1

ANALYSE

Exercice 1.1.

1. On considère l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et l'application g de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}\ln(1+\mathrm{e}^{x}) \text{ et } g(x) = \frac{x}{1+x} - \ln(1+x)$$

a) Déterminer le signe de $g(x)$, selon les valeurs de x.

b) Étudier les variations de la fonction f.

c) Déterminer les fonctions φ définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ qui vérifient la relation :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) + \varphi(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{x}}$$

2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = a \in \mathbb{R} \text{ et la relation : } \forall\, n \geq 0, u_{n+1} = f(u_n)$$

a) Montrer qu'il existe un unique réel α tel que $f(\alpha) = \alpha$, et vérifier que α appartient à l'intervalle $]0,1[$.

b) Montrer que pour tout $x \geq 0$, on a : $-\ln 2 \leq f'(x) \leq 0$.

c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

3. Soit X une variable aléatoire à densité, dont une densité h est définie par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, h(x) = \lambda.\mathrm{e}^{-|x|}\ln(1+\mathrm{e}^{|x|})$$

a) Quelle est la valeur du réel λ ?

b) Montrer que X admet des moments de tous ordres et donner la valeur de son espérance.

Solution :

1. a) g est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et pour $x > 0$:

$$g'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x} = -\frac{x}{(1+x)^2} < 0$$

La fonction g est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et comme $g(0) = 0$:

$$\forall\, x > 0, g(x) < 0$$

b) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et :

$$f'(x) = -\mathrm{e}^{-x}\ln(1+\mathrm{e}^x) + \mathrm{e}^{-x} \times \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} = \mathrm{e}^{-x} \times g(\mathrm{e}^x) < 0$$

$\star$ Au voisinage de $-\infty$, on a $\ln(1+\mathrm{e}^x) \sim \mathrm{e}^x$, donc $f(x) \sim \mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^x = 1$.

$\star$ Au voisinage de $+\infty$, on écrit $\ln(1+\mathrm{e}^x) = x + \ln(1+\mathrm{e}^{-x}) \sim x$ et $f(x) \sim x.\mathrm{e}^{-x}$, ce qui donne (limite classique) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

D'où :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f	1	$\searrow$	$\ln 2$	$\searrow$	0

c) $\star$ On a $f'(x) + f(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}$, donc f est une solution.

$\star$ Les solutions de l'équation différentielle $y' + y = 0$ sont les fonctions $x \mapsto K.\mathrm{e}^{-x}$, où K est une constante réelle quelconque, donc les solutions du problème posé sont les fonctions :

$$\varphi : x \mapsto f(x) + K.\mathrm{e}^{-x}, K \in \mathbb{R}$$

2. a) La fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ d'image $]0,1[$.
Donc $x \mapsto f(x) - x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, et comme $f(0) - 0 = \ln 2 > 0$ et $f(1) - 1 = \mathrm{e}^{-1}\ln(1+\mathrm{e}) - 1 < 0$ (car $\ln(1+\mathrm{e}) < \mathrm{e}$), on en déduit que $f(x) = x$ admet une solution et une seule α telle que $0 < \alpha < 1$.

b) On a $f'(x) < 0$ et comme $f(x) \leq \ln 2$, on a : $f'(x) = -f(x) + \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x} \geq -\ln 2$, donc :

$$\forall\, x \geq 0; -\ln 2 \leq f'(x) < 0$$

c) La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est à valeurs dans $]0,1[$ et l'inégalité des accroissements finis donne donc :

$$\forall\, n \geq 1, |u_{n+1} - \alpha| = |f(u_n) - f(\alpha)| \leq \ln 2 |u_n - \alpha|$$

On en déduit que $\forall\, n \geq 1, |u_n - \alpha| \leq (\ln 2)^{n-1}|u_1 - \alpha|$ et comme $0 < \ln 2 < 1$:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \alpha$$

3. a) Soit $A > 0$ fixé quelconque. On peut écrire :

$$\begin{aligned}\int_0^A h(x)\,dx &= \lambda\int_0^A f(x)\,dx = \lambda\int_0^A \big[\frac{1}{1+\mathrm{e}^x} - f'(x)\big]\,dx \\ &= \lambda\int_0^A \big[\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x}+1} - f'(x)\big]\,dx = \lambda\big[-\ln(1+\mathrm{e}^{-x}) - f(x)\big]_0^A \\ &= 2\lambda\ln 2 - f(A) \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 2\lambda\ln 2\end{aligned}$$

Donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} h(x)\,dx$ converge, et par parité l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\,dx$ est aussi convergente et vaut $4\lambda\ln 2$. Comme h est continue et positive, on conclut :

$$h \text{ est une densité} \iff \lambda = \frac{1}{4\ln 2}$$

b) On a $x^2.x^k h(x) \underset{(+\infty)}{\sim} \dfrac{x^{k+3}\mathrm{e}^{-x}}{4\ln 2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $x^k h(x)$ est négligeable devant x^{-2} au voisinage de $+\infty$, ce qui assure la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^k h(x)\,dx$. On procède de même sur $\mathbb{R}^-$, ou on utilise la parité de h, et donc :

pour tout k de $\mathbb{N}$, $E(X^k)$ existe (et est nulle pour k impair).

Exercice 1.2.

1. a) Pour $x \in]0, +\infty[$ et pour $n \geq 1$, on considère la série de terme général :

$$u_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}.$$

Montrer que cette série converge pour $x > 0$ (on pourra utiliser les sommes partielles d'indices pairs et celles d'indices impairs)

On pose, pour $x > 1$,

$$s(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x), \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}, s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k^x}, \zeta_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^x}$$

b) Déterminer une relation entre $s_{2n}(x), \zeta_{2n}(x)$ et $\zeta_n(x)$.

c) En déduire que $s(x) = \big(1 - \frac{1}{2^{x-1}}\big)\zeta(x)$.

2. Soit $(x, x_0) \in]0, +\infty[^2$.

a) Montrer que pour tout $N \geq 1$, $\sum_{k=N}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-N}}{k^x} \geq 0$, et en déduire que pour tout $n \geq 1, |s(x) - s_n(x)| \leqslant \frac{1}{(n+1)^x}$.

b) Montrer que : $|s(x) - s(x_0)| \leqslant \frac{1}{(n+1)^x} + |s_n(x) - s_n(x_0)| + \frac{1}{(n+1)^{x_0}}$.

c) En déduire que s est continue au point x_0.

d) Déterminer $\lim_{x \to 1^+} \zeta(x)$.

Solution :

1. a) Soit $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$. On a :

$$s_{2n+2}(x) - s_{2n}(x) = u_{2n+1}(x) + u_{2n+2}(x) = \frac{1}{(2n+1)^x} - \frac{1}{(2n+2)^x} > 0$$

$$s_{2n+1}(x) - s_{2n-1}(x) = u_{2n}(x) + u_{2n+1}(x) = -\frac{1}{(2n)^x} + \frac{1}{(2n+1)^x} < 0$$

$$s_{2n+1}(x) - s_{2n}(x) = u_{2n+1}(x) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

Ceci prouve que les suites (s_{2n}) et (s_{2n+1}) sont adjacentes, donc convergentes de même limite. Par exhaustion on en déduit que la suite (s_n) converge.

b) On écrit :

$$\begin{aligned} s_{2n}(x) &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k^x} = \sum_{h=0}^{n-1} \frac{1}{(2h+1)^x} - \sum_{h=1}^{n} \frac{1}{(2h)^x} \\ &= \sum_{h=1}^{2n} \frac{1}{h^x} - \sum_{h=1}^{n} \frac{1}{(2h)^x} - \sum_{h=1}^{n} \frac{1}{(2h)^x} \\ &= \zeta_{2n}(x) - \frac{2}{2^x}\,\zeta_n(x). \end{aligned}$$

c) En passant à la limite lorsque n tend vers l'infini, on obtient donc :

$$s(x) = \big(1 - \frac{1}{2^{x-1}}\big)\zeta(x)$$

2. a) $\sum_{k=N}^{\infty} \frac{(-1)^{k-N}}{k^x} = \big(\frac{1}{N^x} - \frac{1}{(N+1)^x}\big) + \big(\frac{1}{(N+2)^x} - \frac{1}{(N+3)^x}\big) + \ldots \geq 0$

On écrit alors :

$$s(x) - s_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^x} = (-1)^n \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-(n+1)}}{k^x}$$

et donc le résultat précédent donne :

$$|s(x)-s_n(x)| = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-(n+1)}}{k^x} = \frac{1}{(n+1)^x} + \sum_{k=n+2}^{\infty} \frac{(-1)^{k-(n+1)}}{k^x}$$

ou encore, pour exploiter toujours la positivité précédente :

$$|s(x)-s_n(x)| = \frac{1}{(n+1)^x} - \sum_{k=n+2}^{\infty} \frac{(-1)^{k-(n+2)}}{k^x} \leq \frac{1}{(n+1)^x}$$

b) Comme $s(x)-s(x_0) = s(x)-s_n(x)+s_n(x)-s_n(x_0)+s_n(x_0)-s(x_0)$, l'inégalité triangulaire donne :

$$\begin{aligned} |s(x)-s(x_0)| &\leq |s(x)-s_n(x)| + |s_n(x)-s_n(x_0)| + |s_n(x_0)-s(x_0)| \\ &\leq \frac{1}{(n+1)^x} + |s_n(x)-s_n(x_0)| + \frac{1}{(n+1)^{x_0}} \end{aligned}$$

c) Soit $x_0 > 0$ fixé et $x > 0$. Supposons que $x > \frac{1}{2}x_0$, et soit $\varepsilon > 0$ quelconque.

On peut trouver n_0 tel que $\frac{1}{(n_0+1)^{x_0/2}} \leq \frac{\varepsilon}{3}$ et on a *a fortiori* $\frac{1}{(n_0+1)^{x_0}} \leq \frac{\varepsilon}{3}$, $\frac{1}{(n_0+1)^{x}} \leq \frac{\varepsilon}{3}$, donc :

$$|s(x)-s(x_0)| \leq \frac{2\varepsilon}{3} + |s_{n_0}(x)-s_{n_0}(x_0)|$$

Or la fonction $x \mapsto s_{n_0}(x)$ est continue (somme finie de fonctions continues) et il existe $\alpha > 0$ tel que $|x-x_0| \leq \alpha \implies |s_{n_0}(x)-s_{n_0}(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$.

Par conséquent, en oubliant le rôle intermédiaire de n_0 :

$$|x-x_0| \leq \alpha \implies |s(x)-s(x_0)| \leq \varepsilon$$

Ce qui montre que s est continue au point x_0.

d) On a : $s(x) = \big(1-\frac{1}{2^{x-1}}\big)\zeta(x)$ et $\lim\limits_{x\to 1} s(x) = s(1)$ (on peut d'ailleurs démontrer que $s(1) = \ln 2$ mais le résultat 2. a) suffit pour affirmer que $s(1) > 0$).

Comme $\lim\limits_{x\to 1^+} \big(1-\frac{1}{2^{x-1}}\big) = 0$ (et $1-\frac{1}{2^{x-1}} > 0$), il vient :

$$\lim_{x\to 1^+} \zeta(x) = +\infty$$

Exercice 1.3.

1. Montrer la convergence puis faire le calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{2+x^2}$.

2. À l'aide du changement de variable $x = \tan t, t \in]0, \pi/2[$, dont on justifiera la validité, montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{2+x^2} = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1+\cos^2 t}$$

3. Soit $f : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}$, une application de classe C^1.
Montrer que :

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_0^{\pi/2} f(t)\cos(\lambda t)dt = 0$$

4. On pose, pour tout n de $\mathbb{N}$: $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(2nt)}{1+\cos^2 t}dt$

a) Calculer I_0.

b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

c) On rappelle que : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos(a)\cos(b)$
Déterminer une relation de récurrence entre I_{n+1}, I_{n-1} et I_n.

d) En déduire l'expression de I_n en fonction de n.

