(\frac{u_n}{x_0}\big)L(x_0) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} L(1)L(x_0) = L(x_0)$$

Et, par le théorème de continuité séquentielle, L est continue au point x_0.

3. a) $h(x+y) = \ln(L(\mathrm{e}^{x+y})) = \ln(L(\mathrm{e}^x\mathrm{e}^y)) = \ln(L(\mathrm{e}^x)L(\mathrm{e}^y))$
$= \ln(L(\mathrm{e}^x) + \ln(L(\mathrm{e}^y) = h(x) + h(y).$

b) Soit H une primitive de la fonction continue h, on a :

$$H(x+1) - H(x) = \int_x^{x+1} h(u)\,du = \int_0^1 h(x+t)\,dt = \int_0^1 (h(x)+h(t))\,dt$$
$$= h(x) + C$$

La fonction H étant de classe $\mathcal{C}^1$, il vient en dérivant :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^+, h'(x) = h(x+1) - h(x) = h(x) + h(1) - h(x) = h(1)$$

Ainsi la fonction h est affine et comme $h(0) = \ln(L(1)) = 0$, h est linéaire :

$$\exists\, \alpha \in \mathbb{R}, \forall\, x \geqslant 0, h(x) = \alpha x$$

Alors :

$$\forall\, t > 0, L(t) = L(\mathrm{e}^{\ln t}) = \mathrm{e}^{h(\ln t)} = \mathrm{e}^{\alpha \ln t} = t^\alpha$$

Exercice 1.18.

Dans tout cet exercice, $I = \big[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\big]$.

On définit une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'applications de I sur $\mathbb{R}$, par : $f_0 = 1$, et pour tout $n \geqslant 0$, pour tout $x \in I$:

$$f_{n+1}(x) = 1 + \frac{1}{2}\int_0^x (f_n(t) + f_n(t^2))dt$$

1. a) Calculer f_1 et f_2.

b) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, f_n est polynomiale.

2. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sup\limits_{x\in I} |f_n(x) - f_{n-1}(x)|$ existe. On le note D_n.

b) Calculer D_1.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $D_{n+1} \leqslant \frac{D_n}{2}$. En déduire la limite de la suite $(D_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

3. Montrer que pour tout x fixé de I, la suite réelle $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On note $f(x)$ sa limite.

4. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M_n = \sup_{x\in I} |f_n(x)|$.

a) Justifier l'existence de M_n.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $M_n \leqslant 1 + \frac{M_{n-1}}{2}$.

5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $(x, y) \in I^2$: $|f_n(x) - f_n(y)| \leqslant 2|x - y|$. En déduire que la fonction f est continue sur I.

6. a) Montrer que pour tout $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, pour tout $x \in I$:

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{1}{2^n}\big(1 - \frac{1}{2^p}\big)$$

b) En déduire que pour tout $x \in I$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $|f(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{1}{2^n}$.

c) Montrer que f vérifie, pour tout x de I :

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2}\int_0^x (f(t) + f(t^2))dt$$

Solution :

1. a) $f_1(x) = 1 + \frac{1}{2}\int_0^x 2dt = 1 + x$;

$$f_2(x) = 1 + \frac{1}{2}\int_0^x (2 + t + t^2)\,dt = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$

b) Si $t \mapsto f_n(t)$ est polynomiale, il en est de même de $t \mapsto f_n(t^2)$; les fonctions polynomiales ayant des primitives polynomiales, $t \mapsto f_{n+1}(t)$ est encore polynomiale. On conclut par l'argument de récurrence habituel.

2. a) f_n et f_{n-1} sont continues sur le segment $[-1/2; 1/2]$, donc y sont bornées, ainsi D_n existe.

b) $f_1(x) - f_0(x) = x$, donc $D_1 = \frac{1}{2}$.

c) $|f_{n+1}(x) - f_n(x)| = \frac{1}{2}\Big|\int_0^x ((f_n(t) - f_{n-1}(t)) + (f_n(t^2) - f_{n-1}(t^2)))\,dt\Big|$

$$\leqslant \frac{1}{2}\Big|\int_0^x (|f_n(t)-f_{n-1}(t)|+|f_n(t^2)-f_{n-1}(t^2)|)\,dt\Big|$$

Comme $t\in[-1/2,1/2] \implies t^2\in[-1/2,1/2]$, on peut majorer, et :

$$|f_{n+1}(x)-f_n(x)|\leqslant \frac{1}{2}\Big|\int_0^x (D_n+D_n)\,dt\Big| \leqslant D_n|x| \leqslant \frac{1}{2}D_n$$

et par passage à la borne supérieure :

$$D_{n+1}\leqslant \frac{1}{2}D_n$$

Ainsi $D_n\leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}D_1=\left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $\lim\limits_{n\to\infty} D_n=0$.

3. La question précédente montre que la série de terme général $f_n(x)-f_{n-1}(x)$ est convergente pour tout x de I. Ceci signifie que la suite de terme général $f_n(x)$ est convergente pour tout x de I.

4. a) f_n est continue sur I, donc bornée sur ce segment.

b) $f_n(x)| = \Big|1+\frac{1}{2}\displaystyle\int_0^x (f_{n-1}(t)+f_{n-1}(t^2))\,dt\Big| \leqslant 1+\frac{1}{2}\Big|\int_0^x 2M_{n-1}\,dt\Big|$

$$\leqslant 1+M_{n-1}|x| \leqslant 1+M_{n-1}$$

D'où, par passage à la borne supérieure :

$$M_n\leqslant 1+\frac{1}{2}M_{n-1}$$

5. $|f_n(x)-f_n(y)| = \frac{1}{2}\Big|\displaystyle\int_x^y (f_{n-1}(t)+f_{n-1}(t^2))\,dt\Big| \leqslant \frac{1}{2}|y-x|2M_{n-1}$.

Or une récurrence élémentaire montre que pour tout k, $M_k\leqslant 2$ et ainsi :

$$\forall\, x\in I, |f_n(x)-f_n(y)|\leqslant 2|x-y|$$

Par prolongement des inégalités à la limite, on a donc :

$$\forall\, x\in I, |f(x)-f(y)|\leqslant 2|x-y|$$

et f est continue sur I.

6. a) $f_{n+p}(x)-f_n(x)=\displaystyle\sum_{k=n+1}^{n+p}(f_k(x)-f_{k-1}(x))$, d'où :

$$|f_{n+p}(x)-f_n(x)|\leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p}|f_k(x)-f_{k-1}(x)|\leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p}\left(\frac{1}{2}\right)^k=\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^p\right)$$

b) n étant fixé, ainsi que x, il n'y a plus qu'à faire tendre p vers l'infini, et :

$$\forall\, x\in I, |f(x)-f_n(x)|\leqslant \frac{1}{2^n}$$

c) Il suffit de vérifier que pour tout x de I :

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^x (f_n(t)+f_n(t^2))\,dt = \int_0^x (f(t)+f(t^2))\,dt$$

Or :

$$\Big|\int_0^x ((f_n(t)-f(t))-(f_n(t^2)-f(t^2)))\,dt\Big| \leqslant \Big|\int_0^x \big(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n}\big)\,dt\Big| \leqslant \frac{1}{2^n}$$

On a donc bien le résultat annoncé, et donc :

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1+\frac{1}{2}\int_0^x (f(t)+f(t^2))\,dt$$

Exercice 1.19.

Soit $E = C([0,1],\mathbb{R})$, l'espace vectoriel des fonctions définies et continues sur $[0,1]$, à valeurs réelles.
À tout $f \in E$, on associe g définie sur $[0,1]$ par

$$g(x) = \int_0^1 \inf(x,t)f(t)\,dt$$

1. Vérifier que g est un élément de E et que l'application $u : f \mapsto g$ est un endomorphisme de E.

2. Montrer que $g = u(f)$ si et seulement si g est deux fois dérivable sur $[0,1]$ telle que $g'' = -f$, $g'(1) = 0$ et $g(0) = 0$.

3. L'application u est-elle injective ?

Solution :

1. Pour $x \in [0,1]$, on a :

$$g(x) = \int_0^1 \inf(x,t)f(t)\,dt = \int_0^x tf(t)\,dt + \int_x^1 xf(t)\,dt.$$

En notant F_1 une primitive de $t \mapsto tf(t)$ et F une primitive de f, on a donc :

$$g(x) = F_1(x) - F_1(0) + x(F(1)-F(x))$$

Sous cette forme, il est clair que la fonction g est continue sur $[0,1]$ (et même de classe $\mathcal{C}^1$).

D'autre part, la linéarité de l'opérateur $f \mapsto g$ résulte des propriétés des opérations et de la linéarité de l'opérateur « intégration sur $[0,1]$ ».

2. Soit $f \in E$ et $g = u(f)$. Nous avons déjà dit que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et :
$g'(x) = F_1'(x) + (F(1)-F(x)) - xF'(x) = xf(x) + F(1) - F(x) - xf(x)$

$$\forall\, x \in [0,1], g'(x) = \int_x^1 f(t)\, dt$$

La fonction g' est donc encore de classe $\mathcal{C}^1$ et $g''(x) = -f(x)$.

Enfin, $g(0) = F_1(0) - F_1(0) + 0 \times (F-1) - F(0)) = 0$ et $g'(1) = \displaystyle\int_1^1 f(t)\, dt = 0$.

Réciproquement, considérons une fonction g deux fois dérivable sur $[0,1]$, telle que $g(0) = 0$, $g'(1) = 0$ et posons $f = -g''$. On a :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \inf(x,t) f(t)\, dt &= \int_0^x -tg''(t)\, dt - x\int_x^1 g''(t)\, dt \\ &= \big[-tg'(t)\big]_0^x + \int_0^x g'(t)\, dt - x\big[g'(t)\big]_x^1\end{aligned}$$

$$\int_0^1 \inf(x,t) f(t)\, dt = -xg'(x) + g(x) - g(0) + xg'(x) - xg'(1) = g(x)$$

On a donc bien $g = u(f)$.

3. Si f est telle que $g = u(f) = 0$, alors g'' est la fonction nulle sur $[0,1]$ et donc f aussi, ce qui prouve que u est un opérateur injectif.

2

ALGÈBRE

Exercice 2.1.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et A, B les deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer un polynôme annulateur de degré minimal et de coefficient du terme de plus haut degré 1 de la matrice A, respectivement de la matrice B.

2. Justifier que A et B ne sont pas semblables.

3. a) Existe-t-il un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ tel que $P(A) = B$?

b) Existe-t-il un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(A)$ soit semblable à B ?

4. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1, et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ de matrice M dans la base canonique.

a) Montrer que si M est diagonalisable, alors il existe un réel non nul ℓ tel que M soit semblable à ℓA.

b) On suppose que M n'est pas diagonalisable. Comparer $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$. Montrer que M est semblable à B.

Solution :

1. Il est facile de vérifier que les deux polynômes demandés sont $M_A(X) = X(X-1)$ et $M_B(X) = X^2$.

2. Les deux matrices A et B ne peuvent être semblables puisqu'elles n'ont pas les mêmes valeurs propres. En effet 1 est valeur propre de A (ainsi que 0), mais n'est pas valeur propre de B qui n'a que 0 comme valeur propre.

3. a) La matrice A est diagonale ; pour tout polynôme P, la matrice $P(A)$ est diagonale. Or B n'est pas diagonale, donc $P(A)$ ne sera jamais égal à B.

b) La matrice B n'est pas diagonalisable (son unique valeur propre est 0 ; si elle était diagonalisable, elle serait semblable à la matrice nulle, donc égale à la matrice nulle). Or pour tout polynôme P, la matrice $P(A)$ est diagonale, donc $P(A)$ et B ne sont pas semblables.

4. a) Si $\mathrm{rg}(f) = 1$, alors $\dim \mathrm{Ker}(f) = n-1$. Ainsi 0 est valeur propre de f et le sous-espace propre associé est de dimension $(n-1)$. Si f est diagonalisable, soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de vecteurs propres de f, telle que $(e_2, \ldots, e_n)$ soit une base de $\mathrm{Ker}\, f$.

On a $f(e_1) = \ell e_1$ et pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, $f(e_i) = 0$. Ainsi la matrice M est semblable à ℓA.

b) Si f n'est pas diagonalisable, on a $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, f$. En effet, soit x un vecteur non nul de $\mathrm{Im}\, f$. Alors $f(x)$ est encore dans $\mathrm{Im}\, f$, donc est colinéaire à x et si on avait $f(x) = \lambda x$, avec $\lambda \neq 0$, x serait propre et f serait diagonalisable. Donc $f(x) = 0$.

Soit alors $e_1 \notin \mathrm{Ker}\, f$. On a $f(e_1) = e_2 \in \mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, f$. On complète e_2 en une base $(e_2, \ldots, e_n)$ de $\mathrm{Ker}\, f$.

Il est facile de vérifier que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$ et que dans cette base, la matrice associée à f est B.

Exercice 2.2.

Soit $(A_n)_{n \geqslant 0}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. On définit une suite de vecteurs-colonnes $(X_n)_{n \geqslant 0}$ de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C})$ par $X_0 \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C})$ et pour tout $n \geqslant 0$:

$$X_{n+1} = A_n X_n.$$

1. Montrer que l'ensemble S des suites d'éléments de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C})$ ainsi défini est un sous-espace vectoriel de $\left(\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C})\right)^{\mathbb{N}}$.

2. Soit T l'application définie sur S par, pour tout $(X_n)_{n\geqslant 0} \in S$:

$$T((X_n)_{n\geqslant 0}) = X_0$$

Montrer que T est un isomorphisme de S sur $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C})$.
En déduire la dimension de S, ainsi qu'une base de S.

3. Dans cette question, on suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \begin{pmatrix} \frac{n+1}{n+2} & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Exprimer X_n en fonction de n et X_0.

b) Une suite d'éléments $(X_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C})$ est dite *convergente* dans $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C})$, si, en notant $X_n = \begin{pmatrix} x_{1,n} \\ x_{2,n} \end{pmatrix}$, les deux suites complexes $(x_{1,n})_n$ et $(x_{2,n})_n$ convergent dans $\mathbb{C}$
Étudier la convergence de la suite $(X_n)_{n\geqslant 0}$ en fonction de X_0.

Solution :

1. On vérifie sans difficultés les propriétés de sous-espace vectoriel.

2. On vérifie aussi facilement que T est linéaire.
Par définition de la suite (X_n), pour tout U de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C})$, il existe un unique $X_0 = U \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C})$ tel que la suite définie par $X_0 = U$ et $X_{n+1} = A_n X_n$ vérifie $T((X_n)) = U$ (en clair la suite est bien définie par son premier terme X_0). Ainsi

$$\dim S = 2$$

3. a) On a $X_n = (A_n \times A_{n-1} \times \cdots \times A_0)X_0$. On peut alors :
$\star$ soit penser à diagonaliser A_n. C'est possible (les valeurs propres de A_n sont distinctes), mais les matrices ne commutant pas deux à deux, on ne peut trouver une base commune de diagonalisation, ce qui empêchera de déterminer $\prod A_k$.
$\star$ S'apercevoir après quelques essais, puis montrer par récurrence que :

$$\prod_{k=0}^{n} A_k = P_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{n+2} & 0 \\ -\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} & 1 \end{pmatrix}$$

b) On pose alors $H_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}$, on sait que $\lim_{n\to\infty} H_n = +\infty$.

Avec $X_0 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors $X_n = P_n X_0 = \begin{pmatrix} \frac{x}{n+2} \\ -H_n x + y \end{pmatrix}$.

Ainsi la suite (X_n) converge si et seulement si $x = 0$ et sa limite est alors $\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$.

Exercice 2.3.

1. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel réel E. On rappelle qu'un sous-espace vectoriel F de E est stable par f si et seulement si $f(F) \subset F$.

a) Montrer que $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont des sous-espaces stables par f.

b) Soit k est un réel quelconque ; montrer que F est un sous-espace vectoriel de E stable par f si et seulement si F est stable par $f - kI$, où I représente l'endomorphisme identité de E.

Dans la suite E désigne un espace vectoriel de dimension 4 et $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ est une base de E.

Soit f l'endomorphisme de E défini dans la base $\mathcal{E}$ par la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

On pose $g = f - 2I$.

2. a) Calculer g^3.

b) Déterminer $\operatorname{Im}(g), \operatorname{Ker}(g), \operatorname{Im}(g) \cap \operatorname{Ker}(g), \operatorname{Im}(g^2)$ et $\operatorname{Ker}(g^2)$.

3. Déterminer toutes les droites vectorielles stables par f.

4. a) Soit P un plan tel que $\operatorname{Im}(g^2) \subset P \subset \operatorname{Ker}(g^2)$. Montrer que P est stable par g.

b) Soit F un plan stable par g et v l'endomorphisme induit par g sur F.

i) Montrer que $v^2 = 0$.

ii) Si $v = 0$, montrer que $F = \operatorname{Ker} g$.

iii) Si $v \neq 0$ et si x est un vecteur de F tel que $v(x) \neq 0$, montrer que $v(x)$ appartient à $\operatorname{Im}(v) \cap \operatorname{Ker}(v)$.

c) En déduire une caractérisation des plans vectoriels de E stables par f.

Solution :

1. a) Soit $y \in \operatorname{Im} f$, on a $f(y) \in \operatorname{Im} f$ et si $x \in \operatorname{Ker} f, f(f(x)) = f(0) = 0$, donc $f(x) \in \operatorname{Ker} f$. Ainsi :

$$\text{Im}\, f \text{ et } \text{Ker}\, f \text{ sont des sous-espaces stables par } f.$$

b) Supposons F stable par f. Soit $x \in F$, alors : $(f-kI)(x) = f(x)-kx \in F$.
Réciproquement, supposons F stable par $f - kI$. Soit $x \in F$. Alors on écrit : $f(x) = (f(x) - kx) + kx \in F$.

$$F \text{ stable par } f \iff F \text{ stable par } f - kId$$

2. a) Un calcul matriciel sans surprise donne $g^3 = 0$.

b) On obtient :

$\text{Ker}\, g = \text{Vect}(e_1, e_2 - 3e_3 + e_4)$, $\text{Im}\, g = \text{Vect}(e_1, e_2)$.
$\text{Im}\, g \cap \text{Ker}\, g = \text{Vect}(e_1) = \text{Im}\, g^2$ et $\text{Ker}\, g^2 = \text{Vect}(e_1, e_2, e_4 - 2e_3)$.

3. D'après la première question, il est équivalent de déterminer les droites stables par g. Or une droite est stable par g si et seulement si elle est engendrée par un vecteur propre de g. Ici l'endomorphisme g est nilpotent (sa seule valeur propre est 0). Le sous-espace propre associé est $\text{Ker}\, g$ qui est de dimension 2. Donc les droites stables par g sont toutes les droites de ce plan.

4. a) Soit $x \in P$, alors $x \in \text{Ker}\, g^2$ et $g(x) \in \text{Ker}\, g \cap \text{Im}\, g$, donc $g(x) \in \text{Im}\, g^2 \subset P$ et P est stable.

b) $\star$ L'endomorphisme v est nilpotent car g l'est. Or F est de dimension 2. L'indice de nilpotence de v ne peut être supérieur à 2. Donc $v^2 = 0$ et $F \subset \text{Ker}\, g^2$.
(si $v^k = 0$ et $v^{k-1} \neq 0$, il existe x tel que $v^{k-1}(x) = 0$ et alors la famille $(x, v(x), \ldots, v^{k-1}(x))$ est libre.)

$\star$ Si $v = 0$, $F \subset \text{Ker}\, g$ qui est de dimension 2. Donc $F = \text{Ker}\, g$.

$\star$ Si $v \neq 0$, il existe $x \in F$ tel que $v(x) \neq 0$. Comme $v^2 = 0$, il vient $v(x) \in \text{Im}\, v \cap \text{Ker}\, v \subset \text{Ker}\, g \cap \text{Im}\, g = \text{Im}\, g^2$ et $\text{Im}\, g^2 \subset F$.

c) Soit P un plan de E, les questions précédentes donnent :

$$P \text{ est stable} \iff \text{Im}\, g^2 \subset P \subset \text{Ker}\, g^2.$$

Exercice 2.4.

On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Soit L l'application définie sur E par, pour tout x réel : $L(f)(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} f(t)\, dt$

1. Montrer que L est un endomorphisme de E. Est-il injectif, surjectif ?

2. Soit $f \in E,\ a \in \mathbb{R}$. On considère l'élément de E défini, pour tout x réel, par : $g(x) = f(a-x)$. Déterminer une relation entre $L(f)$ et $L(g)$. Interpréter géométriquement ce résultat. Dans le cas d'une fonction f paire, en déduire une propriété des graphes représentatifs de f et $L(f)$.

3. Montrer que si $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = \ell \in \mathbb{R}$, alors on a également : $\lim\limits_{t\to+\infty} L(f)(t) = \ell$. Étudier la réciproque.

4. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. En considérant la fonction $h_\alpha : x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha x}$, montrer que tout réel strictement positif est valeur propre de L.

5. On suppose dans cette question seulement que f est une densité de probabilité et que X une variable aléatoire réelle de densité f. On considère une variable aléatoire réelle Y uniforme sur $[-1, 0]$, et on suppose X et Y indépendantes.

Que représente la fonction $L(f)$ pour la variable aléatoire $Z = X + Y$?

6. On suppose f continue, à valeurs positives et telle que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge. Montrer que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} L(f)(t)\,dt$$

Solution :

1. $\star$ La linéarité de l'application L résulte de la linéarité de lintégration.

$\star$ Soit F une primitive de f : $L(f)(x) = F(x+1) - F(x)$. Donc $L(f)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et a fortiori est continue.

$$L \in \mathcal{L}(E)$$

$\star$ Toute application continue sur $\mathbb{R}$ et non dérivable en au moins un point (par exemple la fonction $x \mapsto |x|$) n'a donc pas d'antécédent par L et L n'est pas surjective.

$\star$ Soit $f : t \mapsto \sin(2\pi t)$, on a pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$L(f)(x) = \int_x^{x+1} \sin(2\pi t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\big[\cos(2\pi t)\big]_x^{x+1} = 0$$

Donc L n'est pas injective.

2. $\star$ Soit $f \in E, a \in \mathbb{R}$: $L(g)(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} f(a-t)\,dt = \int_{a-x-1}^{a-x} f(u)\,du$, et :

$$L(g)(x) = L(f)(a-x-1).$$

On obtient le graphe de g en prenant successivement le symétrique du graphe de f par rapport à l'axe des ordonnées, puis le translaté de vecteur $(a-1)\overrightarrow{\imath}$. L'aire algébrique sous la courbe représentative de g sur $[a-x-1, a-x]$ est égale à l'aire algébrique sous la courbe représentative de f sur $[x, x+1]$

$\star$ Dans le cas d'une fonction f paire, les fonctions $g : x \mapsto f(-x)$ et f sont égales, d'où : $L(g) = L(f)$ et donc avec $a = 0$, $\forall x,\ L(f)(-x-1) = L(f)(x)$

La courbe représentative de $L(f)$ présente une symétrie d'axe vertical $x = -1/2$

3. $\star$ On suppose que $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = \ell \in \mathbb{R}$.
Soit donc $\varepsilon > 0$ et A tel que $t \geqslant A \implies |f(t) - \ell| \leqslant \varepsilon$, alors dès que $x \geqslant A$:

$$|L(f)(x) - \ell| = \left|\int_x^{x+1} [f(t) - \ell]dt\right| \leqslant \int_x^{x+1} |f(t) - \ell|\, dt \leqslant \int_x^{x+1} \varepsilon\, dt = \varepsilon$$

d'où $L(f)$ admet la même limite ℓ.

$\star$ La fonction $g : x \mapsto \sin(2\pi x)$ n'admet pas de limite en $+\infty$ et $L(g) = 0_E$ est de limite nulle ; la réciproque est donc fausse.

4. On a $L(h_\alpha)(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} \mathrm{e}^{\alpha t} dt = \frac{1}{\alpha}[\mathrm{e}^\alpha - 1]\mathrm{e}^{\alpha x} = \frac{\mathrm{e}^\alpha - 1}{\alpha} h_\alpha(x)$.

Soit la fonction $\psi : \alpha \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^\alpha - 1}{\alpha}$.
C'est une fonction continue sur $\mathbb{R}^*$ qu'on peut prolonger par continuité en 0 en posant $\psi(0) = 1$. La fonction ψ ainsi prolongée vérifie :
• ψ est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.
• $\lim\limits_{\alpha\to-\infty} \psi(\alpha) = 0$,
• $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} \psi(\alpha) = +\infty$.

Le théorème des valeurs intermédiaires assure : $\psi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^*$ et tout réel de $\mathbb{R}_+^*$ est donc valeur propre de L (h_α n'est pas la fonction nulle).

5. Soit X de densité f, Y de densité $\mathbf{1}_{[-1,0]}$ et X et Y indépendantes. Ainsi $Z = X + Y$ admet pour densité :

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathbf{1}_{[-1,0]}(x-t)\, dt = \int_x^{x+1} f(t)\, dt = L(f)(t)$$

6. On suppose f continue, à valeurs positives et telle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = C \in \mathbb{R}$

La fonction $f_1 = \frac{1}{C} \times f$ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$ et la question précédente entraîne que $L\left(\frac{1}{C} \times f\right) = \frac{1}{C} L(f)$ est une densité de probabilité d'où :

$$\frac{1}{C} \int_{-\infty}^{+\infty} L(f)(t)\, dt = 1$$

d'où :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} L(f)(t)\, dt$$

Exercice 2.5.

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels. On appelle *carré magique* d'ordre 3, toute matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que les sommes des coefficients de chacune des trois lignes, de chacune des trois colonnes et de chacune des deux diagonales soient égales. Cette somme est notée $s(M)$.
On note $\mathcal{C}$ le sous-ensemble des carrés magiques de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On note $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\mathcal{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer que l'application s définie sur $\mathcal{C}$, qui à tout M de $\mathcal{C}$ associe le réel $s(M)$, est linéaire et que :

$$\mathcal{C} = \text{Vect}(J) \oplus \text{Ker}\, s$$

2. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a) Montrer que :

$$\text{Ker}\, s = (\mathcal{S} \cap \text{Ker}\, s) \oplus (\mathcal{A} \cap \mathcal{C})$$

b) Déterminer $\mathcal{A} \cap \mathcal{C}$ et $\mathcal{S} \cap \text{Ker}\, s$. En déduire une base de $\mathcal{C}$.

3. Déterminer un vecteur propre commun à tous les carrés magiques. En déduire tous les carrés magiques M pour lesquels M^2 est un carré magique.

Solution :

1. $\star$ Soit φ l'application linéaire $\mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^8$ définie par :

$$\varphi\begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{1,1}+m_{1,2}+m_{1,3} \\ m_{2,1}+m_{2,2}+m_{2,3} \\ m_{3,1}+m_{3,2}+m_{3,3} \\ m_{1,1}+m_{2,1}+m_{3,1} \\ m_{1,2}+m_{2,2}+m_{3,2} \\ m_{1,3}+m_{2,3}+m_{3,3} \\ m_{1,1}+m_{2,2}+m_{3,3} \\ m_{1,3}+m_{2,2}+m_{3,1} \end{pmatrix}$$

Comme $\mathcal{C} = \varphi^{-1}(\text{Vect}\Big(\begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix}\Big))$ (les huit sommes sont égales ...), $\mathcal{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

$\star$ L'application s est linéaire car c'est, par exemple, la restriction à $\mathcal{C}$ de la forme linéaire suivante :

$$\begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} \end{pmatrix} \mapsto m_{1,1}+m_{1,2}+m_{1,3}$$

$\star$ Montrons que toute matrice $M \in \mathcal{C}$ s'écrit de manière unique :

$$M = \lambda J + N \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } s(N) = 0.$$

$\rightarrow$ Si une matrice $M \in \mathcal{C}$ s'écrit ainsi, on a nécessairement $s(M) = \lambda s(J) = 3\lambda$, donc $\lambda = \dfrac{s(M)}{3}$ et ainsi $N = M - \dfrac{s(M)}{3}J$, donc l'écriture, si elle existe, est unique.

$\rightarrow$ Réciproquement, pour tout $M \in \mathcal{C}$, on a :

$$s\big(M - \frac{s(M)}{3}J\big) = s(M) - \frac{s(M)}{3}s(J) = 0$$

Donc :

$$M = \underbrace{M - \frac{s(M)}{3}J}_{\in \text{Ker}(S)} + \frac{s(M)}{3}J,$$

et toute matrice $M \in \mathcal{C}$ possède bien une telle écriture.

2. a) Un fait classique est que : $\mathcal{S} \oplus \mathcal{A} = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ avec la décomposition :

$$M = \underbrace{\frac{1}{2}(M + {}^tM)}_{\in \mathcal{S}} + \underbrace{\frac{1}{2}(M - {}^tM)}_{\in \mathcal{A}}$$

On en déduit immédiatement que :

$$\text{Ker}\, s = (\mathcal{S} \cap \text{Ker}\, s) \oplus (\mathcal{A} \cap \text{Ker}\, s)$$

Comme toute matrice antisymétrique M a une diagonale nulle on a $\mathcal{A} \cap \mathcal{C}$ qui est inclus dans $\mathcal{A} \cap \operatorname{Ker} s$; comme l'inclusion contraire est évidente on a $\mathcal{A} \cap \mathcal{C} = \mathcal{A} \cap \operatorname{Ker} s$, d'où le résultat annoncé.

b) $\star$ Les matrices antisymétriques de taille 3 sont de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$$

Pour que M appartienne à $\mathcal{C}$ il faut et il suffit que :

$$a + b = -a + c = -b - c = -a - b = a - c = b + c = 0 = b - b,$$

soit $a = -b = c$. Donc :

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{C} = \operatorname{Vect} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\star$ De même on obtient :

$$\mathcal{S} \cap \operatorname{Ker} s = \operatorname{Vect} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$\star$ En « concaténant » des bases de $\operatorname{Vect}(J)$, $\mathcal{A} \cap \mathcal{C}$ et $\mathcal{S} \cap \operatorname{Ker} s$, on obtient que :

$$\text{en posant } J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, J_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(J, J_2, J_3) \text{ est une base de } \mathcal{C}.$$

3. $\star$ Comme la somme des éléments d'une ligne quelconque est constante et vaut $s(M)$, le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de toute matrice $M \in \mathcal{C}$ pour la valeur propre $s(M)$.

$\star$ Si M admet $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ comme vecteur propre pour la valeur propre λ, alors M^2 admet ce même vecteur comme vecteur propre pour la valeur propre λ^2. Si M et M^2 appartiennent à $\mathcal{C}$, on en déduit donc que $s(M^2) = s(M)^2$.

$\star$ D'après la question précédente toute matrice $M \in \mathcal{C}$ s'écrit :

$$M = aJ + bJ_2 + cJ_3 = \begin{pmatrix} a+c & a+b-c & a-b \\ a-b-c & a & a+b+c \\ a+b & a-b+c & a-c \end{pmatrix} \text{ avec } a = \frac{s(M)}{3}$$

Alors, par calcul, le coefficient de la deuxième ligne et de la deuxième colonne de M^2 vaut $3a^2 + 2c^2 - 2b^2$. Donc la condition $s(M^2) = s(M)^2$ s'écrit :

$$3(3a^2 + 2c^2 - 2b^2) = (3a)^2$$

Soit $b^2 = c^2$ et

$$b = \pm c$$

Le calcul donne alors : $(aJ + b(J_2 + J_3))^2 = (aJ + b(J_2 - J_3))^2 = 3a^2 J \in \mathcal{C}$
On a donc :

$$\{M \in \mathcal{C} \mid M^2 \in \mathcal{C}\} = \mathrm{Vect}(J, J_2 + J_3) \cup \mathrm{Vect}(J, J_2 - J_3)$$

Exercice 2.6.

Soit n un entier supérieur ou égal à 3. Soit A la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & 2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & n-1 \\ 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \end{pmatrix}$$

1. Justifier que A est diagonalisable.

2. a) Déterminer le rang de A ainsi qu'une base de l'image $\mathrm{Im}\, A$.

b) Déterminer la dimension du noyau de A, ainsi qu'une base de cet espace. Qu'en déduit-on pour les valeurs propres de A ?

Dans la suite de l'exercice, on étudie trois méthodes indépendantes qui permettent de déterminer tous les éléments propres de A.

3. Soit λ une valeur propre non nulle de A et x un vecteur propre associé. En écrivant le système d'équations correspondant à $Ax = \lambda x$, déterminer les valeurs propres non nulles de A.

4. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A.

a) Déterminer un sous-espace F de $\mathbb{R}^n$ de dimension 2, stable par f (*i.e.* tel que $f(F) \subseteq F$).

On note g l'endomorphisme de F induit par la restriction de f à F.

b) L'endomorphisme g est-il diagonalisable ? Déterminer ses éléments propres.

c) En déduire les éléments propres de f.

5. a) Calculer A^2.

b) En déduire les valeurs propres de A.

Solution :

1. La matrice A est symétrique réelle. Par le cours, elle est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

2. a) Les $(n-1)$ premières colonnes de A sont liées et les deux dernières sont libres. La matrice A est de rang 2.

b) Par le théorème du rang, on a : $\dim \operatorname{Ker} A = n-2$. Notons f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A. On a, pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, $f(e_i) = ie_n$. Donc les vecteurs $2e_1 - e_2, 3e_1 - e_3, \ldots, (n-1)e_1 - e_{n-1}$ appartiennent à $\operatorname{Ker} f$. On vérifie qu'ils forment une famille libre ; c'est donc une base de $\operatorname{Ker} A$.
Le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 est $\operatorname{Ker} A$ qui est de dimension $(n-2)$.
Comme A est diagonalisable, il reste à déterminer deux autres vecteurs propres, (associés à 1 ou 2 autres valeurs propres.

3. Soit $\lambda \neq 0$ tel que $AX = \lambda X$. Il vient :

$$\begin{cases} x_n & = & \lambda x_1 \\ 2x_n & = & \lambda x_2 \\ \vdots & = & \vdots \\ (n-1)x_n & = & \lambda x_{n-1} \\ \sum_{k=1}^{n} kx_k & = & \lambda x_n \end{cases}$$

On a $x_n \neq 0$, car sinon $X = 0$. Comme $\lambda \neq 0$, divisons les $(n-1)$ premières équations par λ et reportons dans la dernière équation. On obtient :

$$\Big(\frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{n-1} k^2\Big)x_n + nx_n = \lambda x_n$$

Ainsi λ est racine de l'équation :

$$\lambda^2 - n\lambda - \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} = 0$$

Cette équation est la condition nécessaire et suffisante pour que λ soit valeur propre de A.

Le discriminant $\Delta = \dfrac{n(4n^2-3n+2)}{3}$ est strictement positif. L'équation admet deux solutions :

$$\lambda = \frac{n+\delta}{2}, \quad \mu = \frac{n-\delta}{2}, \text{ avec } \delta = \sqrt{\Delta}$$

4. a) Si $F = \operatorname{Im} f$, alors $\dim F = 2$ et F est stable par f.

b) L'endomorphisme g reste symétrique réel, car f l'est : il est donc diagonalisable. Étudions la matrice B associée à g dans la base $(u = e_n, v = \sum_{k=1}^{n-1} k e_k)$ de F. Il vient :

$$f(u) = nu + v, f(v) = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} u$$

La matrice B est donc égale à :

$$B = \begin{pmatrix} n & \alpha_{n-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ avec } \alpha_{n-1} = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$

La méthode du pivot permet de conclure que les valeurs propres sont solutions de l'équation $(n-\lambda)(-\lambda) - \alpha_{n-1} = \lambda^2 - n\lambda - \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} = 0$, obtenue à la question 3.

On cherche les vecteurs propres de g sous la forme $w = xu + yv$, avec $B(w) = \lambda w$.
Un calcul donne $w = \lambda u + v$ comme premier vecteur propre et $w = \mu u + v$ comme second vecteur propre.

5. a) Le calcul donne $A^2 = nA + \alpha_{n-1} I$.

b) Le polynôme $X^2 - nX - \alpha_{n-1}$ est annulateur de A. Si λ est valeur propre de A, c'est une racine de ce polynôme. On retrouve l'équation de la question 3. Comme A admet effectivement des valeurs propres non nulles, ce sont les racines du polynôme précédent.

Exercice 2.7.

Soit E un espace euclidien et $\|.\|$ la norme euclidienne associée. Un endomorphisme f de E est appelé *contraction* si pour tout x de E, $\|f(x)\| \leqslant \|x\|$.

1. Donner un exemple de contraction de E.

2. On suppose dans cette question que l'endomorphisme f est symétrique.

a) Montrer que f est une contraction si et seulement si pour toute valeur propre λ de f, on a $|\lambda| \leqslant 1$.

b) Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. Montrer que pour tout x de E :

$$\|P(f)(x)\| \leqslant \sup_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} |P(\lambda)| \cdot \|x\|$$

où $\mathrm{Sp}(f)$ désigne l'ensemble des valeurs propres de f.

3. On suppose désormais que f est un endomorphisme inversible de E, et on note M sa matrice associée dans la base canonique de E.

a) Montrer que ${}^tMM$ est une matrice symétrique de valeurs propres strictement positives. En déduire qu'il existe une matrice symétrique à valeurs propres strictement positives S telle que ${}^tMM = S^2$.

b) Montrer qu'il existe une matrice orthogonale O telle que $M = OS$.

c) Montrer qu'il existe un unique couple (O, S), O orthogonale, S symétrique à valeurs propres strictement positives, tel que $M = OS$.

d) Montrer que f est une contraction si et seulement si pour toute valeur propre λ de S, on a $|\lambda| \leqslant 1$.

Solution :

1. L'application identité est une contraction, l'application nulle aussi.

2. a) L'application f est diagonalisable dans une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$. Notons $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ les valeurs propres associées à ces vecteurs propres (quitte à réordonner la base choisie).
Si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, alors $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i e_i$ et :

$$||f(x)||^2 = \sum_{i=1}^{n} ||\lambda_i|^2 |x_i|^2 \leqslant \max(|\lambda_i|^2)||x||^2 = |\lambda_n|^2||x||^2$$

avec égalité pour $x = e_n$.
Ainsi f est une contraction si et seulement si toute valeur propre λ de f vérifie : $|\lambda| \leqslant 1$.

b) Posons $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$. Alors

$$\begin{aligned}\|P(f)(x)\|^2 &= \| \sum_{k=0}^{p} a_k f^k(x)\|^2 = \| \sum_{k=0}^{p} a_k \big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k x_i e_i \big)\|^2 \\ &= \| \sum_{i=1}^{n} \big(\sum_{k=0}^{p} a_k \lambda_i^k \big) x_i e_i\|^2 = \| \sum_{i=1}^{n} P(\lambda_i) x_i e_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n} P(\lambda_i)^2 x_i^2 \\ &\leqslant \big(\sup_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} |P(\lambda)|\big)^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2\end{aligned}$$

Donc :

$$||P(f)(x)|| \leqslant \sup_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} |P(\lambda)| \times ||x||$$

3. a) La matrice $A = {}^tMM$ est trivialement symétrique réelle. Pour tout vecteur X, on a : ${}^tX {}^tMMX = ||MX||^2 \geqslant 0$ et est nul si et seulement si $X = 0$, puisque M est inversible.

La matrice A est diagonalisable dans une base orthonormée : il existe une matrice orthogonale P, une matrice diagonale, à diagonale strictement positive, D, telles que $M = PD^tP$. Soit Δ diagonale dont les coefficients diagonaux sont les racines carrées de ceux de D. On a $\Delta^2 = D$ et alors $S = P\Delta^tP$ est symétrique réelle définie positive telle que :

$$^tMM = (P\Delta^tP)(P\Delta^tP) = S^2$$

b) Comme S est inversible, posons $O = MS^{-1}$. Une vérification immédiate donne : $^tOO = I$; donc O est orthogonale.

c) Supposons qu'il existe deux tels couples $(O, S), (O_1, S_1)$. Alors

$$^tMM = S^2 = S_1^2$$

Les matrices symétriques réelles définies positives S et S_1, ont les mêmes valeurs propres (car celles-ci sont positives) et les mêmes vecteurs propres.

En effet si $SX = \lambda X$, $(\lambda > 0)$, alors $S_1^2(X) = S^2(X) = \lambda^2 X$.

Donc $0 = (S_1^2 - \lambda^2 I)X = (S_1 + \lambda I)(S_1 - \lambda I)X$. Or $(S_1 + \lambda I)$ est inversible, puisque $-\lambda$ n'est pas valeur propre de S_1. Donc $(S_1 - \lambda I)X = 0$ et X est vecteur propre de S_1. Les rôles de S et S_1 étant symétriques, on a : $S = S_1$ et $O = O_1$.

d) Comme O est une isométrie, on a $||OX|| = ||X||$ et il vient :

$$\|MX\| = \|O(SX)\| = \|SX\|$$

On termine grâce à la question 2. a).

Exercice 2.8.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice de coefficient d'indice (i, j) donné par $a_{i,j} = i + j$ pour $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$.
On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ de matrice A dans la base canonique.
On note enfin u et v les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ dont les coordonnées dans la base canonique sont respectivement :

$$U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } V = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$$

1. La matrice A est-elle diagonalisable ?

2. Déterminer l'image de f et le rang de A.

3. Montrer que $A = V^tU + U^tV$, où, pour toute matrice X, ^tX désigne la transposée de X.

4. En déduire le noyau de f.

5. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.

6. Pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on pose $Q(X) = {}^tXAX$. A-t-on pour toute colonne X non nulle ${}^tXAX \geqslant 0$? A-t-on ${}^tXAX \leqslant 0$?

Solution :

1. Par exemple pour $n = 4$, on a : $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$.
Pour tout n, la matrice A est clairement symétrique réelle et donc diagonalisable.

2. Pour tout j de $[\![1, n]\!]$, la colonne C_j de A s'écrit $C_j = V + jU$. Donc $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(u, v)$ et comme u et v ne sont pas colinéaires :
$$\operatorname{rg}(A) = 2$$

3. On a déjà dit que :
$$A = (C_1, C_2, \ldots, C_n) = (V, V, \ldots, V) + (U, 2U, \ldots, nU) = V\,{}^tU + U\,{}^tV$$

4. Comme $\operatorname{rg}(A) = 2$, on sait que $\dim \operatorname{Ker} f = n - 2$. Or :
$$\begin{aligned} x \in \big[\operatorname{Vect}(u, v)\big]^\perp &\implies \langle u, x\rangle = \langle v, x\rangle = 0 \implies {}^tUX = {}^tVX = 0 \\ &\implies V\,{}^tUX + U\,{}^tVX = AX = 0 \end{aligned}$$
L'inclusion et l'égalité des dimensions donne la conclusion :
$$\operatorname{Ker} f = \big[\operatorname{Vect}(u, v)\big]^\perp$$

5. Si X est un vecteur propre de A associé à une valeur propre non nulle λ, alors $X \in \operatorname{Im} f = (\operatorname{Ker} f)^\perp$, soit $X = \alpha U + \beta V$. On écrit alors :
$$AX = \lambda X \implies \begin{cases} \alpha({}^tVU - \lambda) & + & \beta\,{}^tVV & = 0 \\ \alpha\,{}^tUU & + & \beta({}^tUV - \lambda) & = 0 \end{cases}$$
Ce système admet une solution non triviale si et seulement si :
$$\big(\langle u, v\rangle - \lambda\big)^2 - ||u||^2||v||^2 = 0$$
C'est-à-dire pour :
$$\lambda = \langle u, v\rangle \pm ||u|| \times ||v|| = \frac{n(n+1)}{2} \pm n\sqrt{\frac{(n+1)(2n+1)}{6}}$$
et alors $\beta = \pm\alpha\,\dfrac{||u||}{||v||}$ et X est proportionnel à $||v||\,u \pm ||u||\,v$.

6. Comme $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - n^2\,\frac{(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n^2(1-n^2)}{12} < 0$, l'une des valeurs propres est strictement positive et l'autre strictement négative : la forme quadratique Q n'est ni positive ni négative.

Exercice 2.9.

Dans cet exercice, n est un entier supérieur ou égal à 2. On considère $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et φ l'application définie sur E^2 par : $\varphi(A,B) = \mathrm{tr}({}^tAB)$, où tr désigne l'application trace ($\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n}[A]_{i,i}$ est la somme des éléments diagonaux de A).

0. Montrer que l'application tr est linéaire, telle que, pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a : $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

1. Vérifier que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Dans la suite, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est muni de ce produit scalaire.

Soit A une matrice symétrique réelle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. On considère l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par : pour tout M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$T(M) = AM + MA$$

Montrer que T est diagonalisable dans une base orthonormée.

3. Soit D une matrice diagonale semblable à A et $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ les éléments diagonaux de D.

a) En étudiant l'équation $T(M) = \lambda M$, déterminer les valeurs propres de T en fonction des valeurs propres de A, ainsi qu'une base de vecteurs propres de T.

b) On suppose que la matrice A est définie positive, c'est-à-dire que pour toute matrice colonne non nulle X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a : ${}^tXAX > 0$. Que peut-on dire du noyau de T ?

Solution :

0. La linéarité de l'application tr résulte des propriétes des opérations matricielles et :

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(AB) &= \sum_{i=1}^{n}(AB)_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(A)_{i,k}(B)_{k,i}\\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}(B)_{k,i}(A)_{i,k} = \mathrm{tr}(BA)\end{aligned}$$

1. On vérifie facilement que l'application ainsi définie est bilinéaire, symétrique et définie positive, donc définit bien un produit scalaire.

2. Montrons que T est un endomorphisme auto adjoint (symétrique).

Soit $(M,N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$:

$$\begin{aligned}\langle T(M),N\rangle &= \mathrm{tr}({}^t(AM+MA)N) = \mathrm{tr}(({}^tMA + A{}^tM)N)\\ &= \mathrm{tr}({}^tMAN + A{}^tMN) = \mathrm{tr}({}^tMAN) + \mathrm{tr}(A{}^tMN)\\ &= \mathrm{tr}({}^tMAN) + \mathrm{tr}({}^tMNA) \quad \text{car } \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)\\ &= \mathrm{tr}({}^tM(AN+NA) = \langle M, T(N)\rangle\end{aligned}$$

Ainsi T est diagonalisable dans une base orthonormée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3. a) Il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D telles que $A = PD{}^tP$. Ainsi, en posant $N = {}^tPMP$:

$$\begin{aligned}T(M) = AM + MA = \lambda M &\iff D({}^tPMP) + ({}^tPMP)D = \lambda({}^tPMP)\\ &\iff DN + ND = \lambda N\end{aligned}$$

Si $N = (n_{i,j})$, un calcul élémentaire donne $DN + ND = ((\lambda_i + \lambda_j)n_{i,j})_{i,j}$. Ainsi, l'équation précédente est équivalente à :

$$\text{pour tout } (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ (\lambda_i + \lambda_j)n_{i,j} = \lambda n_{i,j}.$$

On s'aperçoit que la base canonique $(E_{i,j})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (qui est orthonormée pour ce produit scalaire), est une base de vecteurs propres de T et que le spectre de T est :

$$\mathrm{Spec}(T) = \{\lambda + \mu \mid (\lambda,\mu) \in \mathrm{Sp}(A)^2\}$$

b) On sait qu'une matrice symétrique réelle est définie positive si et seulement si ses valeurs propres sont strictement positives. Par la question précédente, les valeurs propres de T sont également strictement positives. Ainsi 0 n'est pas valeur propre de T et $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$.

Exercice 2.10.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni de sa base canonique $(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ et du produit scalaire canonique noté $\langle .,. \rangle$. On désigne par $\|.\|$ la norme associée. On confond vecteur de $\mathbb{R}^n$ et matrice colonne canoniquement associée.

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\sigma(A)$ l'ensemble des valeurs propres de A. On dit qu'une matrice symétrique A est positive si $\langle A(x), x\rangle \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. On écrit alors $0 \preceq A$.

1. Montrer qu'une matrice symétrique est positive si et seulement si ses valeurs propres sont positives. En déduire que si A est une matrice positive inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors la matrice A^{-1} est positive.

2. Soient A et B deux matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que $A \preceq B$ si et seulement si $0 \preceq B - A$. Montrer que $A \preceq B$ implique $({}^tM)\,AM \preceq ({}^tM)\,BM$ pour tout élément M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Prouver également que $0 \preceq A \preceq I$ si et seulement si $\sigma(A) \subseteq [0,1]$ (0 et I désignent respectivement la matrice nulle et la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).

3. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Montrer que AB est inversible si et seulement si A et B sont inversibles.

b) Soit λ une valeur propre non nulle de AB et x un vecteur propre associé à λ. Montrer que Bx est un vecteur propre de BA associé à λ.

c) En déduire que $\sigma(AB) = \sigma(BA)$.

4. Soit M une matrice positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Justifier le fait que M puisse s'écrire sous la forme $M = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i ({}^tX_i)$ où $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}_+^n$ et $(X_1, \ldots, X_n)$ est une famille de vecteurs-colonnes orthonormée.

b) Montrer que la matrice $L = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\lambda_i} X_i ({}^tX_i)$ est positive et vérifie l'égalité $L^2 = M$.
Prouver que L commute avec M. On admet que c'est la seule matrice positive dont le carré vaut M et on la note $\sqrt{M}$ ou $M^{\frac{1}{2}}$.
Montrer que si M est de plus inversible, alors on a $\left(\sqrt{M}\right)^{-1} = \sqrt{M^{-1}}$.