Solution :

1. La fonction à intégrer est continue sur $\mathbb{R}^+$, majorée par $x \mapsto x^{-2}$, donc la règle de Riemann assure la convergence de l'intégrale.
Le changement de variable $x = \sqrt{2}\,t$ est légitime et donne :

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{2+x^2} = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{2}\,dt}{2(1+t^2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\big[\operatorname{Arc}\tan t\big]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

2. Le changement de variable $t \mapsto x = \tan t$ est de classe $\mathcal{C}^1$, strictement croissant, de $[0, \pi/2[$ sur $[0, +\infty[$, donc légitime et donne :

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{2+x^2} = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\cos^2 t} \times \frac{1}{2+\tan^2 t} = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{2\cos^2 t + \sin^2 t}$$

soit :

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{2+x^2} = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1+\cos^2 t}$$

3. Pour $\lambda \neq 0$, on intègre par parties :

$$v'(t) = \cos(\lambda t) \Longleftarrow v(t) = \frac{1}{\lambda}\sin(\lambda t)$$

ce qui donne :

$$\int_0^{\pi/2} f(t)\cos(\lambda t)\,dt = \Big[\frac{1}{\lambda}\sin(\lambda t) f(t)\Big]_0^{\pi/2} - \frac{1}{\lambda}\int_0^{\pi/2} f'(t)\sin(\lambda t)\,dt$$

$$= \frac{1}{\lambda}\sin(\frac{\lambda\pi}{2})f(\frac{\pi}{2}) - \frac{1}{\lambda}\int_0^{\pi/2} f'(t)\sin(\lambda t)\,dt$$

Donc :

$$\Big|\int_0^{\pi/2} f(t)\cos(\lambda t)\,dt\Big| \leq \frac{1}{\lambda}\Big(|f(\frac{\pi}{2})| + \int_0^{\pi/2}|f'(t)|\,dt\Big) \underset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

4. a) $I_0 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1+\cos^2 t} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

b) On peut appliquer le résultat de la troisième question, avec $2n$ à la place de λ et :

$$\lim_{n\to\infty} I_n = 0$$

c) La formule rappelée donne :

$$\cos((2n+2)t) + \cos((2n-2)t) = 2\cos(2nt)\cos(2t)$$

soit :

$$I_{n+1} + I_{n-1} = \int_0^{\pi/2} \frac{2\cos(2nt)\cos(2t)}{1+\cos^2 t}\,dt$$

et puisque $\cos(2t) = 2\cos^2 t - 1 = 2\cos^2 t + 2 - 3$:

$$I_{n+1} + I_{n-1} = \int_0^{\pi/2} 4\cos(2nt)\,dt - 6\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(2nt)}{1+\cos^2 t}\,dt$$

$$\forall\, n \geq 1, I_{n+1} + I_{n-1} + 6I_n = 0$$

d) L'équation caractéristique de la relation de récurrence linéaire précédente est $r^2 + 6r + 1 = 0$, de racines $r_1 = 2\sqrt{2} - 3$ et $r_2 = -2\sqrt{2} - 3$.

Ainsi, il existe λ et μ réels tels que, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$I_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$

$\star$ On a $|r_1| < 1$ et $|r_2| > 1$, comme $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$, cela impose $\mu = 0$ et $I_0 = \lambda$, d'où :

$$I_n = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}(2\sqrt{2} - 3)^n$$

Exercice 1.4.

Dans tout l'exercice, a et b sont deux réels tels que $a < b$.
On se donne une fonction f de la variable réelle x, définie sur le segment $K = [a, b]$ à valeurs dans K, qui vérifie :

$$\text{pour tous } x, y \text{ de } K,\ |f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|.$$

On définit alors la suite u par :

$$u_0 \in K, \text{ et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \frac{u_n + f(u_n)}{2}.$$

1. Montrer que f est continue sur K, et que la suite u est bien définie et à valeurs dans K.

2. On pose $g(x) = \dfrac{x + f(x)}{2}$. Montrer que g est continue de K dans K.

3. Montrer que g est croissante.

4. En déduire que u est monotone.

5. Montrer que u converge et que sa limite ℓ est un point fixe de f.

6. **Application numérique** : on prend $f(x) = \exp(-x)$, $K = [0, 1]$ et $u_0 = 1$. Montrer que l'étude précédente s'applique dans ce cas. Préciser le sens de variation de u, ainsi qu'un encadrement de ℓ à l'aide de la suite auxiliaire v définie par : $v_0 = 1$, et la relation de récurrence $v_{n+1} = f(v_n)$.

Solution :

1. Comme $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$, la fonction f est 1-lipschitzienne, donc continue sur K.
D'autre part, si u_n appartient à K, il en est de même de $f(u_n)$, et $u_{n+1} = \dfrac{u_n + f(u_n)}{2}$ est compris entre deux éléments du segment K, donc appartient encore à K. On conclut par le principe de récurrence.

2. On vient de dire que si $x \in K$, alors $\dfrac{x + f(x)}{2} \in K$ et comme f est continue, l'application g est clairement continue.

3. Soit x, y dans K tels que $x < y$. On a :
$$g(y) - g(x) = \frac{y - x}{2} + \frac{f(y) - f(x)}{2}$$
Or, $|f(y) - f(x)| \leq |y - x| = y - x$, donc $f(y) - f(x) \geq x - y$ et $g(y) - g(x) \geq 0$
$$g \text{ est croissante sur } K$$

4. La suite (u_n) vérifie la relation de récurrence $u_{n+1} = g(u_n)$, et comme g est croissante :
$$\operatorname{sgn}(u_{n+1} - u_n) = \operatorname{sgn}(g(u_n) - g(u_{n-1})) = \operatorname{sgn}(u_n - u_{n-1})$$
D'où par l'argument de récurrence habituel : $\operatorname{sgn}(u_{n+1} - u_n) = \operatorname{sgn}(u_1 - u_0)$, ce qui prouve que ce signe (au sens large) ne dépend pas de n :
$$(u_n) \text{ est monotone}$$

5. (u_n) est monotone et formée de points de K, donc est bornée. Ceci prouve que cette suite converge, et si on note ℓ sa limite, la continuité de f donne, par passage à la limite :

$$\ell = \frac{\ell + f(\ell)}{2}, \text{ soit } \ell = f(\ell)$$

6. ⋆ La fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ est décroissante sur $K = [0, 1]$, avec $f(0) = 1$ et $f(1) = \mathrm{e}^{-1} \in [0, 1]$, donc $f(K) \subset K$.

⋆ f est dérivable, avec $f'(x) = -\mathrm{e}^{-x} \in [-1, -\mathrm{e}^{-1}]$, donc $|f'(x)| \leq 1$ et l'inégalité des accroissements finis montre que f est bien 1-lipschitzienne.

⋆ On est donc dans le cadre de cette étude et comme $u_0 = 1$, on a $u_1 \leq u_0$ et la suite (u_n) est décroissante.

⋆ Il est facile de voir que f admet un seul point fixe (car $x \mapsto f(x) - x$ est strictement décroissante telle que $f(0) - 0 \geq 0$ et $f(1) - 1 \leq 0$).
Comme $f \circ f$ est croissante, la suite (v_n) définie par $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = f(v_n)$ est telle que les suites extraites (v_{2n}) et (v_{2n+1}) sont monotones et de sens contraires.
On a donc :

$$\forall\, n \geq 1, v_1 \leq v_n \leq v_0$$

Sur le segment $[v_1, v_0] = [\mathrm{e}^{-1}, 1]$, la fonction f vérifie $|f'(x)| \leq \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-1}} = \alpha < 1$ et donc à partir du rang 2, on a $|v_n - \ell| \leq \alpha |v_{n-1} - \ell|$, d'où :

$$\forall\, n \geq 1, |v_n - \ell| \leq \alpha^n |v_1 - \ell| \text{ et } \lim_{n\to\infty} v_n = \ell$$

Pour tout entier n, on a ainsi $v_{2n+1} \leq \ell \leq v_{2n}$ ce qui donne l'encadrement de ℓ voulu.

Exercice 1.5.

Soit $(a_k)_{k\geq 0}$ une suite de réels strictement positifs.
Pour tout $n \geq 1$, on définit le polynôme P_n par :

$$P_n(X) = \sum_{k=1}^{n} a_k X^k - a_0$$

1. Montrer que P_n admet une unique racine positive. On note λ_n cette racine.

2. Étudier la monotonie de la suite $(\lambda_n)_{n\geq 1}$. En déduire que cette suite admet une limite λ.

3. Dans cette question, on suppose que pour tout entier $k \geq 0$, on a : $a_k = k + 1$.

   a) Montrer que $0 \leqslant \lambda < 1$.

   b) Montrer la relation suivante :

$$(n+1)\lambda_n^{n+2} - (n+2)\lambda_n^{n+1} + 1 = 2(1 - \lambda_n)^2$$

(on pourra exprimer P_n en fonction de la dérivée de $\sum_{k=0}^{n+1} x^k$.)

c) En déduire la valeur de λ.

Solution :

1. La fonction P_n est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, avec $P_n(0) = -a_0 < 0$ et $\lim\limits_{+\infty} P_n = +\infty$.
Le théorème des valeurs intermédiaires strict montre que P_n s'annule une fois et une seule sur $\mathbb{R}^+$.

2. On a $P_{n+1}(x) = P_n(x) + a_{n+1}x^{n+1}$, donc $P_{n+1}(\lambda_n) = a_{n+1}\lambda_n^{n+1} > 0$.
Comme $P_{n+1}(\lambda_{n+1}) = 0$, la stricte croissance de P_{n+1} sur $\mathbb{R}^+$ donne :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \lambda_{n+1} < \lambda_n$$

La suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est positive décroissante, donc convergente.

3. a) On est bien dans le cadre de l'étude précédente et ici :

$$P_n(1) = (n+1) + n + \cdots + 2 - 1 = (n+1) + n + \cdots + 1 - 2$$
$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 2 \geq 0 \text{ (dès que } n \geq 1)$$

donc $0 < \lambda_n \leq 1$ et par stricte décroissance de cette suite :

$$0 \leq \lambda < 1$$

b) On a, pour tout x différent de 1 : $\sum\limits_{k=0}^{n+1} x^k = \dfrac{1-x^{n+2}}{1-x}$ et par dérivation légitime :

$$\sum_{k=1}^{n+1} kx^{k-1} = \frac{-(n+2)x^{n+1}(1-x) + 1 - x^{n+2}}{(1-x)^2}$$

ce qui s'écrit encore :

$$P_n(x) + 2 = \frac{(n+1)x^{n+2} - (n+2)x^{n+1} + 1}{(1-x)^2}$$

et $P_n(\lambda_n) = 0$ s'écrit bien :

$$(n+1)\lambda_n^{n+2} - (n+2)\lambda_n^{n+1} + 1 = 2(1-\lambda_n)^2$$

c) Comme $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda < 1$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n^n = 0$ et le passage à la limite dans l'expression précédente donne alors $1 = 2(1-\lambda)^2$ et puisque $\lambda < 1$:

$$\lambda = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Exercice 1.6.

Dans tout l'exercice, on étudie la fonction f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{t + \sin t}\, dt$$

1. Préciser l'ensemble de définition de f.

2. Montrer que f est paire.

3. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer la dérivée de f.

4. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

5. Montrer que f admet en zéro la limite $\dfrac{\ln(2)}{2}$.
En déduire que f se prolonge par continuité en zéro. Dans la suite, on continue à noter f ce prolongement.

6. Montrer que f ainsi prolongée est dérivable en zéro et préciser la valeur de $f'(0)$.

Solution :

1. Soit $\varphi : t \mapsto t + \sin t$.
La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $\varphi'(t) = 1 + \cos t$, ainsi $\varphi'(t) \geq 0$, nulle seulement en des points isolés et φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, telle que $\varphi(0) = 0$.
Si $x > 0$, le segment $[x, 2x]$ est inclus dans $\mathbb{R}_+^*$ et si $x < 0$, ce même segment est inclus dans $\mathbb{R}_-^*$, ainsi dans les deux cas la fonction à intégrer est continue sur le segment d'intégration et $f(x)$ est bien défini.
A priori $f(0)$ n'a pas de sens et :

$$f \text{ est définie sur } \mathbb{R}^*$$

2. Le changement de variable $u = -t$ donne pour $x \neq 0$:

$$f(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{dt}{t + \sin t} = \int_x^{2x} \frac{-du}{-u - \sin u} = \int_x^{2x} \frac{du}{u + \sin u} = f(x)$$

f est paire.