Solution :

1. Soit A une matrice positive et λ une valeur propre de u. Si x est un vecteur propre associé à λ, on a :

$$\lambda = \langle Ax, x\rangle \geqslant 0.$$

Réciproquement, si A est symétrique, on sait d'après le cours qu'il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale P telles que $A = ({}^tP)DP$, d'où :

$$\langle Ax, x\rangle = ({}^tx)({}^tP)DPx = ({}^t(Px))DPx = \langle D(Px), Px\rangle \geqslant 0.$$

Or avec $y = Px$ et $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, on a : $\langle D(Px), Px\rangle = \sum \lambda_i y_i^2$

Comme les éléments diagonaux de D sont les valeurs propres de A et que la matrice P est inversible, on en déduit facilement l'équivalence souhaitée. Si la matrice A est positive et inversible, alors la matrice A^{-1} est aussi symétrique et comme son spectre est constitué des inverses des valeurs propres de A, on voit qu'elle est positive.

2. Soient A et B deux matrices symétriques telles que $A \preceq B$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a donc $\langle (B-A)\,x, x\rangle \geqslant 0$.
Si $y \in \mathbb{R}^n$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $x = My$ et on obtient :

$$0 \leqslant \langle (B-A)My, My\rangle = \langle ({}^tM)(B-A)My, y\rangle$$

D'où l'on déduit immédiatement que $({}^tM)AM \preceq ({}^tM)BM$.
Si A est une matrice symétrique, comme on a $\sigma(I-A) = \{1-\lambda, \lambda \in \sigma(A)\}$, on déduit l'équivalence annoncée de la question 1.

3. Soient A et B deux matrices appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Si AB est inversible, il existe $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $I = ABC = CAB$. On en déduit que A est surjective et B est injective, par suite A et B sont inversibles. La réciproque est immédiate.

b) Soit λ une valeur propre non nulle de AB et x un vecteur propre associé à λ. On a donc $ABx = \lambda x$; comme λ et x sont non nuls, on en déduit que $Bx \neq 0$. Par ailleurs, on observe que $BA(Bx) = B(ABx) = \lambda Bx$. D'où le résultat.

c) On a montré dans la question 3. b) que $\sigma\,(AB)\setminus\{0\} \subseteq \sigma(BA)\setminus\{0\}$. En échangeant les rôles de A et B, on obtient l'autre inclusion et on a finalement $\sigma(AB)\setminus\{0\} = \sigma(BA)\setminus\{0\}$.
Avec la question 3. a) on voit que $0 \in \sigma(AB)$ si et seulement si $0 \in \sigma(AB)$. En récapitulant, on obtient

$$\sigma(AB) = \sigma(BA)$$

4. a) C'est du cours.

b) On a :

$$\begin{aligned} L^2 &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \sqrt{\lambda_i}\sqrt{\lambda_j} X_i[({}^tX_i)X_j]({}^tX_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \langle X_i, X_j\rangle \sqrt{\lambda_i}\sqrt{\lambda_j} X_i({}^tX_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i({}^tX_i) = M \end{aligned}$$

L'égalité $(\sqrt{M})^{-1} = \sqrt{M^{-1}}$ est évidente avec la définition et l'unicité de la racine.

Exercice 2.11.

Soit n un entier tel que $n \geqslant 2$. On considère la matrice J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.
Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble :

$$\mathcal{C} = \left\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \exists\, \alpha \in \mathbb{R}, \forall\, i, j, , 1 \leqslant i, j \leqslant n, \alpha = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,j}\right\}$$

1. Montrer $\mathcal{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

2. Montrer que l'application d définie sur $\mathcal{C}$ à valeurs réelles par :

$$d(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{1,k}$$

est une application linéaire surjective non injective.

3. a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A appartient à $\mathcal{C}$ si et seulement s'il existe un réel λ tel que $AJ = JA = \lambda J$.

b) Soit A et B deux matrices de $\mathcal{C}$. Montrer que AB appartient à $\mathcal{C}$ et calculer $d(AB)$.

c) Soit A une matrice inversible de $\mathcal{C}$. Montrer que A^{-1} appartient à $\mathcal{C}$ et trouver une relation entre $d(A)$ et $d(A^{-1})$.

4. Montrer que $\mathrm{Ker}(d)$ et $\mathrm{Vect}(J)$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathcal{C}$.

5. Soit $(r, s) \in [\![2, n]\!]^2$. On note $A_{r,s}$ la matrice dont tous les éléments sont nuls sauf $a_{1,1} = a_{r,s} = 1$ et $a_{1,s} = a_{r,1} = -1$.

Démontrer que la famille $(A_{r,s})_{(r,s)\in[\![2,n]\!]^2}$ forme une base de $\mathrm{Ker}(d)$ et en déduire la dimension de $\mathcal{C}$.

6. Soit p un entier naturel non nul et A une matrice de $\mathcal{C}$. Montrer que $B = \dfrac{d(A)}{n} J$ est solution de l'équation : $A^p - B^p = (A - B)^p$.

Solution :

1. On a $I \in \mathcal{C}$ ou $0 \in \mathcal{C}$ et $\mathcal{C} \neq \emptyset$.
Si $A, B \in \mathcal{C}$ alors :

$$\begin{cases} \exists\, \alpha,\ \forall\, i,j \text{ tels que } 1 \leqslant i,j \leqslant n,\ \alpha = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,j} \\ \exists\, \beta,\ \forall\, i,j \text{ tels que } 1 \leqslant i,j \leqslant n,\ \beta = \sum_{k=1}^{n} b_{i,k} = \sum_{k=1}^{n} b_{k,j} \end{cases}$$

Donc :

$$\forall\, i,j,\ \sum_{k=1}^{n} \lambda.a_{i,k} + \mu.b_{i,k} = \sum_{k=1}^{n} \lambda.a_{k,j} + \mu.b_{k,j} = \lambda\alpha + \mu\beta$$

ce qui implique que $\lambda A + \mu B \in \mathcal{C}$ et donc que $\mathcal{C}$ est un espace vectoriel.

2. Le calcul précédent montre exactement :

$$\forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}, d(\lambda A + \mu B) = \lambda d(A) + \mu d(B)$$

Ainsi d est une forme linéaire sur $\mathcal{C}$.

Or, soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a $d(\lambda J) = \lambda$, d'où la surjectivité et d est non injective pour des raisons de dimension.

3. a) Soit $A \in \mathcal{M}$. On a : :

$AJ = (c_{i,j})_{i,j} = \big(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\big)_{i,j}$ et $JA = (d_{i,j})_{i,j} = \big(\sum_{k=1}^{n} a_{k,j}\big)_{i,j}$

Donc :

$$AJ = JA = \lambda J \Longleftrightarrow \forall\, i,j,\ \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,j} = \lambda \Longleftrightarrow A \in \mathcal{C} \text{ et } d(A) = \lambda$$

b) Soit A et B deux matrices de $\mathcal{C}$. On a :

$$B \in \mathcal{C} \implies BJ = JB \implies ABJ = AJB$$

et $A, B \in \mathcal{C} \implies AJ = JA = d(A)J$, d'où

$$ABJ = A(BJ) = AJB = (AJ)B = JAB = d(A)JB = d(A)\times d(B)J$$

ce qui prouve que AB est aussi dans $\mathcal{C}$ et $d(AB) = d(A)\times d(B)$.

c) Soit A une matrice inversible de $\mathcal{C}$.

$$AJ = d(A)J \implies J = d(A)A^{-1}J, \text{ et } JA = d(A)J \implies J = d(A)JA^{-1}$$

Nécessairement $d(A) \neq 0$ sinon la matrice J serait la matrice nulle et :

$$A^{-1}J = JA^{-1} = \frac{1}{d(A)}J$$

ce qui prouve que A^{-1} appartient également à $\mathcal{C}$ et $d(A^{-1}) = \dfrac{1}{d(A)}$.

4. Le sous-espace vectoriel $\operatorname{Ker} d$ est le noyau d'une forme linéaire, c'est un hyperplan de $\mathcal{C}$.

$\operatorname{Vect}(J)$ est une droite vectorielle de $\mathcal{C}$, d'où $\dim(\mathcal{C}) = \dim \operatorname{Ker} d + \dim \operatorname{Vect}(J)$.

Soit $A \in \operatorname{Ker}(d) \cap \operatorname{Vect}(J)$. Alors :

$$A = \alpha J \implies d(A) = \alpha n = 0 \implies \alpha = 0 \implies A = 0$$

d'où :

$$\mathrm{Ker}(d) \cap \mathrm{Vect}(J) = \{0\}$$

Donc $\mathrm{Ker}(d)$ et $\mathrm{Vect}(J)$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathcal{C}$.

5. $\star$ Soit $(\lambda_{r,s})$ une famille de réels telle que $\sum_{r,s} \lambda_{r,s} A_{r,s} = 0$.

Soit (i,j) tel que $2 \leqslant i,j \leqslant n$; en égalant les termes génériques des deux matrices on obtient directement : $\lambda_{i,j} = 0$.

$\star$ La famille $(A_{r,s})_{r,s}$ est génératrice. Soit $A = \big(a_{i,j}\big) \in \mathcal{C}$, on peut écrire :

$$A = \begin{pmatrix} -\sum_{j=2}^{n} a_{1,j} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & & \vdots \\ -\sum_{j=2}^{n} a_{n,j} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{j=2}^{n} \begin{pmatrix} -a_{1,j} & 0 & \cdots & a_{1,j} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ -a_{n,j} & 0 & \cdots & a_{n,j} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{j=2}^{n} \begin{pmatrix} \sum_{i=2}^{n} a_{i,j} & 0 & \cdots & 0 & -\sum_{i=2}^{n} a_{i,j} & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{2,j} & 0 & \cdots & 0 & a_{2,j} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & & \\ -a_{n,j} & 0 & \cdots & 0 & a_{n,j} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \sum_{i,j} a_{i,j} A_{i,j}$$

Les matrices $A_{r,s},\ 2 \leqslant r,s \leqslant n$ forment donc une base de $\mathrm{Ker}(d)$ et

$$\dim(\mathrm{Ker}\, d) = (n-1)^2.$$

et

$$\dim(\mathcal{C}) = \dim(\mathrm{Ker}\, d) + \dim(\mathrm{Vect}(J)) = (n-1)^2 + 1$$

6. Soit p un entier naturel non nul et A une matrice de $\mathcal{C}$.

Le calcul donne $AB = B^2$, puis, par récurrence sur $i \in \mathbb{N}$, $A^i B = B^{i+1}$.

Les matrices A et B commutent ; on peut appliquer la formule du binôme de Newton :

$$(A-B)^p = \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} A^i (-B)^{p-i} = A^p + \sum_{i=0}^{p-1} \binom{p}{i} A^i (-B)^{p-i}$$

$$= A^p + \left[\sum_{i=0}^{p-1} \binom{p}{i} (-1)^{p-i} \right] B^p$$

Or $(1-1)^p = 0 = \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i}(-1)^{p-i} = 1 + \sum_{i=0}^{p-1} \binom{p}{i}(-1)^{p-i}$

d'où :

$$(A-B)^p = A^p - B^p$$

Exercice 2.12.

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$, l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2, muni du produit scalaire $(P,Q) \mapsto \langle P,Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$.

1. Déterminer une base orthonormale (S_0, S_1, S_2) de E telle que, pour tout $i \in [\![0,2]\!]$, le polynôme S_i soit de degré i et de coefficient du terme dominant strictement positif.

2. On définit sur $E \times E$ l'application φ suivante :

$$\varphi(P,Q) = \frac{1}{2}\big(P(0)Q(1) + P(1)Q(0)\big)$$

On note $A = (a_{i,j})_{0\leqslant i,j\leqslant 2}$ la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de terme général $a_{i,j} = \varphi(S_i, S_j)$

a) L'application φ est-elle un produit scalaire sur $E \times E$?

b) Écrire la matrice A et justifier l'existence d'une matrice $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que

$${}^tRAR = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

c) Soit x_1, x_2, x_3 réels et $P = x_0S_0 + x_1S_1 + x_2S_2$.

Montrer que, si l'on pose $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, on a : $\varphi(P,P) = {}^tXAX$. Calculer $\langle P,P\rangle$ en fonction de $Y = R^{-1}X$.

3. On considère l'application f définie sur $E \setminus \{0\}$ par : $f(P) = \dfrac{P(0)P(1)}{\int_0^1 P^2(t)dt}$.

Montrer que f admet sur $E \setminus \{0\}$ un maximum dont on donnera la valeur.

Solution :

1. On utilise le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. Après calculs, on obtient :

$$S_0 = 1, \quad S_1 = 2\sqrt{3}(X - \frac{1}{2}), \quad S_2 = 6\sqrt{5}(X^2 - X + \frac{1}{6})$$

2. a) On vérifie aisément que φ est une forme bilinéaire symétrique. Mais elle n'est pas positive, en effet $\varphi(P, P) = P(0)P(1)$ et il suffit donc de prendre un polynôme P tel que $P(0)P(1) < 0$. Par exemple $P = S_1$.

b) On obtient : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{5} \\ 0 & -3 & 0 \\ \sqrt{5} & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Cette matrice est réelle et symétrique : elle est diagonalisable dans une base orthonormée.

Plutôt que de chercher à calculer ses valeurs propres, on se fonde sur l'énoncé et on montre que ses valeurs propres sont $-3, 0, 6$ en exhibant trois vecteurs propres associés.

Par exemple, un vecteur propre associé à la valeur propre -3 est en évidence : $u_1 = e_2$ et un vecteur propre associé à la valeur propre 0 est $u_2 = \sqrt{5}e_1 - e_3$ et un vecteur propre associé à la valeur propre 6 est dans l'orthogonal du sous-espace engendré par u_1, u_2 ; par exemple $u_3 = e_1 + \sqrt{5}e_3$.

En normant chacun des trois vecteurs u_1, u_2, u_3, on obtient une base orthonormée et une matrice de passage R orthogonale.

c) On pose $P = x_0S_0 + x_1S_1 + x_2S_2$. Après calculs

$$\varphi(P, P) = x_0^2 - 3x_1^2 + 5x_2^2 + 2\sqrt{5}x_0x_2 = {}^tXAX$$

et, comme ${}^tR = R^{-1}$:

$$\varphi(P, P) = {}^tXAX = {}^t(R^{-1}X)A{}^tRX = {}^tYDY$$

D'un autre côté, la famille (S_0, S_1, S_2) formant une base orthonormée de E pour le produit scalaire $\langle ., . \rangle$, il vient : $\langle P, P \rangle = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2$.

On remarque que $f(P) = \dfrac{\varphi(P, P)}{||p||^2}$, car $||P||^2 = {}^tXX = {}^tYY$.

En posant $Y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, pour tout $P \neq 0$:

$$f(P) = \frac{-3y_0^2 + 6y_2^2}{y_0^2 + y_1^2 + y_2^2}$$

Donc $f(P) \leqslant 6$ et pour $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, on a $f(Q) = 6$.

Ainsi

$$\max_{P\neq 0} f(P) = 6$$

Exercice 2.13.

Soit la matrice : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f. La matrice A est-elle diagonalisable ?

2. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est :

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

3. a) Montrer que A' n'admet pas de polynôme annulateur de degré inférieur ou égal à 2.

b) Déterminer un polynôme annulateur de A'.

c) Justifier que tout polynôme annulateur de A' est aussi annulateur de A.

d) Déterminer un polynôme annulateur de A de degré minimal et de coefficient dominant égal à 1.

Solution :

1. $A - \lambda I = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2-\lambda & 1 \\ 2-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2-(2-\lambda)L_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & (\lambda-1)(\lambda-3) & * \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

Donc $\mathrm{Spec}(A) = \{1, 3\}$ et des calculs simples donnent :

$$E_{(1)}(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } E_{(3)}(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matrice A n'est pas diagonalisable.

2. Prenons $v_1 = (1, -1, 0)$ et $v_2 = (1, 1, 0)$. On a $f(v_1) = v_1$ et $f(v_2) = 3v_2$.

On cherche alors $v_3 = (x, y, z)$ tel que $f(v_3) = v_2 + 3v_3$, ce qui s'écrit :

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 + 3x \\ x + 2y + z = 1 + 3y \\ 3z = 0 + 3z \end{cases}$$

et on peut prendre $v_3 = (0, 0, 1)$. On vérifie alors que la famille (v_1, v_2, v_3) est libre, donc est une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$. On a par construction :

$$A' = M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

3. a) 1 et 3 sont racines de tout polynôme annulateur de A' et

$$(A' - I)(A' - 3I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

b) On vérifie alors que $(A' - I)(A' - 3I)(A' - 3I) = 0$ et :

$$Q = (X - 1)(X - 3)^2 \text{ est annulateur de } A'$$

c) Soit P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à $\mathcal{B}$, on a $A' = P^{-1}AP$ et pour tout polynôme R : $R(A') = P^{-1}R(A)P$, les matrices A et A' ont donc les mêmes polynômes annulateurs.

d) Il n'y a pas de polynôme adéquat de degré inférieur ou égal à 2 et Q convient.

Exercice 2.14.

Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$. Une matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *positive* si, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $a_{i,j} \geqslant 0$. On note alors : $A \geqslant 0$.

De même A est *strictement positive* si, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $a_{i,j} > 0$. On note alors : $A > 0$.

Si $B = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $|B|$ la matrice positive de terme général $(|b_{i,j}|)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

1. Dans cette question, A et B sont deux matrices carrées réelles d'ordre n.

a) On suppose $A \geqslant 0$ et $A \neq 0$. A-t-on $A > 0$?

b) On suppose $A \geqslant 0$ et inversible. A-t-on $A^{-1} \geqslant 0$?

c) On suppose $A \geqslant 0$ et $B \geqslant 0$. A-t-on $AB \geqslant 0$?

d) On suppose $A \geqslant 0$ et $B > 0$ telles que $AB = 0$. A-t-on $A = 0$?

2. a) Soit z_1, z_2 deux nombres complexes tels que $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$. Montrer qu'il existe θ réel tel que $z_1 = |z_1|e^{i\theta}$ et $z_2 = |z_2|e^{i\theta}$.

b) Soit $(z_1, \dots, z_p)$ p nombres complexes ($p \geqslant 2$) tels que $\left|\sum_{i=1}^{p} z_i\right| = \sum_{i=1}^{p} |z_i|$. Montrer qu'il existe θ réel tel que pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, $z_j = |z_j| \mathrm{e}^{i\theta}$.

3. On suppose que $A > 0$ et que $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifient $|AB| = |A| \times |B|$. Montrer qu'il existe un n-uplet de réels $(\theta_1, \dots \theta_n)$ tel que $B = |B| \times D$, où D est une matrice diagonale de coefficients diagonaux $\mathrm{e}^{i\theta_1}, \mathrm{e}^{i\theta_2}, \dots, \mathrm{e}^{i\theta_n}$.

Solution :

Si $n = 1$, le problème est dégénéré, nous supposerons donc à partir de maintenant $n \geqslant 2$.

1. a) I_n est positive, non nulle, mais n'est pas strictement positive.

b) Non plus, proposons : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ clairement positive et inversible, avec $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui n'est pas positive.

c) Oui, car $(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} \geqslant 0$.

d) On a donc, pour tous indices i et j : $\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} = 0$, la stricte positivité des coefficients de B et la positivité de ceux de A montre alors que $A = 0$.

2. a) Si $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$, alors en élevant au carré :

$$(z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) = |z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1 z_2|$$

Soit :

$$2\,\mathrm{Ré}(\overline{z_1} z_2) = 2|\overline{z_1} z_2|$$

Ce qui signifie que $\overline{z_1} z_2$ est un réel positif ou nul, donc que z_1 et z_2 ont même argument (modulo 2π)

b) On procède par récurrence sur p :

→ Pour $p = 2$, c'est le résultat de la question précédente.

→ Supposons la relation vérifiée au rang $p - 1$ et posons $u = z_1 + \cdots + z_{p-1}$. On a donc :

$$\sum_{k=1}^{p} |z_k| = |u + z_p| \leqslant |u| + |z_p| \leqslant \sum_{k=1}^{p-1} |z_k| + |z_p| = \sum_{k=1}^{p} |z_k|$$

D'où l'égalité centrale et (cas $p = 2$) il existe θ tel que $u = |u| \mathrm{e}^{i\theta}$ et $z_p = |z_p| \mathrm{e}^{i\theta}$.

De plus $|u| = \Big|\sum_{k=1}^{p-1} z_k\Big| = \sum_{k=1}^{p-1} |z_k|$. L'hypothèse de récurrence s'applique alors et prouve que tous les nombres ont même argument.

3. L'hypothèse donne, pour tous indices ℓ et j :

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} a_{\ell,k}b_{k,j}\Big| = \sum_{k=1}^{n} |a_{\ell,k}b_{k,j}|$$

Par la question précédente, comme $a_{\ell,k} > 0$, il existe $\theta_j \in \mathbb{R}$ tel que pour tout k, $b_{k,j} = |b_{k,j}|\mathrm{e}^{i\theta_j}$, ce qui donne :

$$B = |B|\,\mathrm{diag}(\mathrm{e}^{i\theta_1}, \ldots, \mathrm{e}^{i\theta_n})$$

Exercice 2.15.

Soit p un entier, $p \geqslant 1$ et $\mathbb{R}_p[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à p.

1. Quelle est la dimension de $\mathbb{R}_p[X]$?

2. Soient $\lambda_0, \ldots, \lambda_p$ des réels deux à deux distincts. On considère les polynômes $L_0, \ldots, L_p$ définis, pour tout k de $[\![0, p]\!]$ par :

$$L_k(X) = \prod_{0\leqslant i\leqslant p, i\neq k} \frac{(X-\lambda_i)}{(\lambda_k-\lambda_i)}$$

a) Montrer que la famille $(L_0, \ldots, L_p)$ constitue une base de $\mathbb{R}_p[X]$.

b) Soit $m \in [\![0, p]\!]$. Déterminer les coordonnées de X^m dans cette base.

3. Soit n un entier $n \geqslant 2$ et S une matrice symétrique appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\{\lambda_0, \ldots, \lambda_p\}$ l'ensemble des valeurs propres de S (deux à deux distinctes). On pose, pour $k \in [\![0, p]\!]$, $P_k = L_k(S)$.

a) Montrer que $\mathrm{Im}(P_k) = \mathrm{Ker}(\lambda_k I - S)$, où I désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b) Vérifier que P_k est la matrice d'un projecteur.

c) Prouver que $I = \sum_{k=0}^{p} P_k$ et que $P_kP_\ell = 0$ pour tout $(k, \ell) \in [\![0, p]\!]^2, k \neq \ell$.

4. Soit A une matrice symétrique appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Décrire l'ensemble des valeurs propres de A^5 en fonction de celles de A. Montrer qu'il existe un polynôme P à coefficients réels tel que $A = P(A^5)$.

5. On considère deux matrices symétriques A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^5 = B^5$. Montrer que $A = B$.

6. On considère à nouveau deux matrices symétriques A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $A^2 = B^2$. Peut-on en déduire que $A = B$?

Solution :

1. $\dim(\mathbb{R}_p[X]) = p + 1$.

2. a) Si $\alpha_0 L_0 + \cdots + \alpha_p L_p = 0$, alors pour tout k de $[\![0, p]\!]$:

$$\alpha_0 L_0(\lambda_k) + \cdots + \alpha_p L_p(\lambda_k) = 0$$

et comme $L_i(\lambda_j) = \delta_{i,j}$ (symbole de Kronecker), il reste $\alpha_k = 0$.
La famille proposée est donc libre, de cardinal $p+1$ et formée de polynômes appartenant tous à $\mathbb{R}_p[X]$, ainsi :

$$(L_0, \ldots, L_p) \text{ est une base de } \mathbb{R}_p[X]$$

b) On écrit $X^m = \sum_{k=0}^{p} a_k L_k(X)$ et en substituant à X la valeur λ_i, il vient $\lambda_i^m = a_i$, soit :

$$X^m = \sum_{i=0}^{p} \lambda_i^m L_i(X)$$

3. Comme S est symétrique réelle, on sait que $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{i=0}^{p} \operatorname{Ker}(S - \lambda_i I)$ (en identifiant vecteurs et matrices colonnes), et cette somme directe est même formée de sous-espaces deux à deux orthogonaux.

a) Soit $x \in \mathbb{R}^n$ écrit sous la forme $x = \sum_{i=0}^{p} x_i$, avec $\forall\, i, x_i \in \operatorname{Ker}(S - \lambda_i I)$.
Comme $Sx_i = \lambda_i x_i$, on a $S^2 x_i = SSx_i = \lambda_i S x_i = \lambda_i^2 x_i$, ...et plus généralement :

$$L_k(S)x_i = L_k(\lambda_i)x_i$$

Ainsi :

$$P_k x = L_k(S)x = \sum_{i=0}^{p} L_k(S)x_i = \sum_{i=0}^{p} L_k(\lambda_i)x_i = L_k(\lambda_k)x_k = x_k$$

On voit donc que $\operatorname{Im} P_k \subset \operatorname{Ker}(S - \lambda_k I)$ et comme l'inclusion réciproque est évidente on a l'égalité souhaitée.

b) On a $P_k^2 = L_k(S)^2$ et :

$$P_k^2 x = P_k P_k x = P_k x_k = L_k(S)x_k = L_k(\lambda_k)x_k = x_k = P_k x$$

D'où le résultat.

c) On a : $1 = \sum_{k=0}^{p} L_k(X)$, d'où $I = \sum_{k=0}^{p} L_k(S) = \sum_{k=0}^{p} P_k$.