3. Si on note ψ une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{t + \sin t}$, on a $f(x) = \psi(2x) - \psi(x)$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, avec :

$$f'(x) = 2\psi'(2x) - \psi'(x) = \frac{2}{2x + \sin(2x)} - \frac{1}{x + \sin x}$$

$$f'(x) = \frac{2\sin x - \sin(2x)}{(2x + \sin(2x))(x + \sin x)} = \frac{2\sin x(1 - \cos x)}{(2x + \sin(2x))(x + \sin x)}$$

4. Pour $x > 1$, la fonction à intégrer est strictement positive, majorée par la fonction $t \mapsto \frac{1}{t-1}$, et minorée par la fonction $t \mapsto \frac{1}{t+1}$, donc :

$$\int_x^{2x} \frac{dt}{t+1} \leq f(x) \leq \int_x^{2x} \frac{dt}{t-1}, \text{ soit : } \ln\frac{2x+1}{x+1} \leq f(x) \leq \ln\frac{2x-1}{x-1}$$

et, par le théorème d'encadrement :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ln 2$$

5. Au voisinage de 0, $\sin t \sim t$, ce qui nous conduit à considérer :

$$\int_x^{2x} \frac{dt}{2t} = \frac{1}{2}\ln\frac{2x}{x} = \frac{\ln 2}{2}$$

et :

$$f(x) - \frac{\ln 2}{2} = \int_x^{2x} \Big(\frac{1}{t+\sin t} - \frac{1}{2t}\Big)dt = \int_x^{2x} \frac{t-\sin t}{2t(t+\sin t)}dt$$

Or : $\frac{t-\sin t}{2t(t+\sin t)} \underset{(0)}{\sim} \frac{t^3/6}{2t\times 2t} = \frac{t}{24}$

Donc $h : t \mapsto \frac{t-\sin t}{2t(t+\sin t)} = \frac{t}{24} + o(t)$ est prolongeable par continuité en une fonction continue sur $\mathbb{R}$ (encore notée h), et si on note H la primitive de h nulle en 0, on a $H(t) = \frac{t^2}{48} + o(t^2)$ et :

$$f(x) - \frac{\ln 2}{2} = H(2x) - H(x) = \frac{x^2}{12} - \frac{x^2}{48} + o(x^2) = \frac{x^2}{16} + o(x^2)$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{\ln 2}{2}$$

6. Le résultat précédent donne de plus, en posant $f(0) = \frac{\ln 2}{2}$:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{x}{16} + o(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$$

Donc f est dérivable en 0, avec $f'(0) = 0$.

Exercice 1.7.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \int_0^1 t^n \mathrm{e}^{-tx}\, dt$$

et on note $\mathcal{C}_n$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

1. Premières propriétés.

   a) Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, x \in \mathbb{R}, f_n(x) > 0$. Calculer $f_n(0)$.

   b) Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, x \in \mathbb{R}^*, f_{n+1}(x) = \frac{n+1}{x} f_n(x) - \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$.

c) Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, x \in \mathbb{R}^*, f_n(x) = \dfrac{1}{x^{n+1}} \displaystyle\int_0^x u^n \mathrm{e}^{-u}\, du$.

2. Variations de f_n.

a) Donner le développement limité d'ordre 1 de $f_n(x)$ au voisinage de 0. En déduire que f_n est continue en 0. Est-elle dérivable en 0 ?

b) Montrer que f_n est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$. Donner une relation entre f_n' et f_{n+1}.

c) En déduire les variations de f_n.

d) Montrer que f_n est convexe sur $\mathbb{R}$.

3. Étude en $+\infty$.

a) Montrer que : $f_0(x) \underset{(x\to+\infty)}{\sim} \dfrac{1}{x}$.

b) En utilisant la relation établie en 1. b) , montrer que :

$$\forall\, n \geq 0, f_n(x) \underset{(x\to+\infty)}{\sim} \frac{n!}{x^{n+1}}.$$

4. Étude en $-\infty$.

a) Montrer que : $\forall\, n \geq 0, f_n(x) \underset{(x\to-\infty)}{\sim} -\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$.

b) En déduire la nature de la branche infinie de $\mathcal{C}_n$, x tendant vers $-\infty$.

Solution :

1. a) La fonction à intégrer est continue, positive et non identiquement nulle sur le segment $[0,1]$, donc $f_n(x) > 0$, et $f_n(0) = \displaystyle\int_0^1 t^n\, dt = \frac{1}{n+1}$.

b) Pour $x \neq 0$, une intégration par parties élémentaire donne :

$$f_{n+1}(x) = \int_0^1 t^{n+1}\mathrm{e}^{-tx} dt = \Big[-t^{n+1}\,\frac{\mathrm{e}^{-tx}}{x}\Big]_0^1 + \frac{n+1}{x}\int_0^1 t^n \mathrm{e}^{-tx} dt$$

soit :

$$f_{n+1}(x) = \frac{n+1}{x} f_n(x) - \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$$

c) Pour x non nul, le changement de variable $u = xt$ est légitime et donne :

$$f_n(x) = \int_0^x \big(\tfrac{u}{x}\big)^n\, \mathrm{e}^{-u}\, \frac{du}{x} = \frac{1}{x^{n+1}}\int_0^x u^n \mathrm{e}^{-u}\, du$$

2. a) $\star$ On a : $u^n \mathrm{e}^{-u} = u^n(1 - u + o(u)) = u^n - u^{n+1} + o(u^{n+1})$, donc :

$$\int_0^x u^n \mathrm{e}^{-u}\, du = \int_0^x (u^n - u^{n+1} + o(u^{n+1}))du = \frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{x^{n+2}}{n+2} + o(x^{n+2})$$
et :
$$f_n(x) = \frac{1}{n+1} - \frac{x}{n+2} + o(x)$$

⋆ Comme $f_n(0) = \frac{1}{n+1}$, f_n est continue en 0 et le terme suivant du développement limité montre que f_n est dérivable en 0, avec :
$$f_n'(0) = -\frac{1}{n+2}$$

b) La formule vue en 1. c) montre que f_n est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, avec :
$$f_n'(x) = -\frac{n+1}{x^{n+2}} \int_0^x u^n \mathrm{e}^{-u} du + \frac{1}{x^{n+1}}\, x^n \mathrm{e}^{-x} = -\frac{n+1}{x} f_n(x) + \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$$
Soit :
$$f_n'(x) = -f_{n+1}(x)$$

c) Comme f_{n+1} est strictement positive sur $\mathbb{R}$, la fonction f_n est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ ...

d) ... et puisque $f_n'' = -f_{n+1}' = f_{n+2}$, la fonction f_n'' est strictement positive sur $\mathbb{R}$ et f_n est (strictement) convexe.

3. a) Pour $x \neq 0$, $f_0(x) = \frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}$ et $f_0(x) \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{1}{x}$.

b) On suppose que pour un certain rang n, on a $f_n(x) \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{n!}{x^{n+1}}$, alors comme
$$f_{n+1}(x) = \frac{n+1}{x} f_n(x) - \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$$
et comme e^{-x} est négligeable devant toute puissance de x, au voisinage de $+\infty$, le deuxième terme est négligeable devant le premier, ce qui donne :
$$f_{n+1}(x) \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{(n+1)n!}{x.x^{n+1}} = \frac{(n+1)!}{x^{n+2}}$$
La propriété énoncée étant vraie au rang 0 (résultat a)), on conclut par le principe de récurrence.

4. a) ⋆ Clairement $f_0(x) \underset{(-\infty)}{\sim} -\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$.

⋆ On suppose que pour un certain rang n, $f_n(x) \underset{(-\infty)}{\sim} -\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$, comme $\frac{1}{x^2} = o(\frac{1}{x})$, la relation $f_{n+1}(x) = \frac{n+1}{x} f_n(x) - \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$ montre alors que $f_{n+1}(x) \underset{(-\infty)}{\sim} -\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$ et on conclut encore par le principe de récurrence.

b) Ainsi $\mathcal{C}_n$ présente, au voisinage de $-\infty$, une branche parabolique de direction Oy.

Exercice 1.8.

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par son premier terme u_0, avec $u_0 > 0$, et la relation de récurrence :

$$\forall\, n \geq 0, u_{n+1} = u_n + u_n^2$$

1. Etudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. Pour $n \geq 0$ on pose : $v_n = \dfrac{1}{2^n}\ln(u_n)$.

a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et qu'à partir d'un certain rang (que l'on ne cherchera pas à préciser), on a :

$$v_{n+1} \leq v_n + \frac{1}{2^{n+1}}$$

b) En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

On note α la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on ne cherchera pas à calculer α.

3. a) Montrer que pour tout $x > -1$, on a : $\ln(1+x) \leq x$.

b) En déduire que pour n et p dans $\mathbb{N}$, on a :

$$0 \leq v_{n+p} - v_n \leq \frac{1}{2^n u_n}$$

c) Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty}[2^n\alpha - \ln(u_n)] = 0$, et en déduire un équivalent de u_n lorsque n tend vers l'infini.

4. Montrer que la série de terme général $w_n = \dfrac{1}{2^n u_n}$ converge.

Solution :

1. On a $u_{n+1} - u_n = u_n^2 \geq 0$, donc la suite (u_n) est croissante. Si elle convergeait, sa limite ℓ vérifierait $\ell = \ell + \ell^2$, soit $\ell = 0$, ce qui n'est pas raisonnable pour une suite croissante de premier terme strictement positif. Donc (u_n) ne converge pas et comme elle croît :

$$\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$$

2. a) Pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{2^{n+1}}\ln(u_{n+1}) - \frac{1}{2^n}\ln(u_n) = \frac{1}{2^{n+1}}\ln(u_n(1+u_n)) - \frac{1}{2^n}\ln(u_n) \\ &= \frac{1}{2^{n+1}}\ln\frac{1+u_n}{u_n} = \frac{1}{2^{n+1}}\ln(1+\frac{1}{u_n}) > 0 \end{aligned}$$

Donc la suite (v_n) est croissante et comme $\lim_{n\to\infty} \ln(1+\frac{1}{u_n}) = 0 < 1$, à partir d'un certain rang, on a bien :

$$0 \leq v_{n+1} - v_n < \frac{1}{2^{n+1}}$$

b) Ainsi la **série** de terme général positif $v_{n+1} - v_n$ est convergente (règle de majoration), ce qui signifie exactement que la **suite** (v_n) converge.

3. a) Cette inégalité est classique et résulte, par exemple, de la concavité de la fonc-tion ln.

b) On a :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2^{n+1}} \ln(1+\frac{1}{u_n}) \leq \frac{1}{2^{n+1}} \times \frac{1}{u_n}$$

$$v_{n+2} - v_{n+1} = \frac{1}{2^{n+2}} \ln(1+\frac{1}{u_{n+1}}) \leq \frac{1}{2^{n+2}} \times \frac{1}{u_{n+1}} \leq \frac{1}{2^{n+2}} \times \frac{1}{u_n}$$

et, ainsi de suite, jusqu'à :

$$v_{n+p} - v_{n+p-1} = \frac{1}{2^{n+p}} \ln(1+\frac{1}{u_{n+p-1}}) \leq \frac{1}{2^{n+p}} \times \frac{1}{u_{n+p-1}} \leq \frac{1}{2^{n+p}} \times \frac{1}{u_n}$$

íl vient alors, par sommation télescopique :

$$v_{n+p} - v_n \leq \frac{1}{u_n} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2^{n+k}} = \frac{1}{2^n u_n} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2^k} \leq \frac{1}{2^n u_n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n u_n}$$

et comme la suite (v_n) est croissante, on a bien $0 \leq v_{n+p} - v_n$.

c) Comme $v_n = \frac{1}{2^n u_n}$, la relation précédente s'écrit aussi, pour n fixé et p quelconque :

$$0 \leq 2^n v_{n+p} - \ln(u_n) \leq \frac{1}{u_n}$$

et par prolongement des inégalités à la limite, lorsque p tend vers l'infini :

$$2^n \alpha - \ln(u_n) \leq \frac{1}{u_n}$$

et, par encadrement : $\lim_{n\to\infty} \big(2^n\alpha - \ln(u_n)\big) = 0$, *i.e.* $\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{2^n\alpha}}{u_n} = 1$, ou encore :

$$u_n \underset{(\infty)}{\sim} \mathrm{e}^{2^n\alpha}$$

4. On a $0 \leq w_n \leq \frac{1}{2^n u_0}$, donc la série de terme général w_n converge.

Exercice 1.9.

Une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions polynômes réelles est définie par la donnée de $P_0 : x \mapsto x$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall\, x \in \mathbb{R}, P_{n+1}(x) = (n+1)\int_0^x P_n(t)dt + x(1-(n+1)\int_0^1 P_n(t)\,dt)$$

1. Déterminer P_1, P_2, P_3 et P_4.

2. Montrer que, pour tout n, P_n est l'unique fonction polynôme vérifiant les deux conditions :

$$P_n(0) = 0, \text{ et } \forall\, x \in \mathbb{R}, P_n(x) - P_n(x-1) = x^n$$

(Pour la suite donnée dans l'énoncé, on calculera $P_{n+1}(0), P_{n+1}(1)$ et on calculera $P'_{n+1}(x) - P'_{n+1}(x-1)$)

On note encore P_n le polynôme associé à la fonction polynôme P_n.