Si $k \neq \ell$, pour tout x de $\mathbb{R}^n$, on a : $P_k P_\ell x = L_k(S)(P_\ell x) = L_k(\lambda_\ell)(P_\ell x) = 0$.

4. Il existe Q orthogonale et D diagonale telles que $A = QD^tQ$, d'où $A^5 = QD^{5t}Q$.

On en déduit que :

$$\sigma(A^5) = \{\lambda_0^5, \ldots, \lambda_p^5\}$$

(Comme $t \mapsto t^5$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, ces nombres $\nu_i = \lambda_i^5$ sont bien deux à deux distincts)

Soient $\widetilde{L}_0, \ldots, \widetilde{L}_p$ les polynômes associés à la famille $\nu_0, \ldots, \nu_p$ et $P = \sum_{i=0}^{p} \lambda_i \widetilde{L}_i$.

On a $P(\nu_i) = \lambda_i$, d'où $P(D^5) = D$ et ainsi $P(A^5) = A$.

5. Si $A^5 = B^5$, on a $\sigma(A^5) = \sigma(B^5)$ et donc $\sigma(A) = \sigma(B)$ et avec les notations précédentes le même polynôme P sert pour A et pour B :
$P(A^5) = P(B^5)$, soit $A = B$.

6. La réponse est non, puisque l'on peut avoir $B = -A$.

Exercice 2.16.

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$. On note $\langle ., . \rangle$ le produit scalaire de E et $\|.\|$ la norme euclidienne associée. Soit u un endomorphisme symétrique de E. On dit que u est positif si $\langle u(x), x \rangle \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

1. On considère un endomorphisme symétrique u de E. Montrer que u est positif si et seulement si ses valeurs propres sont positives.

2. On considère une base orthonormée $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ de E. Pour $m \in [\![1, n]\!]$, on définit l'endomorphisme p_m de E en posant pour tout x de E :

$$p_m(x) = \sum_{k=1}^{m} \langle x, \varepsilon_k \rangle \varepsilon_k$$

a) Montrer que p_m est la projection orthogonale sur le sous-espace F engendré par la famille $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)$.

b) Établir l'égalité suivante : $\sum_{\ell=1}^{n} \|p_m(e_\ell)\|^2 = m$, valable pour toute base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ de E.

3. On considère un endomorphisme symétrique positif u sur l'espace E. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E formée de vecteurs propres pour u. On note $u(e_i) = \lambda_i e_i$ et on suppose $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n \geqslant 0$. Soit toujours $m \in [\![1, n]\!]$.

a) Montrer que l'on a : $\sum_{k=1}^{m} \langle u(\varepsilon_k), \varepsilon_k \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left\| p_m(e_i) \right\|^2$.

b) On suppose dans cette question seulement que $1 \leqslant m < n$. Prouver que :

$$\sum_{k=1}^{m} \langle u(\varepsilon_k), \varepsilon_k \rangle \leqslant \sum_{i=1}^{m} \lambda_i + \sum_{i=m+1}^{n} (\lambda_{m+1} - \lambda_i)\big(1 - \left\| p_m(e_i) \right\|^2\big)$$

c) Soit $m \in [\![1, n]\!]$. Déduire de ce qui précède que l'on a toujours :

$$\sum_{k=1}^{m} \langle u(\varepsilon_k), \varepsilon_k \rangle \leqslant \sum_{i=1}^{m} \lambda_i$$

d) Prouver que pour toute base orthonormée $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \langle u(\varepsilon_k), \varepsilon_k \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

e) Que peut-on en déduire pour une matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ symétrique et à valeurs propres positives ?

Solution :

1. Soit u un endomorphisme positif de E et λ une valeur propre de u. Si x est un vecteur propre associé à λ, on a :

$$\lambda = \langle u(x), x \rangle \geqslant 0$$

Réciproquement, si u est symétrique de spectre inclus dans $\mathbb{R}^+$, u est diagonalisable dans une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ associée aux valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (non nécessairement deux à deux distinctes) et pour tout vecteur x :

$$\langle u(x), x \rangle = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle x, e_k \rangle^2 \geqslant 0$$

2. a) Il est clair que $p_m(\varepsilon_i) = \varepsilon_i$ si $1 \leqslant i \leqslant m$ et $p_m(x_i) = 0$ si $i > m$. On en déduit immédiatement que p_m est le projecteur orthogonal sur F.

b) On a :

$$\sum_{\ell=1}^{n} \|p_m(e_\ell)\|^2 = \sum_{\ell=1}^{n} \| \sum_{k=1}^{m} \langle e_\ell, \varepsilon_k \rangle \varepsilon_k \|^2 = \sum_{\ell=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \langle e_\ell, \varepsilon_k \rangle^2 = \sum_{k=1}^{m} \sum_{\ell=1}^{n} \langle e_\ell, \varepsilon_k \rangle^2$$
$$= \sum_{k=1}^{m} \|\varepsilon_k\|^2 = m$$

3. a) $\sum_{k=1}^{m} \langle u(\varepsilon_k), \varepsilon_k \rangle = \sum_{k=1}^{m} \langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle \varepsilon_k, e_i \rangle e_i, \varepsilon_k \rangle = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle \varepsilon_k, e_i \rangle^2$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \Big(\sum_{k=1}^{m} \langle \varepsilon_k, e_i \rangle^2 \Big) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \|p_m(e_i)\|^2$$

b) D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m} \langle u(\varepsilon_k), \varepsilon_k \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \|p_m(e_i)\|^2 &\leqslant \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \|p_m(e_i)\|^2 + \lambda_{m+1} \sum_{i=m+1}^{n} \lambda_i \|p_m(e_i)\|^2 \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \|p_m(e_i)\|^2 + \lambda_{m+1}(m - \sum_{i=1}^{m} \|p_m(e_i)\|^2) \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \|p_m(e_i)\|^2 + \lambda_{m+1} \sum_{i=1}^{m} (1 - \|p_m(e_i)\|^2) \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{m} \lambda_i + \sum_{i=m+1}^{n} (\lambda_{m+1} - \lambda_i)(1 - \|p_m(e_i)\|^2)
\end{aligned}$$

c) Comme $\lambda_{m+1} - \lambda_i \leqslant 0$ pour $m+1 \leqslant i \leqslant n$, on déduit l'inégalité souhaitée de la question précédente.

d) p_n est l'identité et la question a) donne directement :

$$\sum_{k=1}^{n} \langle u(\varepsilon_k), \varepsilon_k \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

e) On a donc pour tout m de $[\![1, n]\!]$:

$$0 \leqslant \sum_{i=1}^{m} a_{i,i} \leqslant \sum_{i=1}^{m} \lambda_i$$

Exercice 2.17.

1. Montrer que la restriction de la fonction cosinus à l'intervalle $[0, \pi]$ admet une application réciroque que l'on note $\operatorname{Arc\,cos}$.

On pose, pour tout n de $\mathbb{N}$ et tout $x \in [-1, 1]$: $T_n(x) = \cos(n \operatorname{Arc\,cos} x)$.

2. a) Calculer $T_0(x), T_1(x)$ et $T_2(x)$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [-1, 1]$, on a :

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x).$$

c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n est un polynôme. Déterminer son degré et le coefficient de son terme de plus haut degré.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les racines de T_n. En déduire une expression de T_n en fonction de n.

On note $E = \mathbb{R}_p[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à p, où p est un entier naturel fixé quelconque.

4. Pour tout $(P,Q) \in E^2$, on pose : $\langle P,Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt$

a) Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

b) Déterminer une base orthonormale de E muni de ce produit scalaire.

Solution :

1. $\cos' = -\sin$ et la restriction de la fonction sin à $]0,\pi[$ est strictement positive, donc la restriction de la fonction cos à $[0,\pi]$ réalise une bijection strictement décroissante de ce segment sur $[-1,1]$. On note $\operatorname{Arc}\cos$ la bijection réciproque.

2. a) $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = \cos(\operatorname{Arc}\cos x) = x$ et
$T_2(x) = \cos(2\operatorname{Arc}\cos x) = 2\cos^2(\operatorname{Arc}\cos x) - 1 = 2x^2 - 1$.

b) On a :
$$\cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta) = 2\cos(\theta)\cos(n\theta)$$
Soit, avec $\theta = \operatorname{Arc}\cos x$:
$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x).$$

c) Une récurrence simple montre alors que pour tout n de $\mathbb{N}$, T_n est un polynôme de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1} pour $n \geqslant 1$.

3. Posons, pour $x \in [-1,1], \theta = \operatorname{Arc}\cos x$.
Alors : $T_n(x) = 0 \iff \cos(n\operatorname{Arc}\cos x) = 0 \iff n\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
Comme on doit avoir $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, on trouve $\theta = \dfrac{2k+1}{2n}\pi$, avec $0 \leqslant k \leqslant n-1$.
Ainsi les nombres $\cos\left(\dfrac{2k+1}{2n}\pi\right)$ sont racines de T_n. Ces nombres étant deux à deux distincts et T_n de degré n, on a fait le plein et il n'y a pas d'autre racines.
On en déduit, pour $n \geqslant 1$:
$$T_n = 2^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}\left(X - \cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right)\right)$$

4. a) Comme $\sqrt{1-t^2} = \sqrt{1-t}\sqrt{1+t}$, deux applications de la règle de Riemann assurent la convergence de l'intégrale écrite. Il est alors clair que $(P,Q) \mapsto \langle P,Q\rangle$ est symétrique, linéaire par rapport au premier argument et $\langle P,P\rangle \geqslant 0$, avec égalité si et seulement si P^2 est nul en tout point de $]-1,1[$, donc si et seulement si P est le polynôme nul.

$\langle .,. \rangle$ est un produit scalaire

b) Le changement de variable $x = \cos(\theta)$ s'imposant :

$$\langle T_n, T_k\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{T_n(x)T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_{\pi}^{0} \frac{\cos(n\theta)\cos(k\theta)}{|\sin(\theta)]}(-\sin\theta)\,d\theta$$
$$= \int_0^{\pi} \cos(n\theta)\cos(k\theta)\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (\cos(n+k)\theta) + \cos(n-k)\theta))\,d\theta$$

⋆ Si $n \neq k$, $\langle T_n, T_k\rangle = 0$;

⋆ Si $k = n \neq 0$, $\langle T_n, T_n\rangle = \frac{\pi}{2}$;

⋆ Si $k = n = 0$, $\langle T_0, T_0\rangle = \pi$.

Pour trouver une base orthonormale de E (de plus graduée en degrs), il suffit de prendre la famille :

$$(\sqrt{\frac{1}{\pi}}, \sqrt{\frac{2}{\pi}}T_1, \ldots, \sqrt{\frac{2}{\pi}}T_p)$$

Exercice 2.18.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2, et A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On définit T sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par :

$$\text{pour tout } M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) : T(M) = AM$$

1. a) Montrer que T est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

b) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que T soit un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

2. Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur propre associé. Montrer que λ est une valeur propre de T en exhibant une matrice propre associée.

3. On suppose dans cette question que A est diagonalisable. Soit $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ une base de $\mathbb{C}^n$ formée de vecteurs propres de A.

a) En considérant les matrice $X_i\,{}^tX_j$, pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, montrer que T est diagonalisable.

b) Déterminer le rang de $X_i\,{}^tX_j$.

On admet que toute matrice de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admet au moins une valeur propre.

4. On suppose dans cette question que T est diagonalisable. Soit $(M_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une base de vecteurs propres de T.

a) Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur propre associé. Montrer que l'application $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^n$, définie par $\varphi(M) = MX$ est une application linéaire surjective.

b) En considérant la famille $\left(\varphi(M_{i,j})\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, montrer que A est diagonalisable.

Solution :

1. a) T est bien une application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans lui-même et sa linéarité est banale :

$$T \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$$

b) $\star$ Si T est un automorphisme, alors T est surjective et il existe M telle que $T(M) = I$, soit $AM = I$ et A est inversible, d'inverse M.

$\star$ Réciproquement, si A est inversible, alors pour toute matrice B, on a :

$$T(A^{-1}B) = AA^{-1}B = B$$

et T est surjective, donc est un automorphisme.

2. On a $AX = \lambda X$, donc en notant $\widetilde{X}$ la matrice carrée d'ordre n dont toutes les colonnes sont égales à la colonne X, on a en calculant « par blocs » :

$$T(\widetilde{X}) = A\widetilde{X} = \lambda\widetilde{X}$$

et λ est bien valeur propre de T, puisque $\widetilde{X}$ n'est pas la matrice nulle.

3. a) ${X_i}^t X_j$ est une matrice carrée d'ordre n différente de la matrice nulle, et :

$$T({X_i}^t X_j) = A{X_i}^t X_j = (AX_i)^t X_j = \lambda_i {X_i}^t X_j$$

Ainsi ${X_i}^t X_j$ est vecteur propre de T pour la valeur propre λ_i.

Soit alors $(\lambda_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ une famille de scalaires telle que $\sum\limits_{i,j} \lambda_{i,j} {X_i}^t X_j = 0$.

On a donc : $\sum\limits_{j=1}^{n} (\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_{i,j} X_i)^t X_j = 0$

Comme la famille $({}^tX_1, \ldots, {}^tX_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{C})$, ceci impose (raisonner terme à terme) pour tout j de $[\![1, n]\!]$, $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_{i,j} X_i = 0$, et la famille $(X_1, \ldots, X_n)$ étant libre dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, tous les scalaires $\lambda_{i,j}$ sont nuls.
On a ainsi construit une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ formée de vecteurs propres de T.

b) Ces matrices sont clairement de rang 1 (matrices non nulles dont toutes les colonnes sont proportionnelles à l'une d'elles)

4. a) X est une matrice colonne non nulle, donc il existe une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ (identifié à $\mathbb{C}^n$) dont le premier vecteur est X. Pour $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ quelconque, le théorème fondamental de l'algèbre linéaire assure qu'il existe

un endomorphisme M de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $MX = Y$. Ceci prouve que φ est surjective.

b) $(M_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, donc la famille $(\varphi(M_{i,j}))_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ est génératrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^n$, on peut en extraire une base de $\mathbb{C}^n$.

Or $T(M_{i,j}) = \lambda_{i,j}M_{i,j}$, donc $A(M_{i,j}X) = \lambda_{i,j}(M_{i,j}X)$, c'est-à-dire :

$$A\varphi(M_{i,j}) = \lambda_{i,j}\varphi(M_{i,j})$$

Ainsi les matrices $\varphi(M_{i,j})$ choisies sont propres pour A et comme elles forment une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, A est diagonalisable.

3

PROBABILITÉS

Exercice 3.1.

On considère deux variables aléatoires indépendantes réelles X et Y, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, suivant toutes les deux la loi exponentielle de paramètre 1.

1. a) Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer une densité de la variable $W = Y - tX$.

   b) Déterminer, s'il existe, le moment d'ordre n (avec $n \geqslant 1$) de W.

2. En déduire une densité de la variable $Z = \dfrac{Y}{X}$.

3. Déterminer la loi de la variable $U = \dfrac{X}{X+Y}$.

Solution :

1. a) Les variables aléatoires Y et $-tX$ sont indépendantes et ont des densités : on peut donc calculer une densité de $Y - tX$ par produit de convolution.
On sait par le cours que si f_X est une densité de X, une densité de f_{aX+b} est donnée, pour $a \neq 0$ et tout b, par :

$$f_{aX+b}(x) = \frac{1}{|a|} f_X\big(\frac{x-b}{a}\big)$$

Ainsi, ici :

$$f_{-tX}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{\mathrm{e}^{x/t}}{t} & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

De plus :

$$f_{-tX}(u) f_Y(x-u) \neq 0 \iff \begin{cases} u \leqslant 0 \\ x-u \geqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} u \leqslant 0 \\ x \geqslant u \end{cases}$$

Donc :

• si $x \leqslant 0$, la condition précédente est équivalente à $u \leqslant x$ et :

$$\begin{aligned} f_W(x) &= \int_{-\infty}^{x} f_{-tX}(u) f_Y(x-u)\, du = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{t} \mathrm{e}^{u/t} \mathrm{e}^{u-x} du \\ &= \mathrm{e}^{-x} \Big[\frac{1}{t+1} \mathrm{e}^{(1+\frac{1}{t})u} \Big]_{-\infty}^{x} = \frac{\mathrm{e}^{x/t}}{1+t} \end{aligned}$$

• si $x \geqslant 0$, la condition précédente est équivalente à $u \leqslant 0$ et :

$$f_W(x) = \int_{-\infty}^{0} f_{-tX}(u) f_Y(x-u)\, du = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{t} \mathrm{e}^{u/t} \mathrm{e}^{u-x}\, du = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+t}$$

b) Par comparaison « Riemannienne », pour tout $n \in \mathbb{N}$, les intégrales :

$$I_n = \int_{-\infty}^{0} \frac{x^n \mathrm{e}^{x/t}}{1+t}\, dx \text{ et } J_n = \int_{0}^{+\infty} \frac{x^n \mathrm{e}^{-x}}{1+t}\, dx$$

convergent.

Le changement de variable de classe C^1 strictement monotone, $u = -\dfrac{x}{t}$ donne :

$$I_n = \frac{t}{1+t} \int_0^{+\infty} (-tu)^n \mathrm{e}^{-u}\, du = \frac{(-1)^n t^{n+1}}{1+t} \int_0^{+\infty} u^n \mathrm{e}^{-u}\, du = \frac{(-1)^n t^{n+1} n!}{1+t}$$

et de même $J_n = \dfrac{n!}{1+t}$.

2. On a $Z(\Omega) \subseteq \mathbb{R}^+$. Donc, pour tout $t \leqslant 0, F_Z(t) = 0$.

Soit $t > 0$:

$$P(Z \leqslant t) = P\big(\frac{Y}{X} \leqslant t\big) = P(W \leqslant 0) = \frac{t}{1+t}$$

Une densité de Z est donnée par :

$$f_Z(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{(1+t)^2} & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

3. On vérifie que $U(\Omega) \subseteq [0,1]$. Ainsi, pour $t \in]0,1[$:

$$P(U \leqslant t) = P\big(\frac{X}{X+Y} \leqslant t\big) = P(X - tX \leqslant tY) = P\big(Z \leqslant \frac{t}{1-t}\big) = t$$

Cela signifie que U suit la loi uniforme sur $[0,1]$.

Exercice 3.2.

1. Déterminer le réel α tel que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \begin{cases} \alpha t.\mathrm{e}^{-t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

soit une densité de probabilité.

α ayant la valeur trouvée, soit X une variable aléatoire admettant f pour densité.

2. Montrer que X admet des moments de tous ordres et déterminer l'espérance $E(X^n)$ de X^n, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. a) Pour quelles valeurs du réel u, la variable aléatoire e^{uX} a-t-elle une espérance ?

b) Pour quelles valeurs du réel u, la série de terme général $\dfrac{u^n}{n!}E(X^n)$ est-elle convergente ?

c) Pour quelles valeurs du réel u peut-on écrire :

$$E\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!}X^n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!}E(X^n)\,?$$

4. Pour $u \in \mathbb{R}$, déterminer la fonction de répartition et une densité de $Y_u = \mathrm{e}^{uX}$.

Solution :

1. La fonction f est positive si et seulement si $\alpha \geqslant 0$, et est continue. A l'aide d'une intégration par parties, il vient :

$$\int_0^{+\infty} \alpha\, t\, \mathrm{e}^{-t}\, dt = \alpha \left(\big[-t\, \mathrm{e}^{-t} \big]_0^{\to +\infty} + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} dt \right) = \alpha$$

Donc :

$$\alpha = 1$$

2. Pour tout entier n, $t^{n+1}\, \mathrm{e}^{-t} = o(1/t^2)$ en $+\infty$, et par intégration par parties et récurrence :

$$E(X^n) = \Gamma(n+2) = (n+1)!.$$

3. a) Soit $Y_u = \mathrm{e}^{uX}$. On sait que $E(Y_0) = 1$.
Pour $u \neq 0$, par le théorème du transfert,

$$E(Y_u) = \int_0^{+\infty} t\, \mathrm{e}^{(u-1)t} dt.$$

Or $\lim\limits_{t\to+\infty} t\,\mathrm{e}^{(u-1)\,t} = +\infty$, si $u \geqslant 1$ et $t\,\mathrm{e}^{(u-1)t} = o(1/t^2)$ au voisinage de $+\infty$ si $u < 1$, donc Y_u admet une espérance si et seulement si $u < 1$.
En utilisant une nouvelle intégration par parties, on obtient :

$$E\big(\mathrm{e}^{uX}\big) = \frac{1}{(u-1)^2}.$$

b) De manière immédiate, pour $u \in \,]-1,1[$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{n!}\,E(X^n) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\,u^n = \frac{1}{(1-u)^2}$$

c) Pour $u \in \,]-1,1[$,

$$E\big(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n\,X^n}{n!}\big) = E\big(\mathrm{e}^{uX}\big) = \frac{1}{(u-1)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\big[\frac{u^n}{n!}\,E(X^n)\big]$$

4. En notant F la fonction de répartition de X, G_u la fonction de répartition et g_u une densité de Y_u, il vient :

$$G_u(y) = P(Y_u \leqslant y) = P\big(\mathrm{e}^{uX} \leqslant y\big) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leqslant 0 \\ P(u\,X \leqslant \ln y) & \text{si } y > 0 \end{cases}$$

Ainsi :
$\star$ $Y_0 = 1$.
$\star$ Si $u > 0$, pour $y > 0$,

$$G_u(y) = P\big(X \leqslant \frac{\ln y}{u}\big) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leqslant 1 \\ F\big(\frac{\ln y}{u}\big) = 1 - \big(\frac{\ln y}{u}+1\big)\,y^{-1/u} & \text{si } 1 < y \end{cases}$$

et, en dérivant :

$$g_u(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leqslant 1 \\ \frac{1}{uy} f\big(\frac{\ln y}{u}\big) = \frac{1}{u^2}\frac{\ln y}{y^{1+1/u}} & \text{si } y > 1 \end{cases}$$

$\star$ Si $u < 0$, pour $y > 0$,

$$G_u(y) = P\big(X \geqslant \frac{\ln y}{u}\big) = 1 - F\big(\frac{\ln y}{u}\big)$$

$$\text{soit :} G_u(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leqslant 0 \\ 1 - F\big(\frac{\ln y}{u}\big) & \text{si } 0 < y < 1\text{, et} \\ 1 & \text{si } y \geqslant 1 \end{cases}$$

$$g_u(y) = \begin{cases} -\frac{1}{uy} f\big(\frac{\ln y}{u}\big) & \text{si } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 3.3.

On dispose de N boîtes indiscernables ($N \in \mathbb{N}^*$) dans lesquelles on place l'une après l'autre des billes de façon aléatoire, avec équiprobabilité du choix des urnes à chaque placement et indépendance des différents choix.

Pour j positif ou nul, on note X_j le nombre de boîtes non vides après les j premiers lancers. Par convention $X_0 = 0$ et on suppose que cette expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. Quelles valeurs peut prendre la variable aléatoire réelle X_j ?
Soit $j \geqslant 0$ et $k \in \mathbb{N}$.

2. a) Déterminer la loi de probabilité de X_0, X_1, X_2.

b) Déterminer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, les probabilités conditionnelles :

$$P_{[X_j=i]}([X_{j+1} = k]) \text{ pour } 1 \leqslant i \leqslant N.$$

c) En déduire, pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'expression de : $P([X_{j+1} = k])$ en fonction des nombres $P([X_j = i]), 1 \leqslant i \leqslant N$.

3. Soit $j \in \mathbb{N}$. On numérote les boîtes de 1 à N.
On considère les événements :
• $B =$ « au moins une boîte est restée vide au terme de j lancers »
• $B_i =$ « la boîte de numéro i est restée vide au terme de j lancers » $(1 \leqslant i \leqslant N)$.

a) Déterminer la probabilité $P(B_{i_1} \cap B_{i_2} \cdots \cap B_{i_\ell})$ pour tous indices tels que $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots i_\ell \leqslant N$.

b) En déduire $P(B)$.

c) En déduire $P([X_j = N])$.