3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme P_n est divisible par $X(X+1)$. Factoriser les polynômes P_1, P_2 et P_3.

4. Montrer que le polynôme P_n est de degré $n+1$; calculer son coefficient dominant, ainsi que le coefficient du terme en X^n.

5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a $P_n(p) = \sum_{k=1}^{p} k^n$.

Solution :

1. $\star$ $P_1(x) = \displaystyle\int_0^x t\,dt + x(1 - \int_0^1 t\,dt) = \frac{x^2}{2} + x(1 - \frac{1}{2}) = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}$;

$\star$ $P_2(x) = 2\displaystyle\int_0^x (\frac{t^2}{2} + \frac{t}{2})\,dt + x(1 - 2\int_0^1 (\frac{t^2}{2} + \frac{t}{2})\,dt) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6}$

et des calculs similaires donnent :

$$P_3(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{4}\ ;\ P_4(x) = \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x}{30}$$

2. $\star$ Supposons qu'il existe deux fonctions polynômes P_n et Q_n telles que :

$$P_n(0) = Q_n(0) \text{ et } \forall\, x, P_n(x) - P_n(x-1) = x^n = Q_n(x) - Q_n(x-1)$$

Alors $P_n(1) = Q_n(1)$, puis $P_n(2) = Q_n(2)$, etc. et le polynôme $P_n - Q_n$ est nul en tout point de $\mathbb{N}$, donc admet une infinité de racines et est le polynôme nul, ce qui prouve que $P_n = Q_n$.

$\star$ La suite de polynômes définie dans la question 1. vérifie :

$\rightarrow$ $P_0(0) = 0$ et pour $n \geq 0, P_{n+1}(0) = 0, P_{n+1}(1) = 1$;

$\rightarrow$ $P'_{n+1}(x) = (n+1)P_n(x) + 1 - (n+1)\displaystyle\int_0^1 P_n(t)\,dt$, donc :

$$P'_{n+1}(x) - P'_{n+1}(x-1) = (n+1)(P_n(x) - P_n(x-1))$$

Si on suppose que pour un certain rang n, on a $P_n(x) - P_n(x-1) = x^n$, on a donc :

$$P'_{n+1}(x) - P'_{n+1}(x-1) = (n+1)x^n$$

Ainsi, en « primitivant » : $P_{n+1}(x) - P_{n+1}(x-1) = x^{n+1} + K$ et la valeur en 1 donne $K = 0$, soit : $P_{n+1}(x) - P_{n+1}(x-1) = x^{n+1}$.
On a donc le résultat voulu au rang $n+1$ et on conclut par le principe de récurrence.

3. Pour $n \geq 1$, on a déjà vu que $P_n(0) = 0$ et comme $P_n(0) - P_n(-1) = 0^n = 0$, on a aussi $P_n(-1) = 0$ et P_n est divisible par X et $X+1$, donc par $X(X+1)$.

On trouve alors facilement :

$$P_1 = \frac{1}{2}X(X+1),\ P_2 = \frac{1}{6}X(X+1)(2X+1),\ P_3 = \frac{1}{4}[X(X+1)]^2$$

4. La considération des premiers termes laisse à penser que P_n est de la forme :

$$P_n = \frac{1}{n+1}\,X^{n+1} + \frac{1}{2}\,X^n + \cdots$$

Cette propriété est vraie au rang 1 et si on suppose qu'elle est vraie à un certain rang $n \geq 1$, alors :

$P_{n+1}(x) = (n+1)\displaystyle\int_0^x \left(\frac{t^{n+1}}{n+1} + \frac{t^n}{2} + \cdots\right) dt + \alpha x$ (la valeur de α est sans importance), soit :

$$P_{n+1}(x) = \frac{x^{n+2}}{n+2} + \frac{x^{n+1}}{2} + \cdots$$

Ce qui prouve la propriété au rang $n+1$. On conclut par le principe de récurrence.

5. On a $P_n(0) = 0$, $P_n(1) - P_n(0) = 1^n$, $P_n(2) - P_n(1) = 2^n$, et ainsi de suite.

On obtient donc, par télescopage :

$$\sum_{k=1}^{p} k^n = \sum_{k=1}^{n} [P_n(k) - P_n(k-1)] = P_n(p)$$

Exercice 1.10.

On note E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et périodiques, $T = 1$ étant une période de f.

Soit Θ l'application définie sur E, par :

$$\text{pour tout } f \text{ de } E, \text{ et tout } x \text{ de } \mathbb{R},\ \Theta(f)(x) = \int_x^{x+1} f(t)dt$$

1. a) Montrer que Θ est une application linéaire.

   b) L'application Θ est-elle un endomorphisme de E ? Est-elle surjective ?

2. Montrer que $\operatorname{Ker}\Theta = \left\{ f \in E \,/ \int_0^1 f(t)\,dt = 0 \right\}$

3. Calculer pour x réel, $\displaystyle\int_x^{x+1} |\sin(\pi t)| dt$

4. Soit $f \in E$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $x \in [n, n+1]$, on pose : $\varphi_n(x) = \displaystyle\int_n^x f(t)dt$,

et pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $w_n = \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{f(t)}{t} dt$.

a) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = \dfrac{\varphi_0(1)}{n+1} + \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\varphi_n(t)}{t^2}\, dt$.

b) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} w_n$ converge si et seulement si $f \in \operatorname{Ker}\Theta$.

Solution :

1. a) Si f, g sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et λ un scalaire, on a, pour tout x :

$$\begin{aligned}\Theta(f+\lambda g)(x) &= \int_x^{x+1} (f(t)+\lambda g(t))\,dt = \int_x^{x+1} f(t)\,dt + \lambda \int_x^{x+1} g(t)\,dt \\ &= \Theta(f)(x) + \lambda\Theta(g)(x)\end{aligned}$$

Donc Θ est linéaire.

b) $\star$ Pour $f \in E$, l'application $\Theta(f)$ est clairement continue (et même de classe $\mathcal{C}^1$).

$\star$ Pour $f \in E$, on a pour tout x, par périodicité de f :

$$[\Theta(f)]'(x) = f(x+1) - f(x) = 0$$

Donc $\Theta(f)$ est une fonction constante, qui est bien périodique et 1 est une période. Donc Θ est un endomorphisme de E.

$\star$ Θ n'est pas surjective, car il existe des fonctions continues, périodiques, 1 étant période et qui ne sont pas constantes.

2. $\star$ Si $f \in \operatorname{Ker}\Theta$, alors on a $\Theta(f)(0) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt = 0$.

$\star$ Réciproquement, si $\Theta(f)(0) = 0$, alors comme $\Theta(f)$ est constante, $\Theta(f)$ est la fonction nulle.

$$\operatorname{Ker}\Theta = \left\{ f \in E \,/ \int_0^1 f(t)\,dt = 0 \right\}$$

3. Il suffit de faire le calcul en 0, donc :

$$\int_x^{x+1} |\sin(\pi t)|dt = \int_0^1 |\sin(\pi t)|dt = \int_0^1 \sin(\pi t)dt = \frac{2}{\pi}$$

4. a) φ_n est la primitive de f sur $[n, n+1]$ qui est nulle en n, donc en intégrant par parties :

$$w_n = \Big[\frac{\varphi_n(t)}{t}\Big]_n^{n+1} + \int_n^{n+1} \frac{\varphi_n(t)}{t^2}\,dt = \frac{\varphi_n(n+1)}{n+1} + \int_n^{n+1} \frac{\varphi_n(t)}{t^2}\,dt$$

Mais $\Theta(f)$ est constante, donc $\varphi_n(n+1) = \varphi_0(1)$ et donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ w_n = \frac{\varphi_0(1)}{n+1} + \int_n^{n+1} \frac{\varphi_n(t)}{t^2}\,dt$$

b) Soit M un majorant de $|f|$ sur $[0,1]$, M est majorant de $|f|$ sur $\mathbb{R}$ et : $\forall\, x \in [n, n+1], |\varphi_n(x)| \leq M$ et donc :

$$\Big|\int_n^{n+1} \frac{\varphi_n(t)}{t^2}\,dt\Big| \leq M\int_n^{n+1} \frac{dt}{t^2} \leq \frac{M}{n^2}$$

Ainsi la série de terme général $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\varphi_n(t)}{t^2}$ est (absolument) convergente et la série de terme général w_n converge si et seulement si la série de terme général $\dfrac{\varphi_0(1)}{n+1}$ converge, ce qui se produit si et seulement si $\varphi_0(1) = 0$, donc si et seulement si $f \in \operatorname{Ker}\Theta$.

Exercice 1.11.

Soient a et b deux réels tels que $a < b$.
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 telle que $\forall\, x \in [a,b], f''(x) > 0$.
On note $\mathcal{L}$ l'ensemble des fonctions affines ℓ sur $[a,b]$ telles que

$$\forall\, x \in [a,b], \ell(x) \leqslant f(x)$$

On cherche $\ell \in \mathcal{L}$ telle que $\displaystyle\int_a^b \big(f(x) - \ell(x)\big)\,dx$ soit minimal.

1. Montrer que l'ensemble A défini par $A = \Big\{\displaystyle\int_a^b \big(f(x) - \ell(x)\big)\,dx,\ \ell \in \mathcal{L}\Big\}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ non vide et minoré.
En déduire l'existence de $\inf(A)$.

2. Soit $\ell \in \mathcal{L}$ telle que $\ell(x) < f(x)$ pour tout $x \in [a,b]$. Montrer alors que

$$\int_a^b \big(f(x) - \ell(x)\big)\,dx > \inf(A)$$

3. Montrer que le problème revient à maximiser la fonction g définie sur $[a, b]$ par :

$$g(c) = f'(c)\big(\frac{a+b}{2}\big) + f(c) - cf'(c)$$

où f' désigne la dérivée de f.

4. Conclure.

Solution :

1. A est bien un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ contenant le nombre $\displaystyle\int_a^b (f(x) - m)\,dx$, où m désigne le *minimum* de la fonction f (continue) sur le segment $[a, b]$. De plus, comme pour tout $\ell \in \mathcal{L}$, on a $\ell \leqslant f$, A est minoré par 0 (positivité de l'intégrale). D'où l'existence de $\inf A$.

2. Désignons par α le *minimum* (strictement positif) de la fonction (continue) $f - \ell$ sur le segment $[a, b]$. On pose alors pour tout $x \in [a, b]$, $\widetilde{\ell}(x) = \ell(x) + \alpha$. Ainsi $\widetilde{\ell} \in \mathcal{L}$ et :

$$\int_a^b (f - \ell)(x)\,dx = \int_a^b [(f - \widetilde{\ell})(x) + \alpha(b - a)]\,dx$$
$$\int_a^b (f - \ell)(x)\,dx \geq \inf(A) + \alpha(b - a) > \inf(A)$$

3. Nous pouvons restreindre notre recherche aux fonctions affines $\ell \in \mathcal{L}$ telles qu'il existe $x \in [a, b]$ tel que $\ell(x) = f(x)$: la fonction f étant convexe, le graphe de l sera tangent au graphe de f.
On cherche donc ℓ_c ($c \in [a, b]$) sous la forme $\ell_c(x) = f'(c)(x - c) + f(c)$ tel que $\displaystyle\int_a^b (f - ell_c)(x)\,dx$ soit minimal.
Or

$$\int_a^b (f - \ell_c)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - f'(c)\big(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} - c(b - a)\big) - f(c)(b - a)$$
$$= \int_a^b f(x)\,dx - (b - a)\big(f'(c)(\frac{a+b}{2} - c) + f(c)\big)$$

Minimiser $\displaystyle\int_a^b (f - \ell_c)(x)\,dx$, c'est donc maximiser $f'(c)\big(\frac{a+b}{2} - c\big) + f(c)$.

4. Faisons une étude des variations de g :

$$g'(c) = f''(c)\big(\frac{a+b}{2} - c\big).$$

Donc g admet un *maximum* pour $c = \dfrac{a+b}{2}$.

Il existe donc une unique fonction ℓ qui répond au problème :

$$\ell(x) = f'\big(\frac{a+b}{2}\big)(x - \frac{a+b}{2}) + f\big(\frac{a+b}{2}\big)$$

Exercice 1.12.

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite, on note respectivement φ et Φ, une densité et la fonction de répartition de X.

1. Pour x réel strictement positif, on considère l'intégrale $I(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2}\, dt$.

a) Vérifier la convergence de l'intégrale précédente.

b) Exprimer, pour x réel strictement positif, $1 - \Phi(x)$ en fonction de $I(x)$ et $\varphi(x)$.

c) Montrer que pour $x > 0$, on a :

$$1 - \frac{1}{x^2} \leq \frac{x(1 - \Phi(x))}{\varphi(x)} \leq 1$$

d) En déduire un équivalent simple de $1 - \Phi(x)$, lorsque x tend vers $+\infty$.

2. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}[1 - \Phi(1 + \sqrt{x})]\, dx$ est convergente et calculer sa valeur en fonction de $\Phi(1)$.

Solution :

1. a) Pour tout $t > 1, \big|\frac{\varphi(t)}{t^2}\big| \leqslant \frac{1}{t^2}$, ce qui entraîne l'existence de $I(x)$ pour tout $x > 0$.

b) Une intégration par parties donne pour $A > 0$:

$$\int_x^A \frac{\varphi(t)}{t^2}\, dt = \Big[\frac{\varphi(t)}{t}\Big]_x^A + \int_x^A \frac{\varphi'(t)}{t}\, dt = \Big[\frac{\varphi(t)}{t}\Big]_x^A + \Phi(x) - \Phi(A)$$

Donc, en prenant la limite lorsque A tend vers $+\infty$, pour $x > 0$:

$$1 - \Phi(x) = \frac{\varphi(x)}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2}\, dt$$

c) Par positivité de la fonction $x \mapsto \dfrac{\varphi(x)}{x^2}$, on a $1 - \Phi(x) \leqslant \dfrac{\varphi(x)}{x}$, donc

$$\frac{x(1-\Phi(x))}{\varphi(x)} \leqslant 1$$

D'autre part $\dfrac{\varphi(t)}{t^2} = \dfrac{t\varphi(t)}{t^3}$ entraîne que :

$$0 \leqslant \int_x^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt \leqslant \frac{1}{x^3}\int_x^{+\infty} t\varphi(t)\,dt$$

Par suite $1-\Phi(x) \geq \dfrac{\varphi(x)}{x} - \dfrac{1}{x^3}\displaystyle\int_x^{+\infty} t\varphi(t)\,dt$, et :

$$\frac{x(1-\Phi(x))}{\varphi(x)} \geq 1 - \frac{1}{x^2}\times\frac{1}{\varphi(x)}\times\int_x^{+\infty} t\varphi(t)\,dt = 1 - \frac{1}{x^2}$$

(en effet $\displaystyle\int_x^{+\infty} t\,\varphi(t)\,dt = \big[-\varphi(t)\big]_x^{\to+\infty} = \varphi(x)$)

d) Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x(1-\Phi(x))}{\varphi(x)} = 1$, il vient, au voisinage de $+\infty$:

$$1-\Phi(x) \sim \frac{\varphi(x)}{x}$$

2. La fonction considérée est continue sur tout segment $[0, A]$. Lorsque x tend vers $+\infty$, on a :

$$1-\Phi(\sqrt{x}+1) \sim \frac{\varphi(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mathrm{e}}}\times\mathrm{e}^{-x/2}\times\frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$$

D'où :

$$\mathrm{e}^{x/2}\big[1-\Phi(\sqrt{x}+1)\big] \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi\mathrm{e}}}\times\frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = o(x^{-2})$$

Le calcul de l'intégrale se fait à l'aide d'une intégration par parties sur $[0, A]$, en posant $u(x) = 1-\Phi(\sqrt{x}+1)$ et $v'(x) = \mathrm{e}^{x/2}$. Ce qui donne, en prenant la limite lorsque A tend vers $+\infty$:

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{x/2}[1-\Phi(\sqrt{x}+1)]\,dx = 2(\Phi(1)-1) + \sqrt{\frac{2}{\pi\mathrm{e}}}$$

Exercice 1.13.

On cherche à calculer $\mu = \displaystyle\min_{(x,y)\in[-1,1]^2} \varphi(x,y)$, où :

$$\forall (x,y) \in [-1,1]^2, \varphi(x,y) = \int_{-1}^{1} |t-x|.|t-y|\,dt$$

1. a) Montrer que φ est une fonction continue sur $C = [-1,1]^2$.

(On ne cherchera pas à calculer $\varphi(x,y)$, mais on majorera $|\varphi(x,y)-\varphi(x_0,y_0)|$, pour (x,y) et (x_0,y_0) dans C.)

b) En déduire l'existence de μ.

2. Soit $T=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/-1\leq x\leq y\leq 1\}$. Montrer que :

$$\forall (x,y)\in T, \varphi(x,y)=-\frac{1}{3}(x-y)^3+\frac{2}{3}+2xy$$

3. Montrer que la fonction φ admet un *minimum* sur T et que celui-ci est atteint à l'intérieur de T.

4. Déterminer μ, ainsi que l'ensemble des points où μ est atteint.

Solution :

1. a) Soit $(x_0,y_0)\in[-1,1]^2$. On majore :

$$\begin{aligned}|\varphi(x,y)-\varphi(x_0,y_0)| &= \left|\int_{-1}^{1}(|t-x||t-y|-|t-x_0||t-y_0|)dt\right| \\ &\leqslant \int_{-1}^{1}||t-x||t-y|-|t-x_0||t-y_0||\ dt \\ &\leqslant \int_{-1}^{1}|(t-x)(t-y)-(t-x_0)(t-y_0)|\ dt \\ &\leqslant \int_{-1}^{1}|t(x_0+y_0-x-y)+xy-x_0y_0|\ dt\end{aligned}$$

$$|\varphi(x,y)-\varphi(x_0,y_0)|\leqslant 2|(x_0+y_0-x-y)|+2|xy-x_0y_0|$$

Le majorant étant clairement de limite nulle lorsque (x,y) tend vers (x_0,y_0), on en déduit la continuité de φ au point (x_0,y_0).

b) Toute fonction continue sur un fermé borné est bornée et atteint ses bornes : ceci justifie l'existence de μ.

2. En gérant le signe, on écrit

$$\varphi(x,y)=\int_{-1}^{x}(t^2-(x+y)t+xy)\,dt-\int_{x}^{y}(t^2-(x+y)t+xy)\,dt + \int_{y}^{1}(t^2-(x+y)t+xy)\,dt$$

En notant $f(t)=\dfrac{t^3}{3}-(x+y)\dfrac{t^2}{2}+xyt$, il vient :
$\varphi(x,y)=2f(x)-2f(y)+f(1)-f(-1)$, soit :

$$\varphi(x,y) = -\frac{1}{3}(x-y)^3 + 2xy + \frac{2}{3}$$

3. La fonction φ est continue sur T qui est fermé, borné. Elle atteint son *minimum* sur T. Ce *minimum* est atteint à l'intérieur de T, puisque :

$\rightarrow \forall\, x \in [-1,1], \varphi(x,x) \geq \frac{2}{3}$,

$\rightarrow$ $\varphi(-1,x) = \frac{1}{3}(x+1)^3 + \frac{2}{3} - 2x$, et une étude rapide de cette fonction montre que : pour tout $x \in [-1,1]$, $\varphi(-1,x) \geq \frac{8-4\sqrt{2}}{3} > \frac{1}{2}$.

$\rightarrow$ De même, pour tout $x \in [-1,1]$, $\varphi(1,x) \geq \frac{8-4\sqrt{2}}{3}$.

$\rightarrow$ Or $\varphi(-1/2,1/2) = 1/2$; donc le *minimum* de φ est atteint à l'intérieur de T, donc en un point critique puisque la fonction est de classe $\mathcal{C}^1$.

4. Déterminons les points critiques de φ. Ils sont solutions du système :

$$\begin{cases} -(x-y)^2 + 2y = 0 \\ (x-y)^2 + 2x = 0 \end{cases}$$

dont l'unique solution est $x_0 = -y_0 = -\frac{1}{2}$, et $\varphi(x_0,y_0) = \varphi(y_0,x_0) = \frac{1}{2}$.

Ainsi l'unique point critique est le point où f atteint son *minimum*.

Exercice 1.14.

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la fonction F_a de la variable réelle x définie par :

$$F_a(x) = \int_a^x \mathrm{e}^{t^2}\, dt$$

Étudier la fonction F_a et montrer qu'elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à déterminer.

2. Montrer que l'on définit bien une fonction f sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \int_x^{f(x)} \mathrm{e}^{t^2}\, dt = 1$$

3. Montrer que f est croissante sur $\mathbb{R}$.

4. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et montrer que $\forall\, x \geq 0$, on a $0 < f'(x) < 1$, où f' désigne la dérivée de f..

5. Montrer que le graphe de f, dans le plan rapporté à un repère orthonormé, est symétrique par rapport à la deuxième bissectrice (*i.e.* par rapport à la droite d'équation $y = -x$).

6. Montrer l'existence d'un point d'inflexion d'abscisse positive sur le graphe de f.

Solution :

1. La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, elle admet des primitives définies sur $\mathbb{R}$. Pour $a \in \mathbb{R}$, $F_a(x) = \displaystyle\int_a^x \mathrm{e}^{t^2} dt$ est sa primitive qui s'annule en a.

La fonction F_a est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}$ ($F_a^{'}(x) = \mathrm{e}^{x^2} > 0$). Clairement :

$$F_a(a) = 0 \text{ et } \lim_{x \to -\infty} F_a(x) = -\infty, \lim_{x \to +\infty} F_a(x) = +\infty.$$

F_a est donc une bijection croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

2. Soit a réel quelconque. On a montré que F_a est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, il existe donc un seul réel b tel que $\displaystyle\int_a^b \mathrm{e}^{t^2} dt = 1$. On définit ainsi le réel $f(a)$.

3. On a, par la relation de Chasles :

$$\int_x^{f(x)} \mathrm{e}^{t^2} dt = \int_x^y \mathrm{e}^{t^2} dt + \int_y^{f(y)} \mathrm{e}^{t^2} dt + \int_{f(y)}^{f(x)} \mathrm{e}^{t^2} dt$$

Or : $\displaystyle\int_x^{f(x)} \mathrm{e}^{t^2} dt = \int_y^{f(y)} \mathrm{e}^{t^2} dt = 1$. D'où :

$$\int_{f(x)}^{f(y)} \mathrm{e}^{t^2} dt = \int_x^y \mathrm{e}^{t^2} dt$$

L'inégalité $x < y$ entraîne que $\displaystyle\int_x^y \mathrm{e}^{t^2} dt > 0$, d'où $\displaystyle\int_{f(x)}^{f(y)} \mathrm{e}^{t^2} dt > 0$ et $f(x) < f(y)$ (car $t \mapsto \mathrm{e}^{t^2} > 0$), d'où la croissance stricte de f sur $\mathbb{R}$.

4. Soit a un réel, $\forall x \in \mathbb{R}, F_a(f(x)) - F_a(x) = 1$ donne $f(x) = F_a^{-1}(1 + F_a(x))$. F_a est dérivable sur $\mathbb{R}$, il en est de même de la bijection réciproque F_a^{-1} (car F_a' ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$) et on a : $(F_a^{-1})'(y) = \dfrac{1}{F_a'[F_a^{-1}(y)]}$, d'où :

$$f'(x) = \frac{1}{F_a'[F_a^{-1}(1 + F_a(x)]} F_a'(x) = \frac{F_a'(x)}{F_a'(f(x))} = \mathrm{e}^{x^2 - f^2(x)} > 0$$

et $\forall x, x < f(x) \Rightarrow \forall x \geq 0,\ x^2 - f^2(x) < 0$, ce qui entraîne que :

$$\forall x \geq 0,\ 0 < f'(x) < 1.$$

5. Si $M(x,y)$ est un point du graphe, alors la symétrie par rapport à la deuxième bissectrice se traduit par le fait que le point $M'(-y,-x)$ est aussi un point du graphe.
Il faut donc vérifier : $\forall x \in \mathbb{R}, f(-f(x)) = -x$.
Or

$$\int_{-f(x)}^{-x} \mathrm{e}^{t^2} dt = \int_{f(x)}^{x} \mathrm{e}^{u^2}(-du) = \int_{x}^{f(x)} \mathrm{e}^{u^2} du = 1 \implies f(f(-x)) = -x$$

6. Pour tout $x \in \mathbb{R}, f'(x) = \mathrm{e}^{x^2 - f^2(x)}$, donc f est de classe C^2 et

$$f''(x) = 2[x - f(x)f'(x)]f'(x).$$

- $f(0) > 0,\ f'(0) > 0 \Rightarrow f^{''}(0) < 0,$
- Si f'' reste négative sur $\mathbb{R}^+$, f est alors concave et il en est de même de $g(x) = f(x) - x$. Donc $\forall x > 0; 0 < f'(x) < 1 \Rightarrow \forall x > 0, g'(x) < 0$, ce qui entraîne que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ ce qui est absurde car $g > 0$. Donc

$$\exists x > 0, f''(x) > 0.$$

- f'' étant continue sur $\mathbb{R}^+$, le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence d'un réel positif tel que : $f''(x) = 0$, c'est-à-dire d'un point d'inflexion.