4. Écrire un programme Pascal permettant de simuler la variable aléatoire X_j.

Solution :

1. Pour $j \geqslant 1$, X_j prend ses valeurs entre 1 et $\min(j, N)$.

2. a) $\star$ $P(X_0 = 0) = 1$, $P(X_1 = 1) = 1$.

$\star$ $P(X_2 = 1) = \dfrac{1}{n}$ (la probabilité que la deuxième bille aille dans la même boîte que la première vaut $\dfrac{1}{n}$) et $P(X_2 = 2) = \dfrac{n-1}{n}$.

b) pour $0 \leqslant i \leqslant N$:

$P_{(X_j=k)}(X_{j+1} = k) = \dfrac{k}{n}$ (on retombe dans l'une des k boîtes déjà occupées),

$P_{(X_j=k-1)}(X_{j+1} = k) = \dfrac{n-k+1}{n}$ (on tombe dans l'une des $n - (k-1)$ boîtes vides à ce moment),

Sinon : $P_{(X_j=i)}(X_{j+1}=k)=0$ (car en lançant une bille, le nombre de boîtes atteintes peut augmenter d'une unité ou rester le même).

c) $(X_j=i)_{0\leqslant i\leqslant \min(j,N)}$ est un système complet d'événements et donc :

$$P(X_{j+1}=k)=\sum_{i=0}^{min(j,N)} P_{(X_j=i)}(X_{j+1}=k)P(X_j=i)$$
$$=\frac{k}{n}P(X_j=k)+\frac{n-k+1}{n}P(X_j=k-1)$$

3. a) Pour $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_\ell\leqslant k$, on a par indépendance :

$$P(B_{i_1}\cap B_{i_2}\cdots\cap B_{i_\ell})=\big(\frac{N-\ell}{N}\big)^j$$

(car toutes les billes sont tombées dans les $(N-\ell)$ autres boîtes !)

b) On applique la formule du crible (de Poincaré) à l'événement :

$$B=B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_N$$
$$P(B)=\sum_{\ell=1}^{N-1}(-1)^{\ell+1}\sum_{i_1<i_2<\cdots i_\ell}P(B_{i_1}\cap B_{i_2}\cdots\cap B_{i_\ell})$$

Or la $n^{\text{ème}}$ somme comporte $\binom{N}{\ell}$ termes, tous de même probabilité, donc :

$$P(B)=\sum_{\ell=1}^{N-1}(-1)^{\ell+1}\binom{N}{\ell}\big(\frac{N-\ell}{N}\big)^j$$

c) Clairement :

$$P(X_j=N)=1-P(B)=\sum_{\ell=0}^{N-1}(-1)^{\ell}\binom{N}{\ell}\big(\frac{N-\ell}{N}\big)^j$$

4. Une proposition de programme :

```
B= array[1..N] of integer ; (* les boîtes*)
For k := 1 to N do B[k] :=0 ; (* mise à zéro*)
For k :=1 to j do Begin
      u := random(N)+1 (* choix d'une boîte*)
      B[u] := B[u]+1 (* on rajoute une boule*)
                  end ;
decompte := 0 ;
For i = 1 to n do if B[i]<>0 then decompte := decompte +1
```

Exercice 3.4.

On considère deux dés (non nécessairement équilibrés) A et B à n faces chacun, faces numérotées de 1 à n, avec $n\geqslant 2$. On lance ces dés et on note X_1 le numéro obtenu sur le dé A et X_2 celui obtenu sur le dé B.

Cette expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et on note, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $p_k = P([X_1 = k])$, $p'_k = P([X_2 = k])$ et $S = X_1 + X_2$. On note également $\mathcal{A} = S(\Omega)$ et $\forall\, j \in \mathcal{A},\ q_j = P([S = j])$.

Le but de l'exercice est de montrer l'inégalité suivante :

$$\max_{(i,j)\in\mathcal{A}^2} |q_i - q_j| \geqslant \frac{1}{4n} \quad (\star)$$

1. Déterminer $\mathcal{A}$.

2. On suppose à présent que pour chaque dé chaque numéro i est remplacé par le numéro $n + 1 - i$. On note alors Y_1 et Y_2 les variables prenant pour valeurs les résultats sur les dés A et B respectivement et $S' = Y_1 + Y_2$.
Comparer les lois de S et S' et montrer que $\max\limits_{j\in\mathcal{A}} q_j \geqslant \frac{1}{2n}$.

3. On suppose que $\min\limits_{j\in\mathcal{A}} q_j \leqslant \frac{1}{4n}$. Montrer alors l'inégalité $(\star)$

4. On suppose que $\min\limits_{j\in\mathcal{A}} q_j > \frac{1}{4n}$.

a) Comparer q_{n+1} et $p_1 p'_n + p'_1 p_n$, puis comparer q_{n+1} et $2\sqrt{q_2 q_{2n}}$

b) En remarquant que l'on a $q_2 \leqslant q_{2n}$ ou $q_2 \geqslant q_{2n}$, démontrer l'inégalité $(\star)$.

5. La variable aléatoire S peut-elle suivre une loi uniforme ?

Solution :

1. De manière évidente $\mathcal{A} = [\![2, 2n]\!]$.

2. On a : $Y_1 = n + 1 - X_1, Y_2 = n + 1 - X_2$. Donc $Y_1(\Omega) = Y_2(\Omega) = [\![1, n]\!]$, et $S' = Y_1 + Y_2 = 2n + 2 - S$.
Ainsi $S'(\Omega) = [\![2, 2n]\!]$ et, pour tout i de $[\![2, 2n]\!]$,

$$P(S' = i) = P(S = 2n + 2 - i) = q_{2n+2-i}.$$

$\star$ Dire que $\max\limits_{j\in\mathcal{A}} q_j \geqslant \frac{1}{2n}$ est équivalent à dire : il existe $j_0 \in \mathcal{A}$ tel que $q_{j_0} \geqslant \frac{1}{2n}$.

Raisonnons par contraposée, et supposons que pour tout $j \in \mathcal{A},\ q_j < \frac{1}{2n}$.
Alors, comme $\mathcal{A}$ est de cardinal $2n - 1$, on aurait :

$$\sum_{j\in\mathcal{A}} q_j < 2n \times \frac{1}{2n} = 1$$

ce qui est clairement absurde.

3. On suppose dans cette question qu'il existe $i_0 \in [\![2, 2n]\!]$ tel que $q_{i_0} \leqslant \frac{1}{4n}$. On aura donc :

$$\max_{j\in\mathcal{A}} q_j - \min_{j\in\mathcal{A}} q_j = q_{j_0} - q_{i_0} \geqslant \frac{1}{4n}$$

et :

$$\max_{(i,j)\in\mathcal{A}^2} |q_j - q_i| \geqslant q_{j_0} - q_{i_0} \geqslant \frac{1}{4n}$$

4. On suppose que $\min_{j\in\mathcal{A}} q_j > \frac{1}{4n}$. Donc pour tout $j \in \mathcal{A}, q_j > \frac{1}{4n}$.

a) On a $[(X_1 = 1) \cap (X_2 = n)] \cup [(X_2 = 1) \cap (X_1 = n)] \subset (S = n + 1)$.

D'où, par incompatibilité et indépendance :

$$\begin{aligned} P(S = n+1) &\geqslant P((X_1 = 1) \cap (X_2 = n)) + P((X_2 = 1) \cap (X_1 = n)) \\ &\geqslant P(X_1 = 1)P(X_2 = n) + P(X_2 = 1)P(X_1 = n) \end{aligned}$$

donc

$$q_{n+1} \geqslant p_1 p'_n + p_n p'_1.$$

Or pour a et b positifs, on a : $a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$.

Donc, en utilisant les événements :

$$(S = 2) = (X_1 = 1) \cap (X_2 = 1) \text{ et } (S = 2n) = (X_1 = n) \cap (X_2 = n)$$

$$q_{n+1} \geqslant 2\sqrt{p_1 p'_n \times p_n p'_1} = 2\sqrt{q_2 q_{2n}}$$

b) $\star$ Si $q_2 \leqslant q_{2n}$, alors $q_{n+1} \geqslant 2q_2$ et $q_{n+1} - q_2 \geqslant q_2 \geqslant \frac{1}{4n}$.

Si $q_2 \geqslant q_{2n}$, alors $q_{n+1} \geqslant 2q_{2n}$ et $q_{n+1} - q_2 \geqslant q_{2n} \geqslant \frac{1}{4n}$.

Ainsi, on a toujours :

$$\left|q_{m+1} - q_2\right| \geqslant \frac{1}{4n}.$$

5. Supposons que S suive la loi uniforme. Ainsi pour tout $(i, j) \in \mathcal{A}^2, q_i = q_j$, ce qui est absurde car alors $0 \geqslant \frac{1}{4n}$.

Exercice 3.5.

On considère une suite $(U_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, telle que pour tout $n \geqslant 1$, U_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, où $p \in]1/2, 1[$.

Pour chaque entier $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la variable X_n par : $X_n = 2U_n - n$.

1. Pour $s \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la variable aléatoire $Y_{s,n}$ par : $Y_{s,n} = \mathrm{e}^{-sX_n}$.

a) Montrer que l'on a $E(Y_{s,n}) = (p\mathrm{e}^{-s} + q\mathrm{e}^{s})^n$, où $q = 1 - p$.

b) Déterminer l'ensemble $X_n(\Omega)$ et montrer que l'on a, pour tout réel $s \geqslant 0$: $P(X_n \leqslant 0) \leqslant E(Y_{s,n})$.

c) Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'inégalité : $P(X_n \leqslant 0) \leqslant (2\sqrt{pq})^n$. On pose $r = 2\sqrt{pq}$. Vérifier que $r < 1$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on introduit la variable aléatoire Z_n en posant :

$$Z_n = \inf(0, X_1, \ldots, X_n).$$

a) Montrer que $Z_n(\Omega) \subseteq [\![-n, 0]\!]$ et calculer la probabilité $P([Z_n = -n])$.

b) Soit $n \geqslant 2$ et $k \in [\![0, n-1]\!]$. On considère l'événement $A_k = \bigcup_{i=k+1}^{n} [X_i \leqslant 0]$.

Montrer que $P(A_k) \leqslant \dfrac{r^{k+1}}{1-r}$.

c) Soit $i \in [\![-n, 0]\!]$. Prouver que l'on a :

$$P(Z_n = i) \leqslant P(A_k \cap (Z_n = i)) + P(Z_k = i)$$

d) En déduire que, pour tout $k < n$, on a : $\dfrac{E(Z_n)}{n} \geqslant -P(A_k) + \dfrac{E(Z_k)}{n}$

e) Montrer que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{E(Z_n)}{n} = 0$.

Solution :

1. a) On a :

$$\begin{aligned} E(Y_{s,n}) &= E(\mathrm{e}^{-s(2U_n - n)}) = \mathrm{e}^{sn} E(\mathrm{e}^{-2sU_n}) = \mathrm{e}^{sn} \sum_{k=0}^{n} e^{-2sk} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \\ &= \mathrm{e}^{sn}(\mathrm{e}^{-2s}p + q)^n = \left(p\,\mathrm{e}^{-s} + q\,\mathrm{e}^{s}\right)^n \end{aligned}$$

b) On voit que $X_n(\Omega) = \{-n, -n+2, -n+4, ..., n-2, n\}$, et on a :

$$\begin{aligned} E(Y_{s,n}) &= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{(n-2k)s} P(X_n = -2n + k) \\ &\geqslant \sum_{-n+2k \leqslant 0} \mathrm{e}^{(n-2k)s} P(X_n = -2n + k) \\ E(Y_{s,n}) &\geqslant \sum_{-n+2k \leqslant 0} P(X_n = -n + 2k) = P(X_n \leqslant 0) \end{aligned}$$

c) Avec ce qui précède, on obtient :

$$P(X_n \leqslant 0) \leqslant (p\,\mathrm{e}^{-s} + q\,\mathrm{e}^{s})^n = [f(s)]^n$$

Comme $f'(s) = -p\,\mathrm{e}^{-s} + q\,\mathrm{e}^{s} = q\,\mathrm{e}^{-s}(\mathrm{e}^{2s} - \frac{p}{q})$, on voit que f est strictement décroissante sur $[0, \ln\sqrt{p/q}]$ et strictement croissante sur $[\ln\sqrt{p/q}, +\infty[$. On a donc un minimum en $s = \ln\sqrt{p/q}$ et par suite :

$$P(X_n \leqslant 0) \leqslant f(2\ln\sqrt{p/q})^n = (2\sqrt{pq})^n$$

On a bien $r^2 = 4p(1-p) < 1$, car $x \mapsto x(1-x)$ est maximale sur $[0,1]$ en $\frac{1}{2}$.

2. On considère la variable aléatoire $Z_n = \inf(0, X_1, \ldots, X_n)$.

a) Avec la question 1. b) on voit que $Z_n(\Omega) \subseteq [-n, 0]$. Comme la variable X_n est la seule qui peut prendre la valeur $-n$, on a :

$$P(Z_n = -n) = P(X_n = -n) = P(U_n = 0) = q^n.$$

b) On a :

$$P(A_k) \leqslant \sum_{i=k+1}^{n} P(X_i \leqslant 0) \leqslant \sum_{i=k+1}^{n} r^i = r^{k+1}\frac{1-r^{n-k}}{1-r} \leqslant \frac{r^{k+1}}{1-r}$$

c) Soit $i \in \{-n, ..., -1, 0\}$, on a :

$$P(Z_n = i) = P(A_k \cap (Z_n = i)) + P(A_k^c \cap (Z_n = i))$$

Où A_k^c désigne le complémentaire de l'événement A_k.
Comme

$$(A_k^c \cap (Z_n = i)) = [\textstyle\bigcap_{j=k+1}^{n}(X_j > 0)] \cap (Z_n = i) \subseteq (Z_k = i)$$

car la valeur i ne peut être prise que par l'une des variables $0, X_1, ..., X_k$.
Il vient :

$$P(Z_n = i) \leqslant P(A_k \cap (Z_n = i)) + P(Z_k = i)$$

d) Soit $k < n$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{E(Z_n)}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=-n}^{0} iP(Z_n = i) &\geqslant \sum_{i=-n}^{0}\frac{i}{n}P(A_k \cap (Z_n = i)) + \frac{E(Z_k)}{n} \\ &\geqslant -\sum_{i=-n}^{0} P(A_k \cap (Z_n = i)) + \frac{E(Z_k)}{n} = -P(A_k) + \frac{E(Z_k)}{n}\end{aligned}$$

e) Avec la question 2. b) et la question précédente, on voit que :

$$0 \geqslant \frac{E(Z_n)}{n} \geqslant -\frac{r^{k+1}}{1-r} + \frac{E(Z_k)}{n}$$

pour tout $n > k$.
Soit $\varepsilon > 0$, et un entier k tel que $\frac{r^{k+1}}{1-r} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.
Cet entier k étant fixé, pour tout $n \geqslant \frac{2}{\varepsilon(1+|E(Z_k)|)}$ on aura :

$$0 \geqslant \frac{E(Z_n)}{n} \geqslant -\frac{\varepsilon}{2} + \frac{E(Z_k)}{1+|E(Z_k)|}\frac{\varepsilon}{2} \geqslant -\varepsilon$$

D'où :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{E(Z_n)}{n} = 0.$$

Exercice 3.6.

1. Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans $\mathbb{N}$ admettant une espérance $E(X)$.

Montrer que pour tout $\lambda > 0$, $E(X) \geqslant \lambda P([X \geqslant \lambda])$.

Dans la suite de l'exercice, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, S_n désigne une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, avec $0 < p < 1$, et x un réel strictement positif fixé. On pose $q = 1 - p$.

2. Montrer que pour tout $\lambda > 0$, on a :

$$P([S_n - np \geqslant nx]) \leqslant \frac{E(\mathrm{e}^{\lambda(S_n - np)})}{\mathrm{e}^{n\lambda x}}$$

3. Etablir la formule $E(\mathrm{e}^{\lambda(S_n-np)}) = \mathrm{e}^{-n\lambda p}(p.\mathrm{e}^{\lambda} + q)^n$

4. Pour tout $\lambda \geqslant 0$, on pose : $\psi(\lambda) = \ln(p.\mathrm{e}^{\lambda} + q) - \lambda p$.

   a) Montrer que : $\sup_{\lambda \geqslant 0} \psi''(\lambda) \leqslant \frac{1}{4}$.

   b) En déduire que : $\sup_{\lambda \geqslant 0} \psi(\lambda) \leqslant \frac{\lambda^2}{8}$.

5. Montrer enfin l'inégalité : $P([S_n - np \geqslant nx]) \leqslant \mathrm{e}^{-2nx^2}$.

Solution :

1. On écrit :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x_i \geqslant \lambda} x_i P(X = x_i) + \sum_{x_i < \lambda} x_i P(X = x_i) \\ &\geqslant \sum_{x_i \geqslant \lambda} x_i P(X = x_i) \geqslant \lambda \sum_{x_i \geqslant \lambda} P(X = x_i) = \lambda P(X \geqslant \lambda) \end{aligned}$$

2. Par croissance de la fonction exponentielle et comme $\lambda \geqslant 0$, on a :

$$P(S_n - np \geqslant nx) = P(\mathrm{e}^{\lambda(S_n-np)} \geqslant \mathrm{e}^{\lambda nx})$$

On applique alors la question précédente à $X = \mathrm{e}^{\lambda(S_n-np)}$. Il vient :

$$P(S_n - np \geqslant nx) \leqslant \frac{E(\mathrm{e}^{\lambda(S_n-np)})}{\mathrm{e}^{n\lambda x}}$$

3. Comme S_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, en appliquant le théorème du transfert, il vient :

$$E(\mathrm{e}^{\lambda(S_n-np)}) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{\lambda(k-np)}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{-\lambda np}\binom{n}{k}(\mathrm{e}^{\lambda}p)^k(1-p)^{n-k} = \mathrm{e}^{-n\lambda p}(p\mathrm{e}^{\lambda}+q)^n$$

4. a) La fonction ψ est de classe $\mathcal{C}^2$ et

$$\psi'(\lambda) = -p + \frac{p\mathrm{e}^{\lambda}}{p\mathrm{e}^{\lambda}+q} \quad ; \quad \psi''(\lambda) = \frac{pq\mathrm{e}^{\lambda}}{(p\mathrm{e}^{\lambda}+q)^2}$$

On vérifie que $\psi''(\lambda) \leqslant \frac{1}{4}$ car $(p\mathrm{e}^{\lambda}-q)^2 = (p\mathrm{e}^{\lambda}+q)^2 - 4pq\mathrm{e}^{-\lambda} \geqslant 0$.

b) En intégrant et en vérifiant que $\psi'(0) = \psi(0) = 0$, il vient :

$$\psi'(\lambda) = \int_0^{\lambda} \psi''(u)\,du \leqslant \int_0^{\lambda} \frac{du}{4} = \frac{\lambda}{4}$$

et

$$\psi(\lambda) = \int_0^{\lambda} \psi'(u)\,du \leqslant \int_0^{\lambda} \frac{u\,du}{4} = \frac{\lambda^2}{8}$$

5. On sait que pour tout $\lambda > 0$,

$$P([S_n - np \geqslant nx]) \leqslant \frac{E(\mathrm{e}^{\lambda(S_n-np)})}{\mathrm{e}^{n\lambda x}} \leqslant \mathrm{e}^{-n(\lambda x-\psi(\lambda))}$$

Pour résoudre cette question, il suffit donc de montrer l'existence de $\lambda > 0$ tel que $2x^2 \leqslant \lambda x - \psi(\lambda)$, et par la question précédente, l'existence de $\lambda > 0$ tel que $\frac{\lambda^2}{8} \leqslant \lambda x - 2x^2$.

En résolvant cette inéquation en x (qui est un « carré parfait »), on voit que le réel $\lambda = 4x$ convient.

Exercice 3.7.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0,1]$ par $f(x) = \mathrm{e}^{\lambda(x-1)}$, où λ est un réel strictement positif.

1. Étudier, sur l'intervalle $[0,1]$, les variations de la fonction F définie par

$$F(x) = f(x) - x.$$

On donnera les tableaux de variations correspondant aux cas $\lambda \leqslant 1$ et $\lambda > 1$. En déduire en fonction des valeurs du paramètre λ le nombre de points fixes de f dans $[0,1]$. On désigne par $r(\lambda)$ le plus petit point fixe de f.

2. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 0$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

Montrer que la suite (u_n) est convergente. Déterminer sa limite. Celle-ci peut-elle être égale à 1 ?

Dans une population on appelle descendants de première génération d'un individu, ses enfants, et plus généralement, pour $p \geqslant 1$, descendants de $(p+1)^{\text{ème}}$ génération les enfants de ses descendants de $p^{\text{ème}}$ génération. On suppose :

• les nombres d'enfants de différents individus d'une même génération sont des variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées, suivant toutes la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On note X une de ces variables aléatoires.

• Plus généralement, pour tout $n \geqslant 1$, les variables aléatoires associant aux différents individus d'une même génération les nombres possibles de leurs descendants de $n^{\text{ème}}$ génération sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi. On note X_n une de ces variables aléatoires

• On note, pour tout k de $\mathbb{N}$, $p(k) = P(X = k)$, la probabilité pour un individu d'avoir k enfants, et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = P(X_n = 0)$, (avec $u_0 = 0$), la probabilité pour un individu de n'avoir aucun descendant à la $n^{\text{ème}}$ génération.

La limite de cette suite représente, si elle existe, la probabilité pour un individu de voir sa descendance s'éteindre.

3. a) Montrer que pour tout réel x, $\sum_{k=0}^{\infty} p(k)x^k = f(x)$.

b) En remarquant que $u_1 = f(u_0)$, calculer la probabilité conditionnelle pour qu'un individu n'ait pas de petits-enfants sachant qu'il a exactement k enfants. En déduire que $u_2 = f(u_1)$.

c) Démontrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. En déduire la limite de la suite $(u_n)_n$.

Solution :

Soit f la fonction définie sur $[0,\ 1]$ par $f(x) = \exp(\lambda(x-1)),\ \lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

1. On a $F'(x) = f'(x) - 1 = \lambda \mathrm{e}^{\lambda(x-1)} - 1$.

La fonction F' s'annule pour $x = 1 + \frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{1}{\lambda}\right) = r(\lambda)$

Il faut donc discuter selon la position de $r(\lambda)$ par rapport à 1 :

$\lambda \leqslant 1$ $\qquad\qquad$ $\lambda > 1$

x	0		1
$F'(x)$		$-$	
F	$\mathrm{e}^{-\lambda}$	$\searrow$	0

x	0		$r(\lambda)$		1
$F'(x)$		$-$	0	$+$	
F	$\mathrm{e}^{-\lambda}$	$\searrow$		$\nearrow$	0

Pour $\lambda \leqslant 1$ il y a une seule solution dans $[0,1]$ qui est 1 et deux solutions si $\lambda > 1$.

2. La fonction f est croissante sur $[0,1]$ et $u_1 \geqslant u_0$ donc, comme la suite est monotone, elle est croissante. Le point $r(\lambda)$ est un point fixe pour f. Comme $u_0 \leqslant r(\lambda)$, on en déduit toujours par croissance de f et par récurrence que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant r(\lambda)$$

Par suite, f étant continue, (u_n) converge vers $r(\lambda)$. Pour $\lambda \leqslant 1$, cette limite est 1.

3. Les hypothèses permettent de déduire,

a) Pour tout réel x de $]0,1[$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} p(k)x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda x)^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda} = \mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda x} = e^{\lambda(x-1)} = f(x)$$

b) On a $u_1 = P(X_1 = 0) = \mathrm{e}^{-\lambda} = f(u_0)$. De plus, par indépendance

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, P_{(X_1=k)}(X_2 = 0) = (\mathrm{e}^{-\lambda})^k = \mathrm{e}^{-\lambda k}$$

Car cela signifie que chacun des k enfants est sans descendance de première génération. On en déduit :

$$\begin{aligned} P(X_2 = 0) &= \sum_{k=0}^{+\infty} P_{(X_1=k)}(X_2 = 0) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda k}\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda} = \exp(\lambda \mathrm{e}^{-\lambda})\mathrm{e}^{-\lambda} \\ &= f(\mathrm{e}^{-\lambda}) = f(u_1) \end{aligned}$$

c) De la même manière,

$$\begin{aligned} u_{n+1} = P(X_{n+1} = 0) &= \sum_{k=0}^{+\infty} P_{(X_1=k)}(X_{n+1} = 0)P(X_1 = k) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} u_n^k \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda} = \exp(\lambda u_n)\mathrm{e}^{-\lambda} = f(u_n) \end{aligned}$$

On en déduit que la limite de la suite (u_n) est $r(\lambda)$.