Exercice 1.15.

Sous réserve d'existence, on pose :

$$f(x) = \int_0^{\pi} \sqrt{x + \cos t}\, dt \quad ; \quad g(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}).$$

1. Etude de g :

   a) Quel est le domaine de définition de g ? Calculer sa dérivée et donner son tableau des variations.

   b) Esquisser le graphe de g.

2. Etude de f :

   a) Quel est le domaine de définition de f ?

   b) Quel est son sens de variation ?

   c) On rappelle que $1 + \cos t = 2\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)$. Calculer $f(1)$.

   d) Etudier le comportement de f quand x tend vers $+\infty$.

3. Etude de f au voisinage de $x = 1$

   a) Soit h un réel strictement positif.

Effectuer le changement de variable $u = \sqrt{2}\cos\left(\frac{t}{2}\right)$ pour exprimer l'intégrale :

$$I(h) = \int_0^{\pi} \frac{\sin(\frac{t}{2})}{\sqrt{h + 2\cos^2(\frac{t}{2})}}\, dt$$

à l'aide des fonctions usuelles.

b) Justifier les inégalités :

$$\forall x > 1, \frac{1}{2\sqrt{x+\cos t}} \leqslant \frac{\sqrt{x+\cos t} - \sqrt{1+\cos t}}{x-1} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{1+\cos t}}$$

c) Démontrer que $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = +\infty$.

Solution :

1. a) Pour tout x, on constate que $\sqrt{1+x^2} > |x|$, donc $x+\sqrt{1+x^2} > x+|x|$ et $x+\sqrt{1+x^2} > 0$, d'où : $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}$

Puis :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

La dérivée g' est paire et $g(0) = 0$, on en déduit que g est impaire, ce qui peut se voir directement en remarquant que $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}-x} = \sqrt{1+x^2}+x$.

On a $x+\sqrt{1+x^2} \underset{(+\infty)}{\sim} 2x$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x} = +0$

b) La fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur lui-même. La représentation graphique se fait sans peine...

2. a) Quand t décrit $[0,\pi]$, $\cos t$ décrit $[-1,1]$ et $x+\cos t$ reste toujours positif si et seulement si $x \geq 1$.
Donc, $\forall x \in [1,+\infty[$, $t \mapsto \sqrt{x+\cos t}$ est définie mais aussi continue sur $[0,\pi]$. Son intégrale existe donc. et $\mathcal{D}_f = [1,+\infty[$.

b) Soient x et y tels que $1 \leqslant x \leqslant y$. La fonction racine étant croissante on a $\forall t \in [0,\pi]$, $\sqrt{x+\cos t} \leqslant \sqrt{y+\cos t}$. L'intégration sur $[0,\pi]$ conserve aussi l'inégalité et $f(x) \leqslant f(y)$.

$$f \text{ est croissante sur } [1,+\infty[$$

c) Il vient $f(1) = \displaystyle\int_0^{\pi} \sqrt{1+\cos t}\, dt = \int_0^{\pi} \sqrt{2\cos^2(t/2)}\, dt = \sqrt{2}\int_0^{\pi} \cos(t/2) dt$,

parce que $\frac{t}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \implies \cos\frac{t}{2} \geq 0$.

Donc :

$$f(1) = \sqrt{2}\big[2\sin(t/2)\big]_0^{\pi} = 2\sqrt{2}$$

d) $\forall\, x \in [1, +\infty[, \forall\, t \in [0, \pi],\ \sqrt{x-1} \leqslant \sqrt{x+\cos t} \leqslant \sqrt{x+1}$.

On en déduit par intégration sur $[0, \pi]$ que $\pi\sqrt{x-1} \leqslant f(x) \leqslant \pi\sqrt{x+1}$.

En particulier :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty,\ \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

3. a) Le changement de variable $u = \sqrt{2}\cos(t/2)$ donne $du = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(t/2)$, et :

$$I(h) = \int_0^{\pi} \frac{\sin\frac{t}{2}}{\sqrt{h + 2\cos^2\frac{t}{2}}}\, dt = -\frac{2}{\sqrt{2}}\int_{\sqrt{2}}^{0} \frac{du}{\sqrt{h+u^2}} = \sqrt{2}\int_0^{\sqrt{2}} \frac{du}{\sqrt{h}\sqrt{1+(\frac{u}{\sqrt{h}})^2}}.$$

Posons $X = \frac{u}{\sqrt{h}}$. Alors :

$$I(h) = \sqrt{2}\int_0^{\sqrt{\frac{2}{h}}} \frac{dX}{\sqrt{1+X^2}} = \sqrt{2}\Big[\ln(X + \sqrt{1+X^2})\Big]_0^{\sqrt{\frac{2}{h}}}$$

$$I(h) = \sqrt{2}\big(\ln(\sqrt{\frac{2}{h}} + \sqrt{1+\frac{2}{h}})\big)$$

b) En multipliant par la quantité conjuguée $\sqrt{x+\cos t} + \sqrt{1+\cos t}$, on obtient :

$$\sqrt{x+\cos t} - \sqrt{1+\cos t} = \frac{x-1}{\sqrt{x+\cos t} + \sqrt{1+\cos t}}.$$

On a $x > 1$; donc $x + \cos t > 1 + \cos t$ et par croissance de la fonction racine : $\sqrt{x+\cos t} > \sqrt{1+\cos t}$, puis

$$2\sqrt{x+\cos t} > \sqrt{x+\cos t} + \sqrt{1+\cos t} > 2\sqrt{1+\cos t}.$$

Il nous reste à passer à l'inverse et à diviser par $x - 1 > 0$:

$$\forall\, x > 1,\ \frac{1}{2\sqrt{x+\cos t}} \leqslant \frac{\sqrt{x+\cos t} - \sqrt{1+\cos t}}{x-1} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{1+\cos t}}.$$

c) Pour x voisin de 1, posons $x = 1 + h$, où $h \to 0$.

Il vient $x + \cos t = h + 2\cos^2\frac{t}{2}$. En intégrant les deux membres de la première des deux inégalités précédentes il vient :

$$\int_0^{\pi} \frac{dt}{2\sqrt{h + 2\cos^2(t/2)}} \leqslant \frac{f(x) - f(1)}{x-1}$$

Remarquons que $\forall\, t \in [0, \pi]$, $\sin\frac{t}{2} \leqslant 1$. On a donc :

$$\frac{1}{2}I(h) \leqslant \int_0^{\pi} \frac{dt}{2\sqrt{h+2\cos^2(t/2)}} \leqslant \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

D'après l'expression trouvée en 3. a), on a : $\lim\limits_{h\to 0} I(h) = +\infty$, d'où :

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = +\infty$$

Ce qui veut dire que f n'est pas dérivable en 1, la représentation graphique admettant au point $(1, 2\sqrt{2})$ une demi-tangente verticale.

Exercice 1.16.

On note E l'ensemble des fonctions f de classe C^1 sur $[0,1]$ telles que l'on ait de plus $f(0) = f(1) = 0$.

Soit f un élément de E.

1. Montrer que $g : x \mapsto \dfrac{f(x)}{\sin(\pi x)}$ est prolongeable par continuité en 0 et en 1.

2. Montrer que l'intégrale $I(f) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} f(x)f'(x)\,dx$ est convergente.

3. Montrer que $I(f) = \dfrac{\pi}{2}\displaystyle\int_0^1 \frac{f^2(x)}{\sin^2 \pi x}\,dx$.

4. En déduire que

$$\int_0^1 f'^2(x)\,dx \geq \pi^2 \int_0^1 f^2(x)\,dx$$

5. Déterminer les fonctions f de E pour lesquelles l'inégalité précédente est une égalité.

Solution :

1. Au voisinage de 0, $g(x) \sim \dfrac{f(x)}{\pi x}$. Or $f(0) = 0$ et f dérivable entraînent que :

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\pi x} = \frac{1}{\pi} \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{f'(0)}{\pi}.$$

De même $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = -\dfrac{f'(1)}{\pi}$.

2. Posons $h(x) = \dfrac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} f(x)f'(x)$, on a $h(x) = g(x)\cos(\pi x)f'(x)$, qui est le produit de trois fonctions continues sur $]0,1[$ et est prolongeable par continuité en 0 et en 1. L'intégrale proposée existe donc.

3. Soit $0 < \varepsilon < a < 1$. Effectuons une intégration par parties, il vient :

$$\int_\varepsilon^a \frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} \times f(x) f'(x)\, dx = \Big[\frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} \times \frac{f^2(x)}{2}\Big]_\varepsilon^a + \frac{\pi}{2}\int_\varepsilon^a \frac{1}{\sin^2(\pi x)}\, f^2(x)\, dx$$

et, par passage à la limite :

$$I = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{f^2(x)}{\sin^2(\pi x)} dx = \frac{\pi}{2}\int_0^1 g^2(x)\, dx$$

4. On sait, par positivité de l'intégrale que $\displaystyle\int_0^1 \big(\frac{\pi\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} f(x) - f'(x)\big)^2 dx \geq 0$.

En développant cette dernière expression, il vient

$$\int_0^1 \big(\frac{\pi^2\cos^2(\pi x)}{\sin^2(\pi x)} f^2(x) - 2\frac{\pi\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} f(x) f'(x) + f'^2(x)\big)\, dx \geq 0$$

et, en utilisant la question précédente :

$$\int_0^1 f'^2(x)\, dx \geq \int_0^1 \big(-\frac{\pi^2\cos^2(\pi x)}{\sin^2(\pi x)} f^2(x) + \pi^2 \frac{f^2(x)}{\sin^2(\pi x)}\big) dx$$

Donc :

$$\int_0^1 f'^2(x) dx \geq \int_0^1 \pi^2 f^2(x) \frac{1-\cos^2(\pi x)}{\sin^2(\pi x)}\, dx = \pi^2 \int_0^1 f^2(x)\, dx$$

5. Par continuité de la fonction considérée, cette inégalité est une égalité si et seulement si $\big(\frac{\pi\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} f(x) - f'(x)\big)^2$ est la fonction nulle, soit :

$$f'(x) = f(x)\frac{\pi\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} \text{ ou encore } \frac{d}{dx}\big(\frac{f(x)}{\sin(\pi x)}\big) = 0$$

Soit :

$$f(x) = \lambda \sin(\pi x), \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

Exercice 1.17.

Soit α un réel tel que $\alpha > 1$. On pose

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-x} dx$$

1. Vérifier l'existence de $\Gamma(\alpha)$.

2. On pose $S(\alpha) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^\alpha}$

Montrer que : $\Gamma(\alpha) S(\alpha) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(n+1)t}\, t^{\alpha-1} dt$.

3. Pour k entier naturel, on pose, sous réserve de convergence :

$$I(k) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(k+1)t}\, \frac{t^{\alpha-1}}{1-\mathrm{e}^{-t}}\, dt$$

a) Montrer que l'intégrale $I(k)$ est bien convergente.

b) En partageant l'intervalle d'intégration en deux, à l'aide de la borne intermédiaire $\frac{1}{\sqrt{k}}$, montrer que $\lim\limits_{k\to+\infty} I(k) = 0$.

4. Pour $k \geq 1$, montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, \frac{t^{\alpha-1}}{1-\mathrm{e}^{-t}}\, dt = \sum_{n=0}^{k-1} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(n+1)t}\, t^{\alpha-1} dt + I(k)$$

En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, \frac{t^{\alpha-1}}{1-\mathrm{e}^{-t}}\, dt$ en fonction de $\Gamma(\alpha)$ et $S(\alpha)$.

Solution :

1. Comme $\alpha > 1$, la fonction $h : t \to x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.
Au voisinage de $+\infty$, on sait que $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2 h(t) = 0$, ce qui assure l'existence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} h(t)\, dt$ donc aussi de $\displaystyle\int_0^{+\infty} h(t)\, dt$.