Exercice 3.8.

Soit X une variable aléatoire réelle à densité, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, dont une densité f est continue sur $\mathbb{R}$ et qui admet un moment d'ordre 2 ($E(X^2)$ existe).

1. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} x^2 P(|X| \geqslant x) = 0$.

2.Prouver que l'intégrale $\int_0^{+\infty} tP(|X| \geqslant t)dt$ est convergente.

3. Montrer que : $E(X^2) = 2\int_0^{+\infty} tP(|X| \geqslant t)dt$.

4. Montrer que l'on a : $E(X) = \int_0^{+\infty} P(|X| \geqslant t)dt$.

5. On considère n variables aléatoires indépendantes $X_1, \ldots, X_n$ suivant une loi exponentielle de paramètres respectifs $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. On pose : $X = \inf(X_1, \ldots, X_n)$.

a) Montrer que X est une variable aléatoire réelle à densité qui admet un moment d'ordre 2.

b) Calculer la variance de X.

Solution :

1. On a : $0 \leqslant x^2 P(|X| \geqslant x) = x^2 \int_{-\infty}^{-x} f(t)\,dt + x^2 \int_x^{+\infty} f(t)\,dt$

$$0 \leqslant x^2 P(|X| \geqslant x) \leqslant \int_{-\infty}^{-x} t^2 f(t)\,dt + \int_x^{+\infty} t^2 f(t)\,dt$$

Comme par hypothèse l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,dt$ est convergente, on en déduit immédiatement (restes d'intégrales convergentes) que :

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 P(|X| \geqslant x) = 0$$

2. Notons F la fonction de répartition de X. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$P(|X| \geqslant t) = P(X \leqslant -t) + P(X > t) = F(-t) + 1 - F(t)$$

Si $x > 0$, en tenant compte de la question 1. on voit que :

$$\begin{aligned}\int_0^x tP(|X| \geqslant t)dt &= \int_0^x t[F(-t) + 1 - F(t)]dt \\ &= \left[\frac{t^2}{2}(F(-t) + 1 - F(t))\right]_0^x - \int_0^x \frac{t^2}{2}[-f(-t) - f(t)]dt \\ &= \frac{1}{2}x^2 P(|X| \geqslant x) + \int_{-x}^x \frac{s^2}{2} f(s)\,ds.\end{aligned}$$

Comme la quantité $x^2P(|X| \geqslant x)$ est de limite nulle et que la dernière intégrale converge, on obtient bien la convergence de l'intégrale considérée.

3. Avec la question 1., on voit que, lorsque x tend vers $+\infty$:

$$\int_0^x tP(|X| \geqslant t)\,dt = \frac{1}{2}x^2P(|X| \geqslant t) + \int_{-x}^x \frac{s^2}{2}f(s)\,ds \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{E(X^2)}{2}$$

D'où l'égalité souhaitée.

4. On peut prouver l'existence de $E(X)$ avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz ou bien en utilisant l'inégalité $2|X| \leqslant 1 + X^2$. De plus, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^x P(|X| \geqslant t)\,dt &= \int_0^x [F(-t) + 1 - F(t)]\,dt \\ &= \big[t(F(-t) + 1 - F(t))\big]_0^x - \int_0^x t[-f(-t) - f(t)]\,dt \\ &= xP(|X| \geqslant x) + \int_{-x}^x sf(s)\,ds\end{aligned}$$

Comme on a $\lim\limits_{x\to+\infty} xP(|X| \geqslant x) = 0$, en passant à la limite on obtient :

$$E(X) = \int_0^{+\infty} P(|X| \geqslant t)\,dt.$$

5. a) Notons F la fonction de répartition de X. En tenant compte de l'indépendance des variables $X_1, \ldots, X_n$, on obtient :

$$\begin{aligned}F(t) &= P(X \leqslant t) = 1 - P(X > t) = 1 - P(\textstyle\bigcap_{i=1}^n (X_i > t)) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^n P(X_i > t) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - F_{X_i}(t))\end{aligned}$$

Comme les variables X_i suivent des lois exponentielles, on en déduit facilement que X est une variable à densité. De plus on a $0 \leqslant X \leqslant X_1 + \cdots + X_n$, d'où $X^2 \leqslant (X_1 + \cdots + X_n)^2$, et par suite X admet un moment d'ordre 2 puisque chaque X_i en admet un.

b) Avec ce qui précède, on voit que :

$$\begin{aligned}E(X) &= \int_0^{+\infty} P(|X| \geqslant t)\,dt = \int_0^{+\infty} P(\textstyle\bigcap_{i=1}^n (X_i > t))\,dt \\ &= \int_0^{+\infty} \prod_{i=1}^n (1 - F_{X_i}(t))dt = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)t}dt = \frac{1}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n}\end{aligned}$$

et, avec $S = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$, que :

$$E(X^2) = 2\int_0^{+\infty} tP(|X| \geqslant t)\,dt = \int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-St}dt$$

$$= 2\big[-\frac{t}{S}\mathrm{e}^{-St}\big]_0^{+\infty} + \frac{2}{S}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-St}dt = \frac{2}{S^2} = \frac{2}{(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)^2}$$

D'où :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{1}{(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)^2}$$

Exercice 3.9.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère $n+1$ variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n, X_{n+1}$ mutuellement indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$. On pose :

$$Y_n = X_1X_2...X_n = \prod_{k=1}^{n} X_k$$

1. Déterminer une densité de la variable aléatoire $-\ln(X_1)$. En déduire une densité de $-\ln(Y_n)$.

2. Le but de cette question est de calculer $p = P([Y_n < X_{n+1}])$.

a) Montrer que la variable aléatoire $\ln(X_{n+1}) - \ln(Y_n)$ admet pour densité la fonction h définie par :

$$h(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^x \displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\,dt & \text{si } x \geqslant 0 \\ \dfrac{\mathrm{e}^x}{2^n} & \text{sinon} \end{cases}$$

b) En déduire la valeur de p.

3. a) Déterminer un équivalent de $h(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$, la fonction h étant la fonction définie dans la question précédente.

b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$.

Solution :

1. La variable aléatoire $-\ln(X_1)$ prend ses valeurs dans $[0,+\infty[$.
Soit $t \in \mathbb{R}^+$. On a :

$$P(-\ln(X_1) \leqslant t) = P(\ln(X_1) \geqslant -t) = P(X_1 \geqslant \mathrm{e}^{-t}) = 1 - \mathrm{e}^{-t}$$

Ainsi, $-\ln(X_1)$ suit la loi exponentielle de paramètre 1, ou encore la loi $\gamma(1,1)$.

Étant donné que $-\ln(Y_n) = \sum\limits_{k=1}^{n}(-\ln(X_k))$, et que les $-\ln(X_k)$ sont mutuellement indépendantes en tant que fonctions de variables mutuellement indépendantes, on a grâce à la stabilité de la loi γ :

$$-\ln(Y_n) \hookrightarrow \gamma(1,n).$$

Ainsi, une densité f_n de $-\ln(Y_n)$ est donnée par :

$$f_n(t) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^{-t}t^{n-1}}{(n-1)!} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. a) Par convolution, la variable $\ln(X_{n+1}) - \ln(Y_n)$ admet pour densité la fonction h définie par :

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)f_n(t)\,dt$$

où $f(t) = \mathrm{e}^t$ si $t \leqslant 0$ et $f(t) = 0$ sinon. On remarque que :

$$(f(x-t)f_n(t) \neq 0) \Longleftrightarrow (t \geqslant 0 \text{ et } x-t \leqslant 0) \Longleftrightarrow (t \geqslant x \text{ et } t \geqslant 0)$$

• Premier cas : $x \leqslant 0$.

$$h(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{x-t}\frac{\mathrm{e}^{-t}t^{n-1}}{(n-1)!}\,dt = \mathrm{e}^x \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\,dt$$

En faisant le changement de variable $u = 2t$, on obtient :

$$h(x) = \mathrm{e}^x \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u}\Big(\frac{u}{2}\Big)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}\frac{1}{2}\,du = \frac{\mathrm{e}^x}{2^n}\int_0^{+\infty} f_n(u)\,du = \frac{\mathrm{e}^x}{2^n}$$

• Deuxième cas : $x \geqslant 0$. Alors :

$$h(t) = \mathrm{e}^x \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\,dt$$

b) On a alors :

$$p = P(\ln(Y_n) < \ln(X_{n+1})) = 1 - P(\ln(X_{n+1}) - \ln(Y_n) \leqslant 0)$$

$$= 1 - \int_{-\infty}^{0} \frac{\mathrm{e}^x}{2^n}\,dx = 1 - \frac{1}{2^n}\big[\mathrm{e}^x\big]_{\to-\infty}^{0}$$

donc :

$$p = 1 - \frac{1}{2^n}$$

3. a) Pour $x \geqslant 0$, l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}dt$ existe (car la fonction Γ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et $n > 1$).

En faisant des intégrations par parties successives, il vient :

$$I_n(x) = \frac{x^{n-1}\mathrm{e}^{-2x}}{2(n-1)!} + \mathrm{e}^{-2x}\sum_{j=0}^{n-2} a_{n,j}x^j$$

où les coefficients $a_{n,j}$ sont sans intérêt ici. Ainsi :

$$I_n(x) \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{x^{n-1}\mathrm{e}^{-2x}}{2(n-1)!},$$

b) Soit $x > 0$. Par la question précédente :

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{n-1}\mathrm{e}^{-x}}{2(n-1)!} = 0$$

Exercice 3.10.

On considère deux variables aléatoires indépendantes X et Y définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant respectivement la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et la loi exponentielle de paramètre $\mu > 0$.

1. Soit r un réel strictement positif. Quelle est la loi de la variable $-rX$?

2. Montrer que la variable $S = Y - rX$ est à densité et qu'une densité de S est l'application h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda\mu}{\lambda+\mu r}\mathrm{e}^{-\mu x} & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{\lambda\mu}{\lambda+\mu r}\mathrm{e}^{\frac{\lambda x}{r}} & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

3. a) Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire $R = \dfrac{Y}{X}$.

b) Montrer que la variable aléatoire R est à densité et préciser une densité de R.

c) La variable aléatoire R admet-elle une espérance ?

4. Soit Z et T deux variables aléatoires indépendantes dont des densités, notées f_Z et f_T sont nulles sur $\mathbb{R}^-$ et strictement positives sur $\mathbb{R}_+^*$.

a) On pose $V = \ln(Z)$. Donner, en fonction de f_Z, une densité de V.

b) On pose $W = -\ln(T)$. Donner, en fonction de f_T, une densité de W.

c) On pose $S = \ln\left(\dfrac{Z}{T}\right)$. Déduire de ce qui précède qu'une densité de S est donnée par :

$$f_S(s) = \mathrm{e}^s \int_0^{+\infty} u f_Z(u\,\mathrm{e}^s) f_T(u) du$$

d) Montrer qu'une densité de la variable aléatoire Q définie par $Q = \dfrac{Z}{T}$ est donnée par :

$$f_Q(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \displaystyle\int_0^{+\infty} t f_Z(xt) f_T(t) dt & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

e) Retrouver, grâce à cette dernière formule, une densité de la variable aléatoire R définie à la question 3.

Solution :

1. La variable aléatoire $-rX$ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^-$, et pour $x \leqslant 0$,

$$P(-rX \leqslant x) = P(X \geqslant -\frac{x}{r}) = \mathrm{e}^{\frac{\lambda x}{r}}.$$

Une densité de $-rX$ est donc : $f : x \mapsto \frac{\lambda}{r}\mathrm{e}^{\frac{\lambda x}{r}}\mathbf{1}_{]-\infty,0]}$.

2. On a, par convolution :

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(x-t) f_{-rX}(t)\, dt = \int_{-\infty}^{0} f_Y(x-t)\frac{\lambda}{r}\mathrm{e}^{\frac{\lambda t}{r}}\, dt$$

$\rightarrow$ Si $x \geqslant 0$, on obtient :

$$h(x) = \int_{-\infty}^{0} \mu \mathrm{e}^{-\mu(x-t)}\frac{\lambda}{r}\mathrm{e}^{\frac{\lambda t}{r}}\, dt = \tfrac{\lambda\mu}{r}\mathrm{e}^{-\mu x}\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{(\mu+\frac{\lambda}{r})t}\, dt = \frac{\lambda\mu \mathrm{e}^{-\mu x}}{\lambda+\mu r}$$

$\rightarrow$ Si $x \leqslant 0$, on obtient :

$$h(x) = \frac{\lambda\mu}{r}\mathrm{e}^{-\mu x}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{(\mu+\frac{\lambda}{r})t}dt = \frac{\lambda\mu \mathrm{e}^{\frac{\lambda}{r}x}}{\lambda+\mu r}$$

Ainsi :

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda\mu}{\lambda+\mu r}\mathrm{e}^{-\mu x} & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{\lambda\mu}{\lambda+\mu r}\mathrm{e}^{\frac{\lambda x}{r}} & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

3. a) Soit r un réel strictement positif. On a :

$$P\big(\frac{Y}{X} \leqslant r\big) = P(Y \leqslant rX) = P(Y - rX \leqslant 0) = \int_{-\infty}^{0}\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu r}\mathrm{e}^{\frac{\lambda}{r}t}\, dt$$

Finalement :

$$\forall r > 0,\ F_R(r) = \frac{\mu r}{\mu r + \lambda}$$

b) Une densité de R est donc, par dérivation et pour $r \geqslant 0$ (ou $r > 0$) :

$$f_R(r) = \frac{\mu\lambda}{(\mu r+\lambda)^2}$$

c) Comme $r f_R(r) \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{\lambda}{\mu}\times\frac{1}{r}$, la variable R n'admet pas d'espérance.

4. a) On a : $F_V(x) = P(V \leqslant x) = P(\ln Z \leqslant x) = P(Z \leqslant \mathrm{e}^x) = F_Z(\mathrm{e}^x)$.
En dérivant, on obtient :

$$f_V(x) = \mathrm{e}^x f_Z(\mathrm{e}^x)$$

b) De même :

$$F_W(x) = P(W \leqslant x) = P(-\ln T \leqslant x) = P(\ln T \geqslant -x) = P(T \geqslant \mathrm{e}^{-x})$$
$$= 1 - F_T(\mathrm{e}^{-x}).$$

En dérivant :

$$f_W(x) = \mathrm{e}^{-x} f_T(\mathrm{e}^{-x})$$

c) Ainsi : $S = \ln\left(\frac{Z}{T}\right) = \ln Z - \ln T = V + W$. Les variables Z et T étant indépendantes, le lemme des coalitions permet d'affirmer que les variables V et W sont indépendantes. On peut donc effectuer un produit de convolution pour trouver une densité de Z :

$$f_S(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_V(s-t) f_W(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{s-t} f_Z(\mathrm{e}^{s-t}) \mathrm{e}^{-t} f_T(\mathrm{e}^{-t})\, dt$$
$$= \mathrm{e}^{s} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t} f_Z(\mathrm{e}^{s-t}) f_T(\mathrm{e}^{-t})\, dt$$

On effectue alors le changement de variable $u = \mathrm{e}^{-t}$, avec $dt = -\frac{du}{u}$. On obtient donc :

$$f_S(s) = \mathrm{e}^{s} \int_0^{+\infty} u f_Z(u\,\mathrm{e}^{s}) f_T(u)\, du$$

d) Pour $x > 0$,

$$F_Q(x) = P(Q \leqslant x) = P\left(\frac{Z}{T} \leqslant x\right) = P\left(\ln\left(\frac{Z}{T}\right) \leqslant \ln x\right) = F_S(\ln x)$$

En dérivant, on obtient :

$$f_Q(x) = \frac{1}{x} f_S(\ln x) = \frac{1}{x}\, \mathrm{e}^{\ln x} \int_0^{+\infty} u f_Z(ux) f_T(u)\, du$$

Finalement :

$$f_Q(x) = \int_0^{+\infty} u f_Z(xu) f_T(u)\, du.$$

e) La question précédente donne alors : une densité de R est la fonction h telle que pour $x \geqslant 0$:

$$h(x) = \int_0^{+\infty} t\mu \mathrm{e}^{-\mu x t} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} dt$$

Après intégration par parties, il vient :

$$h(x) = \frac{\lambda\mu}{(\mu x + \lambda)^2}$$

Exercice 3.11.

Soit θ un réel strictement positif. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur l'intervalle $]0, \theta[$. Soit $(X_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que X. Pour tout entier $n \geqslant 1$ on pose :

$$Y_n = \sup(X_1, \ldots, X_n), \quad Z_n = \inf(X_1, \ldots, X_n),$$
$$T_n = \frac{2}{n}(X_1 + \cdots + X_n), \quad T'_n = \frac{n+1}{n} Y_n \text{ et } T''_n = Y_n + Z_n$$

1. a) Déterminer une densité, la fonction de répartition, l'espérance et la variance de la variable aléatoire X.

b) Montrer que $(T_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite convergente d'estimateurs sans biais de θ.

2. a) Montrer que Y_n est une variable à densité. Déterminer son espérance et sa variance.

b) Montrer que $(T'_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite convergente d'estimateurs sans biais de θ et comparer $V(T_n)$ et $V(T'_n)$.

3. a) Montrer que Z_n est une variable à densité. Déterminer son espérance et sa variance.

b) Retrouver l'égalité $V(Y_n) = V(Z_n)$ sans calcul.

c) Montrer que $V(T''_n) \leqslant 4V(Y_n)$.

d) Montrer que $(T''_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite convergente d'estimateurs sans biais de θ.

Comparer $V(T''_n)$ et $V(T_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Solution :

1. a) C'est une question de cours. Une densité de X est donnée par :

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/\theta & \text{si } x \in]0, \theta[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a alors $E(X) = \dfrac{\theta}{2}$ et $V(X) = \dfrac{\theta^2}{12}$.

b) Il suffit de calculer l'espérance $E(T_n)$ et la variance $V(T_n)$. On a :

$$E(T_n) = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} E(X_k) = \frac{2}{n} \times \frac{n\theta}{2} = \theta$$

Ainsi T_n est un estimateur sans biais de θ. Puis par indépendance :

$$V(T_n) = \frac{4}{n^2} \sum_{k=1}^{n} V(X_k) = \frac{4}{n^2} \times \frac{n\theta^2}{12} = \frac{\theta^2}{3n}$$

Cette dernière quantité tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$: (T_n) est une suite d'estimateurs sans biais convergente.

2. a) Toujours par indépendance :

$$P(Y_n \leqslant y) = P([Y_1 \leqslant y] \cap \cdots \cap [Y_n \leqslant y]) = \prod_{k=1}^{n} P(Y_k \leqslant y) = (F_X(y))^n$$

Ainsi la fonction de répartition de Y_n est :

$$F_{Y_n}(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leqslant 0 \\ \left(\frac{y}{\theta}\right)^n & \text{si } y \in]0, \theta[\\ 1 & \text{si } y \geqslant \theta \end{cases}$$

et une densité :

$$f_{Y_n}(y) = \begin{cases} \frac{n}{\theta}\left(\frac{y}{\theta}\right)^{n-1} & \text{si } y \in]0, \theta[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Il vient, après des calculs évidents :

$$E(Y_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_{Y_n}(y)\, dy = \frac{n\theta}{n+1}$$

et

$$V(Y_n) = E(Y_n^2) - E^2(Y_n) = \frac{n\theta^2}{(n+2)(n+1)^2}$$

b) La suite (T'_n) est une suite d'estimateurs sans biais puisque :

$E(T'_n) = \frac{n+1}{n} E(Y_n) = \theta$ et $V(T'_n) = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 V(Y_n) = \frac{\theta^2}{(n+2)^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

De plus, comme pour $n \geqslant 1, 3n \leqslant n(n+2)$, on a : $V(T'_n) \leqslant V(T_n)$.

3. a) Toujours par indépendance :

$$P(Z_n \leqslant y) = 1 - P(Z_n > y) = 1 - (1 - F_X(y))^n$$

Soit :

$$P(Z_n \leqslant y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leqslant 0 \\ \frac{n}{\theta}\left(1 - \frac{y}{\theta}\right)^n & \text{si } y \in]0, \theta[\\ 1 & \text{si } y \geqslant \theta \end{cases}$$

et une densité de Z_n est :

$$f_{Z_n}(y) = \begin{cases} \frac{n}{\theta}\left(1 - \frac{y}{\theta}\right)^{n-1} & \text{si } y \in]0, \theta[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Un calcul immédiat donne $E(Z_n) = \frac{\theta}{n+1}$ et $V(Z_n) = \frac{n\theta^2}{(n+1)^2(n+2)}$.

b) On sait que si X suit la loi uniforme $\mathcal{U}(]0, \theta[)$, alors $\theta - X$ suit la même loi. Or :

$$\theta - Z_n = \max(\theta - X_1, \ldots, \theta - X_n)$$

Donc $V(Z_n) = V(\theta - Z_n) = V(Y_n)$.

c) L'inégalité de Cauchy Schwarz donne $|\operatorname{Cov}(Y_n, Z_n)| \leqslant \sqrt{V(Y_n)}\sqrt{V(Z_n)}$. D'où :

$V(Y_n + Z_n) = V(Y_n) + 2\operatorname{Cov}(Y_n, Z_n) + V(Z_n)$

$$\leqslant V(Y_n) + 2\sqrt{V(Y_n)}\sqrt{V(Z_n)} + V(Z_n)$$
$$\leqslant (\sqrt{V(Y_n)} + \sqrt{V(Z_n)})^2 = (2\sqrt{V(Y_n)})^2 = 4V(Y_n)$$

d) De nouveau : $E(T_n'') = E(Y_n) + E(Z_n) = \theta$ entraîne que Z_n est un estimateur sans biais, et comme $V(T_n'') \leqslant 4V(Y_n)$, c'est un estimateur convergent. De plus :

$$0 \leqslant \frac{V(T_n'')}{V(T_n)} \leqslant 4\frac{V(Y_n)}{V(T_n)} = \frac{12n^2}{(n+1)^2(n+2)} \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{12}{n}$$

Donc pour n assez grand, on aura : $V(T_n'') \leqslant V(T_n)$.

Exercice 3.12.

1. On considère deux suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définies pour tout n de $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1}\binom{n}{k+1}, \text{ et } v_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2}\binom{n}{k+1}$$

a) Exprimer, pour tout $n \geqslant 2$, $u_n - u_{n-1}$ en fonction de n.

b) Exprimer, pour tout $n \geqslant 2$, $v_n - v_{n-1}$ en fonction de u_n et n.

Soit $X_1, \ldots, X_n$, $n \in \mathbb{N}^*$, des variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes la loi exponentielle de paramètre 1. On note $Y_n = \inf(X_1, \ldots, X_n)$ et $Z_n = \sup(X_1, \ldots, X_n)$.

2. a) Montrer que Y_n est une variable à densité et donner sa densité. Reconnaître la loi de Y_n et donner son espérance et sa variance.

b) Montrer que Z_n est une variable à densité et préciser une densité.

3. Espérance de Z_n.

a) Montrer que Z_n admet une espérance et exprimer cette espérance sous forme intégrale.

b) En déduire que $E(Z_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

4. Montrer que Z_n^2 admet une espérance et exprimer $E(Z_n^2)$ en fonction de v_n.

Solution :

1. a) Par la formule de Pascal, et pour $n \geqslant 2$:

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1}\binom{n}{k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1}\left(\binom{n-1}{k+1} + \binom{n-1}{k}\right)$$
$$= \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(-1)^k}{k+1}\binom{n-1}{k+1} + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \times \frac{n}{k+1}\binom{n-1}{k}$$
$$= u_{n-1} + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n}{k+1} = u_{n-1} - \frac{1}{n}\sum_{h=1}^{n}(-1)^h\binom{n}{h}$$

Et par la formule du binôme :

$$u_n = u_{n-1} - \frac{1}{n}(0-1) = u_{n-1} + \frac{1}{n}$$

b) De même :

$$v_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2}\left(\binom{n-1}{k+1} + \binom{n-1}{k}\right)$$
$$= \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2}\binom{n-1}{k+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2}\binom{n-1}{k}$$
$$= v_{n-1} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2}\binom{n-1}{k} = v_{n-1} + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1}\binom{n}{k+1}$$

$$v_n = v_{n-1} + \frac{1}{n}u_n$$

2. a) La fonction de répartition des variables aléatoires X_k est :

$$F_k : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Or, pour tout x de $\mathbb{R}$: $P(Y_n > x) = P((X_1 > x) \cap \ldots \cap (X_n > x))$ et par idépendance :

$$P(Y_n > x) = (1 - F(x))^n$$

Ainsi :

$$P(Y_n \leqslant x) = 1 - (1 - F(x))^n = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-nx} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

On reconnaît la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre n et donc :

$$E(Y_n) = \frac{1}{n}\ ;\ V(Y_n) = \frac{1}{n^2}$$

b) De la même façon :

$$P(Z \leqslant x) = P((X_1 \leqslant x) \cap \ldots \cap (X_n \leqslant x)) = (F(x))^n$$

La variable aléatoire Z_n est donc une variable à densité, et on peut prendre pour densité la fonction :

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ n\mathrm{e}^{-x}(1 - \mathrm{e}^{-x})^{n-1} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

3. a) $\forall\, x \geqslant 0, 0 \leqslant nx\mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-x})^{n-1} \leqslant nx\mathrm{e}^{-x}$ et la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x}dx$ montre que Z_n admet une espérance donnée par :

$$E(Z_n) = \int_0^{+\infty} nx\mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-x})^{n-1}dx$$

b) En développant par la formule du binôme, on obtient :

$$nx\mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-x})^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} n\binom{n-1}{k}(-1)^k x\mathrm{e}^{-(k+1)x}$$

Il est connu que $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-(k+1)x}\,dx = \frac{1}{(k+1)^2}$ (intégrer par parties), et ainsi :

$$E(Z_n) = \sum_{k=0}^{n-1} n\binom{n-1}{k}(-1)^k \frac{1}{(k+1)^2} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1}\binom{n}{k+1}$$

Soit : $E(Z_n) = u_n$.
Comme $u_1 = 1$, la relation de récurrence précédente donne alors :

$$E(Z_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

4. Toutes les convergences étant aisées, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
E(Z_n^2) &= \int_0^{+\infty} nx^2\mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-x})^{n-1}dx \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} n\binom{n-1}{k}(-1)^k \int_0^{+\infty} x^2\mathrm{e}^{-(k+1)x}dx \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} n\binom{n-1}{k}(-1)^k \frac{2}{(k+1)^3} \text{ (intégrer deux fois par parties)} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1}(-1)^k \frac{2}{(k+1)^2}
\end{aligned}$$

Soit :

$$E(Z_n^2) = 2v_n$$

Exercice 3.13.

Une personne envoie des courriers électroniques via deux serveurs notés A et B. L'expérience montre que le serveur A est choisi avec la probabilité p (avec $p \in]0,1[$) et le serveur B le reste du temps, les choix successifs étant supposés indépendants. Les envois sont représentés par une suite de lettres. La séquence $ABBBAAB...$ signifie que le premier message a transité par le serveur A, les trois suivants par B, les cinquième et sixième messages par A, le suivant par B, etc. On dit, dans ce cas (comme pour $BAAABBA...$) que

l'on a une première série de longueur 1, une deuxième de longueur 3, une troisième de longueur 2, ...

On note L_1 la variable aléatoire égale à la longueur de la première série, L_2 égale à celle de la deuxième série, L_3 de la troisième série.

1. a) Déterminer la loi de L_1.

   b) Montrer que L_1 admet une espérance et une variance. Calculer l'espérance $E(L_1)$.

2. a) Donner la loi du couple (L_1, L_2)

   b) En déduire la loi de L_2.

   c) Calculer l'espérance $E(L_2)$.

3. Déterminer la loi de L_3.

4. a) Justifier l'existence de la covariance $\mathrm{Cov}(L_1, L_2)$ de L_1 et L_2.

   b) Calculer cette covariance et préciser son signe.

Solution :

1. a) L_1 prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$, et pour tout k de $\mathbb{N}^*$:

$$P(L_1 = k) = P(A_1 A_2 \dots A_k B_{k+1} \cup B_1 B_2 \dots B_k A_{k+1})$$

La réunion précédente étant disjointe et les choix successifs indépendants, il vient donc :

$$P(L_1 = k) = p^k q + q^k p$$

On remarque que :

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(L_1 = k) = \sum_{k=1}^{\infty} (p^k q + q^k p) = q \times \frac{p}{1-p} + p \times \frac{q}{1-q} = p + q = 1$$

Ce qui prouve que L_1 est bien une variable aléatoire ...

   b) Les séries de termes généraux respectifs $kq^k, k^2q^k, kp^k, k^2p^k$ sont réputées convergentes (car p et q appartiennent à $]0,1[$), ce qui prouve que L_1 admet une espérance et une variance, et :

$$\begin{aligned} E(L_1) &= \sum_{k=1}^{\infty} kP(L_1 = k) = qp \sum_{k=1}^{\infty} kp^{k-1} + pq \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} \\ &= qp \times \frac{1}{(1-p)^2} + pq \times \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{p}{q} + \frac{q}{p} \end{aligned}$$

$$E(L_1) = \frac{p^2 + q^2}{pq}$$

2. a) Pour k et i dans $\mathbb{N}^*$, on a :

$$P((L_1, L_2) = (k, i)) = P(A_1 \dots A_k B_{k+1} \dots B_{k+i} A_{k+i+1} \cup B_1 \dots B_k A_{k+1} \dots A_{k+i} B_{k+i+1})$$

Soit, à nouveau par incompatibilité et indépendance :

$$P((L_1, L_2) = (k, i)) = p^k q^i p + q^k p^i q = p^{k+1} q^i + q^{k+1} p^i$$

b) Comme $(L_1 = k)_{k \geqslant 1}$ est un système (quasi)-complet, il vient, les convergences étant claires :

$$\forall\, i \in \mathbb{N}^*, P(L_2 = i) = \sum_{k=1}^{\infty} P((L_1 = k) \cap (L_2 = i))$$

$$= q^i p^2 \sum_{k=1}^{\infty} p^{k-1} + p^i q^2 \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = q^i p^2 \times \frac{1}{1-p} + p^i q^2 \times \frac{1}{1-q}$$

$$\forall\, i \in \mathbb{N}^*, P(L_2 = i) = q^{i-1} p^2 + p^{i-1} q^2$$

(On peut remarquer que l'on a $\sum_{i=1}^{\infty} P(L_2 = i) = 1$)

c) Les convergences étant encore banales, on a :

$$E(L_2) = \sum_{i=1}^{\infty} i P(L_2 = i) = p^2 \sum_{i=1}^{\infty} i q^{i-1} + q^2 \sum_{i=1}^{\infty} i p^{i-1}$$

$$= p^2 \times \frac{1}{(1-q)^2} + q^2 \times \frac{1}{(1-p)^2}$$

$$E(L_2) = 2$$

3. De la même façon, pour $r \in \mathbb{N}^*$:

$$P(L_3 = r) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} P((L_1 = k) \cap (L_2 = i) \cap (L_3 = r))$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} (p^k q^i p^r q + q^k p^i q^r p)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left(p^{k+r} q^2 \times \frac{1}{1-q} + q^{k+r} p^2 \times \frac{1}{1-p} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (p^{k+r-1} q^2 + q^{k+r-1} p^2) = p^r q^2 \times \frac{1}{1-p} + q^r p^2 \times \frac{1}{1-q}$$

$$\forall\, r \in \mathbb{N}^*, P(L_3 = r) = p^r q + q^r p$$

Donc L_3 a même loi que L_1.

4. a) Sous réserve de convergence, on a :

$$E(L_1 L_2) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} ki(p^{k+1} q^i + q^{k+1} p^i)$$

La convergence résulte des mêmes arguments qu'en 1. b).

b) Puis :

$$E(L_1L_2) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(kp^{k+1}q \times \frac{1}{(1-q)^2} + kq^{k+1}p \times \frac{1}{(1-p)^2} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (qkp^{k-1} + pkq^{k-1}) = q \times \frac{1}{(1-p)^2} + p \times \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{q} + \frac{1}{p}$$

$$E(L_1L_2) = \frac{1}{pq}$$

D'où : $\mathrm{Cov}(L_1, L_2) = E(L_1L_2) - E(L_1)E(L_2) = \dfrac{1}{pq} - \dfrac{2(p^2+q^2)}{pq}$

$$\mathrm{Cov}(L_1, L_2) = \frac{1 - 2p^2 - 2(1-p)^2}{pq} = \frac{1 + 4p - 4p^2}{pq}$$

Or l'application définie sur $[0,1]$ par $p \mapsto p(1-p)$ est maximale pour $p = \frac{1}{2}$, le maximum valant $\frac{1}{4}$, donc $\mathrm{Cov}(L_1, L_2) \leqslant 0$, avec égalité pour $p = \frac{1}{2}$.

Exercice 3.14.

1. Soit a et b deux réels strictement positifs.

Établir l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt$.

On note alors $J(a,b)$ cette intégrale.

2. On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$, par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{J(a,b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1} & \text{si } x \in]0,1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Vérifier que f est une densité de probabilité.

Si X est une variable aléatoire admettant f pour densité, on dit que X suit la loi $\beta(a,b)$.

3. On considère une variable X suivant la loi $\beta(p,q)$, où p et q sont deux entiers naturels non nuls.

a) Calculer $J(p,q)$.

b) Calculer l'espérance $E(X)$ de la variable aléatoire X.

4. Pour n de $\mathbb{N}^*$, on considère n variables $X_1, \ldots, X_n$ indépendantes, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, suivant toutes la loi uniforme sur $[0,1]$.

Pour tout $\omega \in \Omega$, on note $Y_k(\omega)$ le $k^{\text{ème}}$ des nombres $X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)$, quand ceux-ci sont rangés dans l'ordre croissant.
On a donc par exemple :

$$Y_1(\omega) = \min(X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)) \text{ et } Y_n(\omega) = \max(X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)).$$

On admet que pour tout entier k de $[\![1, n]\!]$, Y_k est une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé que les variables $X_1, \ldots, X_n$.
On note, pour $k \in [\![1, n]\!]$, F_k la fonction de répartition de Y_k.

a) Donner les expressions de F_1 et de F_n.

b) Déterminer, pour $k \in [\![1, n]\!]$, la fonction de répartition de Y_k

c) Déterminer une densité de Y_k ; reconnaître la loi de Y_k et donner son espérance.

(on remarquera que $j\binom{n}{j} = n\binom{n-1}{j-1}$ et que $(n-j)\binom{n}{j} = n\binom{n-1}{j}$).

Solution :

1. La fonction $t \mapsto t^{a-1}(1-t)^{b-1}$ est continue sur $]0, 1[$, équivalente à $t \mapsto t^{a-1}$ au voisinage de 0 et équivalente à $t \mapsto (1-t)^{b-1}$ au voisinage de 1. Deux applications de la règle de Riemann donnent la convergence demandée.

2. La fonction f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, positive et d'intégrale sur $\mathbb{R}$ valant 1, par définition de la fonction J. Il s'agit bien d'une fonction densité de probabilité.

3. a) Pour $p \geqslant 2$, une intégration par parties sans ruse donne :

$$\begin{aligned} J(p,q) &= \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt \\ &= \Big[-\frac{1}{q}(1-t)^q t^{p-1} \Big]_0^1 + \frac{p-1}{q}\int_0^1 t^{p-2}(1-t)^q\,dt \end{aligned}$$

Soit :

$$J(p,q) = \frac{p-1}{q} J(p-1, q+1)$$

Par récurrence, on obtient alors :

$$J(p,q) = \frac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!}$$

Le résultat final étant valable aussi pour $p = 1$.

b) $E(X) = \dfrac{1}{J(p,q)}\displaystyle\int_0^1 t^{p-1+1}(1-t)^{q-1}dt = \frac{J(p+1,q)}{J(p,q)}$

Soit, après simplification :

$$E(X) = \frac{p}{p+q}$$

4. a) On a :
$(Y_1 > x) = (X_1 > x) \cap \ldots (X_n > x)$ et $(Y_n \leqslant x) = (X_1 \leqslant x) \cap \ldots (X_n \leqslant x)$, d'où par indépendance et identité de la distribution :

$$F_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1-(1-x)^n & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \text{ et } F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^n & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

b) Soit x dans $[0,1]$, $(Y_k \leqslant x)$ est réalisé si et seulement si au moins k des variables aléatoires X_i prennent une valeur inférieure ou égale à x. Ceci se prouit pour chaque variable X_i avec la probabilité x et puisque nous sommes dans le cas de l'indépendance, il vient :

$$P(Y_k \leqslant x) = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} x^j (1-x)^{n-j}$$

b) Par dérivation légitime, une densité f_k de Y_k est :

$$f_k(x) = \begin{cases} \sum_{j=k}^{n} j\binom{n}{j} x^{j-1}(1-x)^{n-j} - \sum_{j=k}^{n}(n-j)\binom{n}{j}x^j(1-x)^{n-j-1} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour $0 < x < 1$, il vient :

$$f_k(x) = \sum_{j=k}^{n} n\binom{n-1}{j-1} x^{j-1}(1-x)^{n-j} - \sum_{j=k}^{n-1} n\binom{n-1}{j} x^j (1-x)^{n-j-1}$$

Le télescopage est en place et il reste :

$$\forall\, x \in]0,1[, f_k(x) = n\binom{n-1}{k-1} x^{k-1} ?‘ (1-x)^{n-k}$$

Ainsi $Y_k \hookrightarrow \beta(k, n-k+1)$ et $E(Y_k) = \dfrac{k}{n+1}$.

Exercice 3.15.

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose que X admet une densité f continue et on note F la fonction de répartition de X.
On suppose que X admet une espérance que l'on note $E(X) = \mu$.

1. Dans cette question, on suppose que X est à valeurs positives. Justifier que :

$$\lim_{x \to +\infty} \left[x \int_x^{+\infty} f(t)dt \right] = 0$$

Montrer que l'on a :

$$E(X) = \int_0^{+\infty} P(X > x)dx$$

2. Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose :

$$X^+(\omega) = \max\big(X(\omega), 0\big) \quad \text{et} \quad X^-(\omega) = -\min\big(X(\omega), 0\big)$$

Justifier que X^+ et X^- sont des variables aléatoires positives.

3. En exprimant X à l'aide de X^+ et X^-, montrer que :

$$\int_{-\infty}^{\mu} F(x)\,dx = \int_{\mu}^{+\infty} [1 - F(x)]dx$$

4. Montrer que μ est l'unique réel a tel que :

$$\int_{-\infty}^{a} F(x)dx = \int_{a}^{+\infty} [1 - F(x)]dx$$

Solution :

1. Pour $x \geqslant 0$, on a : $0 \leqslant x\displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)\,dt \leqslant \int_x^{+\infty} tf(t)\,dt \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (reste d'une intégrale convergente car définissant $E(X)$).

Intégrons par parties, en intégrant $x \mapsto f(x)$ en $x \mapsto F(x)-1 = \displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)\,dt$:

$$\begin{aligned}\int_0^x tf(t)\,dt &= \big[t(F(t)-1)\big]_0^x + \int_0^x (1 - F(t))\,dt \\ &= x\int_x^{+\infty} f(t)\,dt + \int_0^x P(X > t)\,dt\end{aligned}$$

Le passage à la limite lorsque x tend vers $+\infty$ est licite et donne :

$$E(X) = \int_0^{+\infty} P(X > x)dx$$

2. $X^+ = \frac{1}{2}(X + |X|)$ et $X^- = \frac{1}{2}(|X| - X)$, ce qui prouve que X^+ et X^- sont des variables aléatoires et leur positivité est banale.

3. On a $X = X^+ - X^-$, donc d'après le résultat de la première question :

$$\begin{aligned}\mu = E(X^+) - E(X^-) &= \int_0^{+\infty} P(X^+ > x)\,dx - \int_0^{+\infty} P(X^- > x)\,dx \\ &= \int_0^{+\infty} P(X > x)\,dx - \int_0^{+\infty} P(-X > x)\,dx\end{aligned}$$

$$\mu = \int_0^{+\infty} (1 - F(x))\,dx - \int_0^{+\infty} F(-x)\,dx$$
$$= \int_0^{+\infty} (1 - F(x))\,dx - \int_{-\infty}^{0} F(x)\,dx$$

Ainsi :

$$\mu = \int_0^{+\infty} (1 - F) - \int_{-\infty}^{0} F = \int_0^{\mu} F + \int_0^{\mu} (1 - F)$$

et par la relation de Chasles, il reste :

$$\int_{-\infty}^{\mu} F(x)dx = \int_{\mu}^{+\infty} [1 - F(x)]dx$$

4. $a \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{a} F(x)\,dx$ est croissante et $a \mapsto \displaystyle\int_a^{+\infty} (1-F(x))\,dx$ est décroissante. Si ces fonctions se croisent en deux points λ et μ, alors elles sont constantes sur le segment $[\lambda, \mu]$ et F vaut à la fois 0 et 1 sur ce segment, ce qui ne semble pas raisonnable.

Exercice 3.16.

1. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, telles que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'espérance $E(X_n)$ et la variance $V(X_n)$ existent. On suppose, en outre, qu'il existe un réel m tel que :

$$\lim_{n\to+\infty} E(X_n) = m \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} V(X_n) = 0$$

a) Montrer que : $E((X_n - m)^2) = V(X_n) + (E(X_n) - m)^2$.

b) Montrer que, pour tout réel ε strictement positif, on a :

$$P(|X_n - m| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}(V(X_n) + (E(X_n) - m)^2)$$

c) Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à m.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$. On lance n fois une pièce non équilibrée avec laquelle la probabilité d'obtenir « pile » lors d'un jet est p.

Soit S_n la variable aléatoire réelle égale au nombre de « pile » obtenus. Enfin, Y_n est la variable aléatoire définie par : $Y_n = \mathrm{e}^{\frac{S_n}{n}}$.

a) Calculer l'espérance et la variance de Y_n.

b) Montrer que la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à e^p.

Solution :

1. a) $E((X_n - m)^2) = E(X_n^2 - 2mX_n + m^2) = E(X_n^2) - 2mE(X_n) + m^2$
$= (E(X_n) - m)^2 + E(X_n^2) - E(X_n)^2$
$= (E(X_n) - m)^2 + V(X_n)$

b) D'après l'inégalité de Markov :
$$P([X_n - m| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2} E((X_n - m)^2)$$
et donc :
$$0 \leqslant P(|X_n - m| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}(V(X_n) + (E(X_n) - m)^2)$$

c) L'encadrement précédent donne par ... encadrement :
$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - m| \geqslant \varepsilon) = 0$$
Ce qui prouve que la suite (X_n) converge en probabilité vers la variable cetaine égale à m.

2. a) Par la formule du transfert :
$$E(\mathrm{e}^{\frac{S_n}{m}}) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{k/n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = (p\mathrm{e}^{1/n} + q)^n$$
D'autre part
$$E((\mathrm{e}^{\frac{S_n}{m}})^2) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{2k/n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = (p\mathrm{e}^{2/n} + q)^n$$
Donc :
$$V(Y_n) = (p\mathrm{e}^{2/n} + q)^n - (p\mathrm{e}^{1/n} + q)^{2n}$$

b) Pour r non nul, posons $u_n = (p\mathrm{e}^{r/n} + q)^n$. On a, au voisinage de l'infini :
$\ln(u_n) = n\ln(p\mathrm{e}^{r/n} + q) = n\ln(1 + p(\mathrm{e}^{r/n} - 1)) \sim n \times p(\mathrm{e}^{r/n} - 1) \sim np \times \frac{r}{n}$
Ce qui signifie que $\ln(u_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} pr$ et $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{pr}$.

Ainsi les résultat de la question 2. a) donnent pour $r = 1$ et $r = 2$:
$$\lim_{n\to\infty} E(\mathrm{e}^{\frac{S_n}{m}}) = \mathrm{e}^p \; ; \; \lim_{n\to\infty} V(\mathrm{e}^{\frac{S_n}{m}}) = \mathrm{e}^{2p} - (\mathrm{e}^p)^2 = 0$$
La suite (Y_n) converge en probabilité vers la variable certaine égale à e^p.

Exercice 3.17.

Dans cet exercice, toutes les variables aléatoires considérées sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et à valeurs réelles.

On admet que si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes admettant une espérance, alors $E(XY) = E(X)E(Y)$

1. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes, à valeurs positives telles que :

• Y suit la loi exponentielle de paramètre λ strictement positif ;
• X est une variable à densité, de densité continue φ.

a) Justifier la convergence de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t}\varphi(t)dt$. On note I cette intégrale.

b) Soit g une densité de la variable aléatoire $Y - X$. Donner, pour tout réel z positif une expression de $g(z)$ en fonction notamment de l'intégrale I.

c) En déduire, en fonction de I, la valeur de $P([Y > X])$.

2. Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$, n variables aléatoires indépendantes ($n \geqslant 2$), suivant toutes la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

a) Comparer les événements

$$[X_1 = \inf(X_1, X_2, \ldots, X_n] \text{ et } [X_1 \leq \inf(X_2, \ldots X_n)].$$

b) Déterminer la loi de la variable aléatoire Z_n définie par : $Z_n = \inf(X_2, \ldots X_n)$.

c) En déduire la valeur de : $P([X_1 = \inf(X_1, X_2, \ldots, X_n)])$.

3. Soit X_1, X_2, Y trois variables aléatoires à densité indépendantes, à valeurs positives, où Y suit la loi exponentielle de paramètre λ.

a) Calculer $P([Y > X_1 + X_2])$ en fonction de $P([Y > X_1])$ et de $P([Y > X_2])$.

b) Quelle propriété est ainsi généralisée ?

Solution :

1. a) On a $\forall\, t \geqslant 0, 0 \leqslant \mathrm{e}^{-\lambda t}\varphi(t) \leqslant \varphi(t)$, et la règle de comparaison pour les fonctions positives permet de conclure.

b) Une densité de $-X$ est h définie par $h(x) = 0$ si $x \geqslant 0$ et $h(x) = \varphi(-x)$ si $x < 0$.

Comme Y et $-X$ sont indépendantes, par convolution une densité de $Z = Y - X$ est g définie par :

$$\forall\, z \in \mathbb{R}, g(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(z-t)h(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} f_Y(z-t)\varphi(-t)\,dt$$

$\rightarrow$ Si $z \leqslant 0$, $g(z) = \displaystyle\int_{-\infty}^{z} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda(z-t)}\varphi(-t)\,dt$

$\rightarrow$ Si $z > 0$, $g(z) = \displaystyle\int_{-\infty}^{0} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda(z-t)} \varphi(-t)\, dt = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda z} \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{\lambda t} \varphi(-t)\, dt$

soit :

$$\forall\, z > 0, g(z) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda z} \int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t} \varphi(t)\, dt = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda z} I$$

c) $P(Y > X) = P(Z > 0) = \displaystyle\int_{0}^{+\infty} g(z)\, dz = I \int_{0}^{+\infty} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda z}\, dz = I$

Notons que I est en fait l'espérance de la variable aléatoire $\mathrm{e}^{-\lambda X}$

2. a) Ces deux événements sont clairement égaux.

b) Z_n prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et :

$P(Z_n \leqslant z) = 1 - P(Z_n > x) = 1 - P((X_2 > z) \cap \ldots \cap (X_n > z))$, d'où :

pour tout $z \geqslant 0$: $P(Z_n \leqslant z) = 1 - (\mathrm{e}^{-\lambda z})^{n-1} = \mathrm{e}^{-(n-1)\lambda z}$, et :

$$Z_n \hookrightarrow \mathcal{E}((n-1)\lambda)$$

c) X_1 suit la loi exponentielle de paramètre λ. D'après les résultats de la question 1. la probabilité recherchée est égale à $1 - E(\mathrm{e}^{-\lambda Z_n})$, donc :

$$P(X_1 = \inf(X_1, X_2, \ldots, X_n)) = 1 - E(\mathrm{e}^{-\lambda Z_n}) 1 - \int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t} (n-1) \lambda \mathrm{e}^{-\lambda(n-1)t}\, dt$$

$$= 1 - \frac{n-1}{n}$$

$$P(X_1 = \inf(X_1, X_2, \ldots, X_n)) = \frac{1}{n}$$

3. a) $P(Y > X_1 + X_2) = E(\mathrm{e}^{-\lambda(X_1+X_2)}) = E(\mathrm{e}^{-\lambda X_1}) E(\mathrm{e}^{-\lambda X_2})$ (par indépendance)

b) Ainsi $P(Y > X_1 + X_2) = P(Y > X_1) P(Y > X_2)$, ce qui généralise le résultat d'absence de mémoire de la loi exponentielle.

Exercice 3.18.

1. a) Montrer que la fonction $f : x \mapsto \sin x$ réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1, 1]$. On note Arc sin la bijection réciproque.

b) Établir, pour tout $y \in\,]-1, 1[$: $\mathrm{Arc}\sin' y = \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$.

c) Soit a, b, x trois réels tels que $0 \leqslant a < b \leqslant x$. On note :

$$I(a, b) = \int_{a}^{b} \frac{1}{2\sqrt{t}} \times \frac{1}{2\sqrt{x-t}} dt$$

Justifier l'existence de cette intégrale et calculer sa valeur grâce au changement de variable : $u = \dfrac{2t}{x} - 1$.