2. La série définissant $S(\alpha)$ est convergente puisque $\alpha > 1$. On a :

$$\Gamma(\alpha) \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(n+1)^\alpha} = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(n+1)^\alpha} \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-t} dt = \sum_{n=0}^{N} I_n$$

avec, par le changement de variable $t = (n+1)u$:

$$I_n = \frac{1}{(n+1)^\alpha} \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-t}\, dt = \int_0^{+\infty} u^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-(n+1)u}\, du$$

Donc, en faisant tendre N vers l'infini :

$$\Gamma(\alpha)S(\alpha) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} u^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-(n+1)u}\, du$$

3. a) La fonction $f_k : t \mapsto \mathrm{e}^{-(k+1)t} \dfrac{t^{\alpha-1}}{1-\mathrm{e}^{-t}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\star$ Au voisinage de 0, on a $1 - \mathrm{e}^{-t} \sim t$, donc $f_k(t)$ est équivalent à $t^{\alpha-2}$ et l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^{\alpha-2}\, dt$ converge puisque $\alpha > 1$ et $\displaystyle\int_0^1 f_k(t)\, dt$ converge.

$\star$ On a : $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2 f_k(t) = 0$, ce qui assure l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_k(t)\, dt$.

l'intégrale définissant $I(k)$ est bien convergente

b) Posons $I_k = L_k + J_k$, avec :

$$L_k = \int_0^{1/\sqrt{k}} f_k(t)\,dt, \text{ et } J_k = \int_{1/\sqrt{k}}^{+\infty} f_k(t)\,dt$$

• Pour $t \geq \frac{1}{\sqrt{k}}$, on a $\mathrm{e}^{-kt} \leq \mathrm{e}^{-\sqrt{k}}$, et :

$$0 \leqslant J_k \leqslant \mathrm{e}^{-\sqrt{k}} \int_{1/\sqrt{k}}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \frac{t^{\alpha-1}}{1-\mathrm{e}^{-t}}\,dt \leqslant \mathrm{e}^{-\sqrt{k}} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \frac{t^{\alpha-1}}{1-\mathrm{e}^{-t}} dt = C.\mathrm{e}^{-\sqrt{k}}$$

Donc $\lim\limits_{k\to+\infty} J_k = 0$.

• En ce qui concerne L_k, on sait que, pour tout $k \geq 1$, $0 \leqslant f_k(t) \leqslant \mathrm{e}^{-t} \frac{t^{\alpha-1}}{1-\mathrm{e}^{-t}}$.

Comme l'intégrale $\int_0^{1/\sqrt{k}} \mathrm{e}^{-t} \frac{t^{\alpha-1}}{1-\mathrm{e}^{-t}} dt$ est convergente, il vient $\lim\limits_{k\to+\infty} L_k = 0$.

$$\lim_{k\to\infty} I(k) = 0$$

4. On sait que, pour $t > 0$:

$$\sum_{n=0}^{k-1} \mathrm{e}^{-nt} = \frac{1-\mathrm{e}^{-kt}}{1-\mathrm{e}^{-t}}$$

Ceci permet d'écrire :

$$\sum_{n=0}^{k-1} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(n+1)t} t^{\alpha-1} dt = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \frac{t^{\alpha-1}}{1-\mathrm{e}^{-t}} dt - \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(k+1)t} \frac{t^{\alpha-1}}{1-\mathrm{e}^{-t}} dt$$

Soit, en faisant tendre k vers l'infini :

$$\Gamma(\alpha)S(\alpha) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \frac{t^{\alpha-1}}{1-\mathrm{e}^{-t}}\,dt$$

Exercice 1.18.

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle positive telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n)^{1/n} = \lambda \in \mathbb{R}^+$.

1. On suppose dans cette question que $\lambda < 1$.

Montrer qu'il existe $\alpha \in]0,1[$ et $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq N$, on a $u_n \leqslant \alpha^n$.

En déduire la nature de la série de terme général u_n.

2. On suppose dans cette question que $\lambda > 1$. Montrer que la série $\sum u_n$ diverge.

3. Peut-on obtenir la nature de la série $\sum u_n$ lorsque $\lambda = 1$?

4. Étudier la nature des séries suivantes :

a) $\sum_{n\geq 0} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^n$

b) $\sum_{n\geq 1} (\ln n)^{1-n^2}$

5. Soit (v_n) une suite de réels strictement positifs telle que $\lim_{n\to+\infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} = \lambda \in \mathbb{R}^+$.

Montrer que $\lim_{n\to+\infty} (v_n)^{1/n} = \lambda$.

Si (v_n) est une suite de réels strictement positifs telle que $\lim_{n\to+\infty} (v_n)^{1/n} = \lambda \in \mathbb{R}^+$, a-t-on toujours $\lim_{n\to+\infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} = \lambda$?

Solution :

1. On suppose que $\lambda < 1$. Soit α tel que $\lambda < \alpha < 1$. Comme $\lim_{n\to+\infty} (u_n)^{1/n} = \lambda$, il existe N tel que si $n \geq N$, alors $0 < (u_n)^{1/n} \leqslant \alpha$.
Donc, à partir du rang N, $0 < u_n \leqslant \alpha^n$.

La série $\sum \alpha^n$ est géométrique convergente et la série $\sum u_n$également par le théorème de comparaison.

2. Si $\lim_{n\to+\infty} (u_n)^{1/n} = \lambda > 1$. Il existe N tel que pour $n \geq N$, on a $(u_n)^{1/n} \geq 1$, donc $u_n \geq 1$.

La série $\sum u_n$ diverge puisque son terme général ne tend pas vers 0.

3. Pour $\lambda = 1$, on ne peut conclure. En effet, soit α réel quelconque et $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$.

Alors $(u_n)^{1/n} = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}(-\alpha \ln n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$, puisque $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$.

Or $\sum \frac{1}{n}$ diverge et $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, il n'y a donc pas de résultat général.

4. a) On a : $(u_n)^{1/n} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \to 0$.

donc $\sum u_n$ converge.

b) On a :

$(u_n)^{1/n} = (\ln n)^{1/n-n} = \mathrm{e}^{(1/n-n)\ln(\ln n)} = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln(\ln n)} \mathrm{e}^{-n\ln(\ln n)} \sim \mathrm{e}^{-n\ln(\ln(n))}$

donc $\lim_{n\to\infty} (u_n)^{1/n} = 0$ et $\sum u_n$ converge.

5. ⋆ Supposons $\lambda > 0$. Alors $\lim_{n\to+\infty} \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \ln(\lambda) = \mu$.

En revenant à la définition de la limite, on obtient

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} [\ln(u_{k+1}) - \ln(u_k)] = \mu$$

Soit $\frac{1}{n}[\ln(u_n) - \ln(u_0)] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu$, ou encore $\frac{1}{n}\ln(u_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu$ et donc

$$\lim_{n\to\infty} (u_n)^{1/n} = \mathrm{e}^{\mu} = \lambda$$

⋆ Le raisonnement est identique dans le cas où $\lambda = 0$.

La réciproque est fausse. Par exemple, définissons (u_n) par

$$\begin{cases} u_{2n} = 2^{\sqrt{n}} \\ u_{2n+1} = 3^{\sqrt{n}} \end{cases}$$

On vérifie aisément que $\lim_{n\to+\infty} u_n^{1/n} = 1$, mais que $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ n'existe pas.

Exercice 1.19.

Sous réserve d'existence, on pose $F(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t} dt$

1. Montrer que F est ainsi bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Montrer que F est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et calculer $F'(x)$ pour tout $x > 0$, où F' désigne la dérivée de la fonction F.

3. Déterminer les limites de F en 0 (à droite) et en $+\infty$.

4. Montrer qu'aux voisinages de $+\infty$ et de 0, on a $F(x) = o\big(\frac{1}{x}\big)$.

5. Sans chercher à calculer $F(x)$, montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} F(x)\, dx$ est bien définie et calculer cette intégrale.

Solution :

1. Soit $x > 0$. $t \to \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}$ est continue sur $[x, +\infty[$; de plus, au voisinage de $+\infty$, $\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t} = o(t^{-2})$. L'existence de $F(x)$ résulte alors de la règle de Riemann.

2. Pour tout $x > 0$, on écrit par exemple : $F(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t} dt - \int_1^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t} dt$; ainsi F est de classe C^1 et pour tout $x > 0$:

$$F'(x) = -\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$$

3. ⋆ Soit $x \in]0,1]$, alors :

$$F(x) = \int_x^1 \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,dt + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,dt \geq \int_x^1 \frac{\mathrm{e}^{-1}}{t}\,dt \geq -\mathrm{e}^{-1}\ln x$$

Donc $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x) = +\infty$.

⋆ Soit $x \geq 1$. Alors :

$$0 \leqslant F(x) \leqslant \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,dt = \mathrm{e}^{-x}$$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$.

4. ⋆ Pour tout $x > 0$, on a :

$$0 \leqslant xF(x) = \int_x^{+\infty} \frac{x.\mathrm{e}^{-t}}{t}\,dt \leqslant \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,dt = \mathrm{e}^{-x}$$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} xF(x) = 0$.

⋆ Pour tout $x \in]0,1]$, on a :

$$0 \leqslant xF(x) \leqslant x\int_x^1 \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,dt + xF(1) \leqslant x\int_x^1 \frac{dt}{t} + xF(1) = xF(1) - x\ln x$$

Donc $\lim\limits_{x\to 0} xF(x) = 0$.

5. Soit $0 < \varepsilon < M$. Alors en effectuant une intégration par parties, on a :

$$\int_\varepsilon^M F(x)\,dx = \Big[xF(x)\Big]_\varepsilon^M + \int_\varepsilon^M \mathrm{e}^{-x}dx$$

D'où :

$$\int_\varepsilon^M F(x)\,dx = M.F(M) - \varepsilon.F(\varepsilon) - \mathrm{e}^{-M} + \mathrm{e}^{-\varepsilon}$$

qui tend vers 1 quand $M \to +\infty$ et $\varepsilon \to 0$. D'où l'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} F(x)\,dx$, avec :

$$\int_0^{+\infty} F(x)\,dx = 1$$

2

ALGÈBRE

Exercice 2.1.

Soit $\mathcal{B}$ l'ensemble des suites complexes indexées par $\mathbb{N}$ et bornées.

1. Montrer que $\mathcal{B}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ de toutes les suites complexes.

2. Pour toute suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ élément de $\mathcal{B}$, on note $T(u)$ la suite définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, [T(u)]_n = u_{n+1}.$$

a) Montrer qu'on définit ainsi une application $T : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$, et que cette application est linéaire.

b) Déterminer le noyau de T ; T est-elle injective ?

c) Déterminer l'image de T ; T est-elle surjective ?

3. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que λ soit une valeur propre de l'endomorphisme T, c'est-à-dire pour qu'il existe une suite u non nulle telle que $T(u) = \lambda u$. Préciser alors les vecteurs propres associés à la valeur propre λ.

4. Soit $S : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ une application linéaire telle que $T \circ S = Id_{\mathcal{B}}$.

a) Montrer que $S \circ T$ est un projecteur, vérifiant :

$$\mathrm{Ker}(S \circ T) = \mathrm{Ker}\, T \text{ et } \mathrm{Im}(S \circ T) = \mathrm{Im}\, S.$$

b) Que peut-on dire de l'injectivité et/ou de la surjectivité de l'application S ?

c) Montrer, par un exemple, qu'il existe effectivement une application linéaire $S : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ telle $T \circ S = Id_{\mathcal{B}}$.

Solution :

1. La suite nulle est bornée et toute combinaison linéaire de suites bornées est bornée, donc

$$\mathcal{B} \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{C}^{\mathbb{N}}.$$

2. a) Si u est bornée, il en est de même de la suite $T(u) = (u_n)_{n\geq 1}$ et la linéarité de T est immédiate :

$$T \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$$

b) $T(u) = 0$ si et seulement si $(u_n)_{n\geq 1}$ est la suite nulle, donc le noyau de T est formé des suites nulles à partir du rang 1. Cet espace est la droite engendrée par la suite δ définie par $\delta_0 = 1$ et $\delta_n = 0$ pour $n \geq 1$. En particulier T n'est pas injective.

c) Soit $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée quelconque.

Considérons alors la suite u définie par : $u_0 = 0$ et $\forall\, n \geq 1, u_n = v_{n-1}$. La suite u est bornée et vérifie $T(u) = v$, ce qui prouve que T est surjective.