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme $\mathcal{U}([0,1])$.

2. Montrer que X^2 est une variable aléatoire à densité et en déterminer une densité.

3. Montrer que les variables aléatoires X^2 et Y^2 sont indépendantes.

4. Déterminer une densité f de la variable aléatoire $X^2 + Y^2$.

5. En déduire la valeur de : $I = \displaystyle\int_1^2 \operatorname{Arc\,sin}\big(\frac{2}{x} - 1\big)dx$.

6. Déterminer une densité f_R de la variable aléatoire : $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$.

Solution :

1. a) Evident.

b) La fonction f est dérivable, de dérivée $f'(x) = \cos x$ non nulle sur $]-\pi/2, \pi/2[$, donc la fonction Arc sin est dérivable sur $]-1,1[$, avec :

$$\forall\, y \in]-1,1[, \operatorname{Arc\,sin}'(y) = \frac{1}{\sin'(\operatorname{Arc\,sin} y)} = \frac{1}{\cos(\operatorname{Arc\,sin} y)}$$

Comme $y \in]-1,1[\implies \operatorname{Arc\,sin}(y) \in]-\pi/2, \pi/2[$, il n'y a pas de problème d'extraction de racines et $\sin(\operatorname{Arc\,sin} y) = y$ donne $\cos(\operatorname{Arc\,sin} y) = \sqrt{1-y^2}$, soit :

$$\forall\, y \in]-1,1[, \operatorname{Arc\,sin}'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

c) Si $0 < a$ et $b < x$, la fonction à intégrer est continue sur le segment $[a,b]$, donc l'intégrale existe, et si $a = 0$ et/ou $b = x$, la règle de Riemann donne la convergence de l'intégrale du ou des côtés de la borne concernée.

Le changement de variable proposé est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone, donc légitime (si vous avez un doute, faites le d'abord sur un segment $[\alpha, \beta]$, puis passez à la limite au cas où a et/ou b posent problème).

$u = \dfrac{2t}{x} - 1$ donne $t = \dfrac{x}{2}(u+1)$, d'où $dt = \dfrac{x}{2}\,du$ et :

$$I(a,b) = \int_{\frac{2a}{x}-1}^{\frac{2b}{x}-1} \frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{2}(u+1)}} \times \frac{1}{2\sqrt{x - \frac{x}{2}(u+1)}} \times \frac{x}{2}\,du$$

$$= \int_{\frac{2a}{x}-1}^{\frac{2b}{x}-1} \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2}(u+1)}} \times \frac{1}{2\sqrt{1-\frac{1}{2}(u+1)}} \times \frac{1}{2}\, du$$

$$= \int_{\frac{2a}{x}-1}^{\frac{2b}{x}-1} \frac{du}{4\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{4}\Big[\operatorname{Arc}\sin u\Big]_{\frac{2a}{x}-1}^{\frac{2b}{x}-1}$$

$$\int_a^b \frac{1}{2\sqrt{t}} \times \frac{1}{2\sqrt{x-t}} dt = \frac{1}{4}\operatorname{Arc}\sin\left(\frac{2b}{x}-1\right) - \frac{1}{4}\operatorname{Arc}\sin\left(\frac{2a}{x}-1\right)$$

2. La variable aléatoire X^2 prend ses valeurs entre 0 et 1, et pour $x \in [0,1]$:

$$F_{X^2}(x) = P(X^2 \leqslant x) = P(-\sqrt{x} \leqslant X \leqslant \sqrt{x}) = P(X \leqslant \sqrt{x}) = \sqrt{x}$$

La fonction F_{X^2} est donc dérivable sur $\mathbb{R}$, sauf (peut-être) en 0 et en 1, donc X^2 est une variable aléatoire à densité, et on peut prendre pour densité la fonction f_{X^2} définie par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, f_{X^2}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x}} & \text{si } 0 < x \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

3. Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, donc il en est de même des variables aléatoires X^2 et Y^2.

4. Par indépendance, on peut prendre pour densité de $X^2 + Y^2$, la foction f définie par convolution par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X^2}(t) f_{Y^2}(x-t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X^2}(t) f_{X^2}(x-t)\, dt$$

$\star$ Evidemment, si $x < 0$ ou $x > 2$, on a $f(x) = 0$ (la variable $X^2 + Y^2$ prend ses valeurs entre 0 et 2)

$\star$ Si $0 \leqslant x \leqslant 1$, alors :
$[0 \leqslant t \leqslant 1 \text{ et } 0 \leqslant x - t \leqslant 1] \iff [0 \leqslant t \leqslant 1 \text{ et } x - 1 \leqslant t \leqslant x] \iff [0 \leqslant t \leqslant x]$
Il reste donc :

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{2\sqrt{t}} \times \frac{1}{2\sqrt{x-t}}\, dt = I(0,x) = \frac{1}{4}\operatorname{Arc}\sin(1) - \frac{1}{4}\operatorname{Arc}\sin(-1)$$

$$f(x) = \frac{\pi}{4}$$

$\star$ Si $1 < x \leqslant 2$, alors :
$[0 \leqslant t \leqslant 1 \text{ et } 0 \leqslant x-t \leqslant 1] \iff [0 \leqslant t \leqslant 1 \text{ et } x-1 \leqslant t \leqslant x] \iff [x-1 \leqslant t \leqslant 1]$
Il reste donc :

$$f(x) = \int_{x-1}^1 \frac{1}{2\sqrt{t}} \times \frac{1}{2\sqrt{x-t}}\, dt = I(x-1,1)$$

$$= \frac{1}{4}\operatorname{Arc}\sin(\frac{2}{x}-1) - \frac{1}{4}\operatorname{Arc}\sin(\frac{2(x-1)}{x}-1)$$
$$= \frac{1}{4}\operatorname{Arc}\sin(\frac{2}{x}-1) - \frac{1}{4}\operatorname{Arc}\sin(1-\frac{2}{x})$$
$$f(x) = \frac{1}{2}\operatorname{Arc}\sin\left(\frac{2}{x}-1\right)$$

Ainsi, on peut prendre :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{4} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ \frac{1}{2}\operatorname{Arc}\sin\left(\frac{2}{x}-1\right) & \text{si } 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

5. On a $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx = 1$

Par conséquent $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 \frac{1}{2}\operatorname{Arc}\sin\left(\frac{2}{x}-1\right)dx = 1 - \frac{\pi}{4}$,et :

$$\int_1^2 \operatorname{Arc}\sin\left(\frac{2}{x}-1\right)dx = 2 - \frac{\pi}{2}$$

6. Pour tout x de $\mathbb{R}^+$: $F_R(x) = P(R \leqslant x) = P(X^2+Y^2 \leqslant x^2) = F_{X^2+Y^2}(x^2)$

Donc R est une variable aléatoire à densité, et on peut prendre pour densité de R, la fonction f_R définie par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, f_R(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 2xf(x^2) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Soit :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, f_R(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \text{ ou } x \geqslant \sqrt{2} \\ \frac{\pi x}{2} & \text{si } 0 < x < 1 \\ x\operatorname{Arc}\sin\left(\frac{2}{x^2}-1\right) & \text{si } 1 \leqslant x < \sqrt{2} \end{cases}$$

Exercice 3.19.

Soit n un entier strictement supérieur à 1.

1. Déterminer le nombre de couples $(i,j) \in [\![1, n+1]\!]^2$ tels que $|i+j-n-2| = 1$.

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, prenant leurs valeurs dans $[\![1, n+1]\!]$.

On pose, pour tout $(i,j) \in [\![1, n+1]\!]^2$:

$$a_{i,j} = P(X = j \cap Y = i), b_{i,j} = P_{[X=j]}([Y = i])$$

On note B la matrice de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ définie par $B = (b_{i,j})_{1\leq i,j\leq n+1}$, et on suppose que :

$$a_{i,j} = \begin{cases} \alpha & \text{si } |i+j-n-2| = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. Calculer la valeur de α.

3. Déterminer les lois de X et de Y. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

4. a) Expliciter la matrice B.

b) Montrer que 1 est une valeur propre de B.

5. On suppose dans cette question que $n = 3$. La matrice B est-elle diagonalisable ?

Solution :

1. Il s'agit de compter les couples d'éléments de $[\![1, n+1]\!]$ tels que $i+j = n+3$ ou $i+j = n+1$.
Dans la première catégorie, on trouve les couples $(2, n+1), (3, n), \ldots, (n+1, 2)$ et dans la deuxième on trouve les couples $(1, n), (2, n-1), \ldots, (n, 1)$.

Il y a $2n$ couples convenant

2. Comme $\sum_{i,j} a_{i,j} = 1$ et comme il y a $2n$ termes valant α :

$$\alpha = \frac{1}{2n}$$

3. La matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ est clairement symétrique et on remarque que les termes non nuls de A sont ceux qui bordent immédiatement la « deuxième diagonale » de A. Ainsi la première et la dernière ligne et la première et la dernière colonne de A comportent un seul terme non nul, tandis que toutes les autres rangées en comportent deux. Soit, par sommations marginales :

$$P(X=1) = P(X=n+1) = \frac{1}{2n}; \forall\, i \in [\![2, n]\!], P(X=i) = \frac{1}{n}$$

Y a même loi que X

La présence de zéros dans le tableau de la loi conjoite montre que X et Y ne sont pas indépendantes. Car par exemple :

$$P((X=1) \cap (Y=1)) = 0, \text{ alors que } P(X=1)P(Y=1) \neq 0$$

4. a) On a $b_{i,j} = \dfrac{a_{i,j}}{P(X=j)}$, donc :

$$b_{n,1} = 1,\ b_{n-1,2} = b_{n-2,3} = \cdots = b_{1,n} = \frac{1}{2}$$

$b_{2,n+1} = 1$, $b_{3,n} = b_{4,n-1} = \cdots = b_{n+1,2} = \frac{1}{2}$
tous les autres coefficients étant nuls.

b) Pour prouver que 1 est valeur propre, on peut résoudre l'équation matricielle $BC = C$, où C est une matrice a priori de $\mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{C})$ et constater qu'il existe des solutions non triviales.

On peut aussi remarquer que pour tout i :
$$\sum_{j=1}^{n+1} b_{i,j} P(X=j) = \sum_{j=1}^{n+1} P_{(X=j)}(Y=i) P(X=j) = P(Y=i) = P(X=i)$$
Ce qui traduit exactement le fait que 1 est valeur propre de B, le vecteur colonne de la loi de X étant un vecteur propre associé.

5. On a ici : $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

→ On sait déjà que 1 est valeur propre et on trouve :
$$E_{(1)}(B) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

→ On peut continuer classiquement, ou remarquer que $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont des colonnes non proportionnelles et propres pour la valeur propre $-1/2$. On a fait alors le plein et on peut conclure : B est diagonalisable.

Exercice 3.20.

Dans tout l'exercice, k désigne un entier naturel non nul donné. On considère une suite de variables aléatoires $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$, toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et telles que :
• la loi de T_0 est donnée, avec $T_0(\Omega) = [\![0, 2k]\!]$.
• Pour tout entier naturel n non nul et tout élément j de $[\![0, 2k]\!]$, la loi conditionnelle de T_n sachant $[T_{n-1} = j]$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(2k, \frac{j}{2k})$.

Par convention, si une variable Z suit la loi $\mathcal{B}(n, 0)$, alors Z est la variable certaine égale à 0 et si Z suit la loi $\mathcal{B}(n, 1)$, alors Z est la variable certaine égale à 1.

On note, pour tout entier naturel n, V_n la matrice de $\mathcal{M}_{2k+1,1}(\mathbb{R})$, définie par :

$$V_n = \begin{pmatrix} P([T_n = 0]) \\ P([T_n = 1]) \\ \vdots \\ P([T_n = 2k]) \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une matrice $M = (m_{i,j})_{0 \leq i,j \leq 2k}$, élément de $\mathcal{M}_{2k+1}(\mathbb{R})$, dont les coefficients sont indépendants de n, telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ V_n = MV_{n-1}$.

On trouvera : $m_{i,j} = \binom{2k}{i} \left(\frac{j}{2k}\right)^i \left(1 - \frac{j}{2k}\right)^{2k-i}$

2. On considère les deux matrices L et J de $\mathcal{M}_{1,2k+1}(\mathbb{R})$ définies par :

$$L = (\,1 \quad 1 \quad \ldots \quad 1\,) \text{ et } J = (\,0 \quad 1 \quad 2 \quad \ldots \quad 2k\,).$$

a) Montrer que $LM = L$.

b) Montrer que $JM = J$.

3. a) Montrer que, pour tout entier naturel n, non nul, on a : $JV_n = JV_{n-1}$.

b) En déduire que toutes les variables aléatoires T_n ont la même espérance ; on pose alors $E(T_n) = \mu$.

4. On note Q la matrice de $\mathcal{M}_{1,2k+1}(\mathbb{R})$ définie par $Q = (\,0 \quad 1^2 \quad 2^2 \quad \ldots \quad (2k)^2\,)$.

a) En utilisant la matrice Q, déterminer, pour tout entier naturel n non nul, une relation entre $E(T_n^2)$ et $E(T_{n-1}^2)$.

b) En déduire une expression de $E(T_n^2)$ en fonction de $E(T_0^2)$, de μ et de k.

c) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} E(T_n^2)$.

5. Montrer que si Z est une variable aléatoire prenant ses valeurs dans $[\![0, 2k]\!]$, alors $E(Z^2) \leqslant 2kE(Z)$, l'égalité n'ayant lieu que si Z prend uniquement les valeurs 0 et $2k$ avec une probabilité non nulle.

6. En s'inspirant de la question précédente, et en admettant que la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi, précisez la loi limite.

Solution :

1. Pour $n \geqslant 1$ et $i \in [\![0, 2k]\!]$, la formule des probabilités totales donne :

$$P(T_n = i) = \sum_{j=0}^{2k} P_{(T_{n-1}=j)}(T_n = i) P(T_{n-1} = j)$$

$$= \sum_{j=0}^{2k} \binom{2k}{i} \big(\tfrac{j}{2k}\big)^i \big(1-\tfrac{j}{2k}\big)^{2k-i} P(T_{n-1}=j)$$

On peut donc prendre pour matrice M la matrice de $\mathcal{M}_{2k+1}(\mathbb{R})$ de terme générique $m_{i,j}$ (i et j varient entre 0 et $2k$) :

$$m_{i,j} = \binom{2k}{i} \big(\tfrac{j}{2k}\big)^i \big(1-\tfrac{j}{2k}\big)^{2k-i}$$

2. a) Posons $LM = (\, a_0 \quad a_1 \quad \dots \quad a_{2k} \,)$, on a pour tout j de $[\![0, 2k]\!]$:

$$a_j = \sum_{i=0}^{2k} m_{i,j} = \sum_{i=0}^{2k} \binom{2k}{i} \big(\tfrac{j}{2k}\big)^i \big(1-\tfrac{j}{2k}\big)^{2k-i} = 1 \text{ (formule du binôme)}$$

Soit :

$$LM = L$$

b) Posons $JM = (\, b_0 \quad b_1 \quad \dots \quad b_{2k} \,)$, on a de même :

$$b_j = \sum_{i=0}^{2k} i \times \binom{2k}{i} \big(\tfrac{j}{2k}\big)^i \big(1-\tfrac{j}{2k}\big)^{2k-i} = 2k \times \frac{j}{2k}$$

(car on a reconnu la formule donnant l'espérance d'une variable suivant la loi binomiale de paramètres $2k$ et $\frac{j}{2k}$). Ainsi :

$$JM = J$$

3. a) $JV_n = J(MV_{n-1}) = (JM)V_{n-1} = JV_{n-1}$

b) Or JV_n est une matrice arrée d'ordre 1, identifiée à son unique terme valant :

$$\sum_{i=0}^{2k} iP(T_n = i) = E(T_n)$$

On vient donc de montrer que pour $n \geqslant 1$, $E(T_n) = E(T_{n-1})$ et la suite $(E(T_n))$ est constante.

4. a) Posons $QM = (\, c_0 \quad c_1 \quad \dots \quad c_{2k} \,)$, on a pour tout j de $[\![0, 2k]\!]$:

$$c_j = \sum_{i=0}^{2k} i^2 \times \binom{2k}{i} \big(\tfrac{j}{2k}\big)^i \big(1-\tfrac{j}{2k}\big)^{2k-i} = E(Y^2)$$

où Y est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres $2k$ et $\frac{j}{2k}$, donc :

$$c_j = V(Y) + E(Y)^2 = 2k \times \frac{j}{2k}\big(1-\tfrac{j}{2k}\big) + j^2 = j\big(1-\tfrac{j}{2k}\big) + j^2$$
$$= j + \big(1-\tfrac{1}{2k}\big)j^2$$

Soit :

$$QM = J + \big(1-\tfrac{1}{2k}\big)Q$$

On remarque que $E(T_n^2) = QT_n$, donc $E(T_n^2) = QMT_{n-1}$, et en remplaçant :

$$E(T_n^2) = JT_{n-1} + \big(1 - \frac{1}{2k}\big)QT_{n-1}$$

Soit :

$$E(T_n^2) = E(T_{n-1}) + \big(1 - \frac{1}{2k}\big)E(T_{n-1}^2) = \mu + \big(1 - \frac{1}{2k}\big)E(T_{n-1}^2)$$

b) La relation de récurrence précédente est du type arithmético-géométrique, la résolution est classique (recherche du point fixe et retour au cas géométrique ...) et donne :

$$E(T_n^2) = \big(1 - \frac{1}{2k}\big)^n (E(T_0^2) - 2k\mu) + 2k\mu$$

c) Donc : $\lim\limits_{n\to\infty} E(T_n^2) = 2k\mu$.

5. On a $E(Z^2) = \sum\limits_{j=0}^{2k} j^2 P(Z=j) \leqslant 2k \sum\limits_{j=0}^{2k} jP(Z=j)$ (car $j^2 \leqslant 2kj$)

Ainsi $E(Z^2) \leqslant 2kE(Z)$, avec égalité si et seulement si :

$$\sum_{j=0}^{2k} (2kj - j^2)P(Z=j) = \sum_{j=1}^{2k-1} j(2k-j)P(Z=j) = 0$$

On a donc égalité si et seulement si les seules valeurs prises par Z (avec une probabilité non nulle) sont les valeurs 0 et $2k$.

6. Soit i dans $[\![1, 2k-1]\!]$, on écrit :

$$0 \leqslant i(2k-i)P(T_n=i) \leqslant \sum_{j=0}^{2k} j(2k-j)P(T_n=j)$$

Donc :

$$0 \leqslant i(2k-i)P(T_n=i) \leqslant 2k\mu - E(T_n^2) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Si (T_n) converge en loi, alors la limite T ne peut prendre que les valeurs 0 et $2k$ avec une probabilité non nulle. Le calcul de l'espérance impose d'avoir $P(T=2k) = \frac{\mu}{2k}$ et ainsi $P(T=0) = 1 - \frac{\mu}{2k}$.

Exercice 3.21.

Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, on considère $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$, n variables aléatoires indépendantes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant toutes la loi de Poisson de paramètre $\frac{\lambda}{n}$, avec $\lambda > 0$.

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} Y_i$.

2. Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par : $f(x) = 1 - (1-x)\mathrm{e}^x$. Montrer que pour tout x de $[0,1]$, on a : $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$.

3. Pour tout entier $n > \lambda$ et pour tout i de $[\![1, n]\!]$, on note U_i une variable aléatoire indépendante de Y_i et suivant la loi de Bernoulli de paramètre $f\big(\frac{\lambda}{n}\big)$.
Pour tout i de $[\![1, n]\!]$, soit X_i la variable aléatoire définie par :

$$X_i = \begin{cases} 0 & \text{si } Y_i = U_i = 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Déterminer la loi de X_i.

4. Montrer que pour tout i de $[\![1, n]\!]$, on a : $P(X_i \neq Y_i) \leqslant \dfrac{\lambda^2}{n^2}$.

5. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} P\big(\bigcap\limits_{i=1}^{n} [X_i = Y_i]\big)$.

Solution :

1. Par le théorème de stabilité, S_n suit la loi de Poisson de paramètre λ.

2. On peut bien sûr étudier les variations de la fonction f, mais on peut aussi savoir que pour tout u réel, on a : $\mathrm{e}^u \geqslant 1 + u$, d'où :
$\forall\, x \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^{-x} \geqslant 1 - x$ et $1 \geqslant (1 - x)\mathrm{e}^x$ ou encore $1 - (1 - x)\mathrm{e}^x \geqslant 0$ et enfin si $x \leqslant 1$, clairement $1 - (1 - x)\mathrm{e}^x \leqslant 1$. Bref :

$$(0 \leqslant) x \leqslant 1 \implies 0 \leqslant f(x) \leqslant 1$$

3. La variable aléatoire X_i est une variable de Bernoulli, et par indépendance :

$$P(X_i = 0) = P(Y_i = 0)P(U_i = 0) = \mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{n}} \times (1 - f(\tfrac{\lambda}{n})) = 1 - \frac{\lambda}{n}$$

Donc

$$P(X_i = 1) = \frac{\lambda}{n} \text{ et } X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(\tfrac{\lambda}{n})$$

4. Comme X_i ne peut prendre que les valeurs 0 et 1, on a :

$$P(X_i = Y_i) = P((X_i = 1) \cap (Y_i = 1)) + P((X_i = 0) \cap (Y_i = 0))$$

et comme $(X_i = 0) \subset (Y_i = 0)$ et $(Y_i = 1) \subset (X_i = 1)$:

$$P(X_i = Y - i) = P(Y_i = 1) + P(X_i = 0) = 1 - \frac{\lambda}{n} + \frac{\lambda}{n}\mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{n}}$$

Donc : $P(X_i \neq Y_i) = \dfrac{\lambda}{n}(1 - \mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{n}})$
et ainsi, par inégalité usuelle :

$$P(X_i \neq Y_i) \leqslant \frac{\lambda^2}{n^2}$$

5. Par les lois de Morgan : $P\big(\bigcap\limits_{i=1}^{n} [X_i = Y_i]\big) = 1 - P\big(\bigcup\limits_{i=1}^{n} [X_i \neq Y_i]\big)$
Or la probabilité d'une réunion est toujours majorée par la somme des probabilités des événements en question (démonstration par exemple par récurrence), donc :

$$P\Big(\bigcup_{i=1}^{n}[X_i \neq Y_i]\Big) \leqslant \sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda^2}{n^2} = \frac{\lambda^2}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} P\Big(\bigcap_{i=1}^{n}[X_i = Y_i]\Big) = 1$$

5

QUESTIONS COURTES

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, A un élément non nul de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et T définie sur $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$T(M) = M - \mathrm{tr}(M)A$$

où $\mathrm{tr}(M)$ est la somme des éléments diagonaux de M.

a) Montrer que T est un endomorphisme de E.

b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\mathrm{tr}(A)$ pour que T soit bijective.

c) Caractériser T lorsque T n'est pas bijective.

2. Déterminer les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifient : $A^tAA^tAA = I$.

3. Soit $n \geqslant 2$, E un espace euclidien de dimension n. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$, n vecteurs unitaires de E tels que pour tout $i \neq j, \|e_i - e_j\| = 1$.
Montrer que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E.

4. Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs strictement positives, indépendantes, de même loi et admettant une espérance.
Montrer que $E\big(\frac{X}{X+Y}\big) = \frac{E(X)}{E(X+Y)}$.

5. Soit un réel $a > 0$. Pour tout entier $n > a$, on considère une variable aléatoire X_n suivant la loi géométrique de paramètre a/n.
Étudier la convergence en loi de la suite de variables aléatoires définies par

$$Y_n = \frac{X_n}{n}.$$

6. Une urne contient $4n+2$ boules numérotées de 1 à $4n+2$. On tire $2n+1$ boules sans remise, quelle est la probabilité que la somme des numéros des boules tirées soit strictement supérieure à la somme des numéros des boules restantes ?

7. On retourne une à une les cartes d'un jeu ordinaire (32 cartes) bien battu. Quel est le nombre moyen de cartes qu'il faut retourner pour voir le premier as ?

8. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par

$$u_n = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k \mathrm{e}^{\frac{k}{2n}}$$

9. Soit f une fonction positive et continue sur $\mathbb{R}_+$, telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt = 1$ Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(a) = \mathrm{e}^{-a}$.

10. Soit E un espace vectoriel de dimension 3, et f un endomorphisme de E. Déterminer la dimension de $\mathrm{Ker}\, f$ lorsque $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$.

11. Soit P un polynôme réel de degré n, admettant n racines relles distinctes.

a) Combien P' admet-il de racines relles ?

b) Comparer la moyenne arithmétique des racines de P à la moyenne arithmétique des racines de P'.