3. $T(u) = \lambda.u$ signifie : $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \lambda u_n$, ce qui caractérise les suites géométriques de raison λ. On distingue alors deux cas :

$\star$ Si $|\lambda| \leq 1$, toute suite géométrique de raison λ est bornée, donc λ est valeur propre de T et le sous-espace propre associé est la droite engendrée par la suite $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$\star$ Si $|\lambda| > 1$, la seule suite géométrique de raison λ bornée est la suite nulle et λ n'est pas valeur propre de T.

4. a) $\star$ $(S \circ T) \circ (S \circ T) = S \circ (T \circ S) \circ T = S \circ Id \circ T = S \circ T$ et comme $S \circ T$ est linéaire :

$$S \circ T \text{ est un projecteur de } \mathcal{B}$$

$\star$ $\mathrm{Ker}(T) \subset \mathrm{Ker}(S \circ T)$ et $\mathrm{Im}(S \circ T) \subset \mathrm{Im}\, S$ sont des inclusions universelles banales.

$\star$ On a donc aussi :

$\mathrm{Ker}(S \circ T) \subset \mathrm{Ker}(T \circ (S \circ T)) = \mathrm{Ker}((T \circ S) \circ T) = \mathrm{Ker}(T)$ et

$\mathrm{Im}\, S = \mathrm{Im}(S \circ (T \circ S)) = \mathrm{Im}((S \circ T) \circ S) \subset \mathrm{Im}(S \circ T)$

et finalement, par double inclusion :

$$\mathrm{Ker}(S\circ T)=\mathrm{Ker}(T);\mathrm{Im}(S\circ T)=\mathrm{Im}(S)$$

b) $id=T\circ S$ est injective, donc S est injective.
$\mathrm{Im}(S)=\mathrm{Im}(S\circ T)$ et comme $S\circ T$ est un projecteur, $\mathrm{Im}(S)$ est un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(S\circ T)$ qui contient la suite δ, donc $\mathrm{Ker}(S\circ T)\neq\{0\}$ et $\mathrm{Im}(S)\neq\mathcal{B}$, donc :

$$S \text{ est injective non surjective}$$

c) On vérifie facilement que l'application $S:v\mapsto u$ définie en 2.c) est bien un endomorphisme de $\mathcal{B}$ et convient.

Exercice 2.2.

Soit n un entier naturel non nul. On note $E=\mathbb{R}_n[X]$ et on considère l'application de φ de E^2 dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(P,Q)=\int_0^{+\infty}P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}dt$$

1. Montrer que φ est bien définie, puis montrer que c'est un produit scalaire sur E. On pose $\|P\|=\sqrt{\varphi(P,P)}$.

2. Soit T le polynôme défini par $T(X)=1+\dfrac{X^n}{n!}$. Calculer $\|T\|$.

On pose $I=\dfrac{T}{\|T\|}$

3. On définit l'application θ qui à tout polynôme P de E associe $2\varphi(P,I)I-P$.

a) Montrer que θ est un automorphisme de E et déterminer θ^{-1}.

b) Montrer que pour tout P de E : $\|\theta(P)\|=\|P\|$.

c) Quelles sont les valeurs propres possibles de θ ?

d) θ est-il diagonalisable ?

Solution :

1. $\star$ La fonction $t\mapsto P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et comme P et Q sont polynomiales, on sait que $\lim\limits_{t\to+\infty}t^2.P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}=0$, donc la fonction à intégrer est négligeable devant t^{-2} au voisinage de $+\infty$, ce qui prouve que l'intégrale définissant $\varphi(P,Q)$ est convergente.

$\star$ φ est clairement symétrique, bilinéaire et positive.

$\star$ $\varphi(P,P)=0$ s'écrit $\displaystyle\int_0^{+\infty} P^2(t)\mathrm{e}^{-t}\,dt=0$ et par continuité et positivité de la fonction à intégrer, cela donne également $\displaystyle\int_0^{1} P^2(t)\mathrm{e}^{-t}\,dt=0$ et donc :

$$\forall\, t\in[0,1], P^2(t)\mathrm{e}^{-t}=0 \ \textit{i.e.}\ \forall\, t\in[0,1], P(t)=0$$

Ainsi, le polynôme P a une infinité de racines et est le polynôme nul.

$$\varphi \text{ est un produit scalaire sur } \mathbb{R}_n[X]$$

2. $\displaystyle\|T\|^2=\int_0^{+\infty}(1+\frac{t^n}{n!})^2\mathrm{e}^{-t}dt=\int_0^{+\infty}(1+\frac{2t^n}{n!}+\frac{t^{2n}}{(n!)^2})\mathrm{e}^{-t}dt$

On sait que pour tout k de $\mathbb{N}$, on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^k\mathrm{e}^{-t}\,dt=k!$, d'où :

$$\|T\|^2=1+\frac{2.n!}{n!}+\frac{(2n)!}{(n!)^2}=3+\binom{2n}{n} \text{ et } \|T\|=\sqrt{3+\binom{2n}{n}}$$

3. a) $\star$ La linéarité de φ par rapport au premier argument et les propriétés des opérations montrent que θ est linéaire et pour $P\in\mathbb{R}_n[X]$, on a $\theta(P)\in\mathbb{R}_n[X]$.

$\star$ Si P est tel que $\theta(P)=0$, on a $P=2\varphi(P,I)I$ de la forme kI.
Or $\theta(kI)=k\theta(I)=k(2\varphi(I,I)I-I)$ et comme $\varphi(I,I)=\|I\|^2=1$, il reste $\theta(kI)=kI$ et $\theta(kI)=0 \implies k=0$.
Donc θ est injectif et comme θ est un endomorphisme d'un espace de dimension finie $(n+1)$:

$$\theta\in GL(\mathbb{R}_n[X])$$

$\star$ Posons $Q=\theta(P)=2\varphi(P,I)I-P$; on a :

$$\varphi(Q,I)=2\varphi(P,I)\|I\|^2-\varphi(P,I)=\varphi(P,I)$$

et donc : $P=2\varphi(Q,I)-Q=\theta(Q)$, soit : $\theta^{-1}=\theta$.

b) $\|\theta(P)\|^2=\|2\varphi(P,I)I-P\|^2=4\varphi(P,I)^2\|I\|^2+\|P\|^2-4\varphi(P,I)\varphi(I,P)$
Soit :

$$\|\theta(P)\|^2=\|P\|^2, \textit{i.e.}\ \|\theta(P)\|=\|P\|$$

c) On a $\theta^2=Id$, donc θ est une symétrie (d'ailleurs orthogonale) et les valeurs propres possibles de θ sont -1 et 1.

d) $\star$ $\theta(P)=P$ s'écrit $2\varphi(P,I)=2P$ ce qui a lieu si et seulement si P est colinéaire à I :

$$E_{(1)}(\theta)=\mathrm{Vect}(I), \text{ espace de dimension } 1$$

$\star$ $\theta(P)=-P$ s'écrit $\varphi(P,I)=0$, donc $E_{(-1)}(\theta)$ est le supplémentaire orthogonal de $E_{(1)}(\theta)$.

Donc θ est diagonalisable.

Exercice 2.3.

1. Justifier la convergence de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(x)\mathrm{e}^{-x^2}dx$$

pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$.

2. On pose $E = \mathbb{R}[X]$ (on pourra identifier E à l'ensemble des fonctions polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$). Pour P et Q éléments de E, on pose :

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)Q(x)\,\mathrm{e}^{-x^2}dx$$

Montrer qu'on définit ainsi un produit scalaire sur E. On notera $\|\,.\,\|$ la norme associée.

3. Pour tout entier naturel n, on considère l'application P_n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout réel x par :

$$P_n(x) = \mathrm{e}^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}(\mathrm{e}^{-x^2})$$

où $\frac{d^n}{dx^n}(\mathrm{e}^{-x^2})$ désigne la dérivée d'ordre n au point x de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$.

a) Calculer P_0, P_1, P_2 et P_3.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Établir pour tout x réel la relation :

$$P_{n+1}(x) = -2xP_n(x) - 2nP_{n-1}(x)$$

c) Montrer que, pour tout entier naturel n, P_n est une fonction polynomiale dont on précisera, en fonction de n, le degré, la parité et le coefficient du terme de plus haut degré.

d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Établir, pour tout réel x, la relation :

$$P_n'(x) = -2nP_{n-1}(x)$$

4. a) Montrer que, pour $(p, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$: $\quad\langle P_p, P_q\rangle = 2q\langle P_{p-1}, P_{q-1}\rangle$.

b) Montrer que la famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthogonale de E.

c) Calculer $\lambda_n = \|P_n\|$.

d) En déduire une famille orthonormale de E.

Solution :

1. La fonction à intégrer est continue sur $\mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^2.P(x)\,\mathrm{e}^{-x^2} = 0$, ce qui prouve la convergence de l'intégrale proposée, tant pour la borne $-\infty$ que pour la borne $+\infty$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(x)\,\mathrm{e}^{-x^2}dx \text{ converge}$$

2. $\star$ On a clairement pour tous polynômes et tout scalaire :

$$\langle P,Q\rangle = \langle Q,P\rangle \text{ et } \langle P_1+\lambda P_2,Q\rangle = \langle P_1,Q\rangle + \lambda\langle P_2,Q\rangle$$

$\star$ $\langle P,P\rangle \geq 0$ et $\langle P,P\rangle = 0 \iff \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P^2(x)\mathrm{e}^{-x^2}\,dx = 0$, d'où par positivité de la fonction à intégrer $\displaystyle\int_6^8 P^2(x)\mathrm{e}^{-x^2}\,dx = 0$ et par positivité et continuité :

$$\forall\, x\in[6,8], P^2(x)\mathrm{e}^{-x^2} = 0, \textit{ i.e. } P(x) = 0$$

et P a une infinité de zéros, donc est le polynôme nul.

$$\langle .,.\rangle \text{ est un produit scalaire sur } E$$

3. a) Soit $\varphi : x\mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$. On a :

$\varphi'(x) = -2x.\mathrm{e}^{-x^2}, \varphi''(x) = (4x^2-2)\mathrm{e}^{-x^2}, \varphi'''(x) = (-8x^3+12x)\mathrm{e}^{-x^2}$

d'où :

$$P_0 = 1, P_1 = -2X, P_2 = 4X^2-2, P_3 = -8X^3+12X$$

b) On a $\varphi'(x) = -2x\varphi(x)$, donc en dérivant n fois, et grce à la formule de Leibniz :

$$\varphi^{(n+1)}(x) = -2x\varphi^{(n)}(x) + n(-2)\varphi^{(n-1)}(x)$$

soit, en multipliant par e^{x^2} :

$$\forall\, x\in\mathbb{R}, P_{n+1}(x) = -2xP_n(x) - 2nP_{n-1}(x)$$

c) Il est facile de montrer, par récurrence, et grce à la relation précédente que :

→ Pour tout n, P_n est un polynôme de degré exactement n.
→ Le coefficient dominant de P_n est $(-2)^n$.
→ Si n est pair, P_n est un polynôme pair et si n est impair, P_n est un polynôme impair.

d) On a $\varphi^{(n)}(x) = P_n(x)\mathrm{e}^{-x^2}$, donc : $\varphi^{(n+1)}(x) = (P_n'(x) - 2xP_n(x))\mathrm{e}^{-x^2}$, soit :

$$P_{n+1}(x) = P_n'(x) - 2xP_n(x)$$

et en comparant avec le résultat obtenu en 3.b) :

$$P_n'(x) = -2nP_{n-1}(x)$$

4. a) On a :

$$\langle P_p, P_q\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P_p(x)P_q(x)\mathrm{e}^{-x^2}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} P_q(x)\varphi^{(p)}(x)\,dx$$

On intègre par parties, en dérivant P_q en $-2qP_{q-1}$ et en « primitivant » $\varphi^{(p)}$ en $\varphi^{(p-1)}$. On a $P_q(x)\varphi^{(p-1)}(x) = P_q(x)P_{p-1}(x)\mathrm{e}^{-x^2}$ qui est de limite nulle, tant en $-\infty$ qu'en $+\infty$, ce qui autorise à faire cette intégration par parties directement avec les bornes infinies, ce qui donne :

$$\langle P_p, P_q\rangle = 2q\int_{-\infty}^{+\infty} P_{q-1}(x)P_{p-1}(x)\mathrm{e}^{-x^2}dx = 2q\langle P_{p-1}, P_{q-1}\rangle$$

b) En permutant les rôles de p et q, on a donc aussi : $\langle P_q, P_p\rangle = 2p\langle P_{q-1}, P_{p-1}\rangle$ et pour $p \neq q$ dans $\mathbb{N}^*$, on a donc $\langle P_{q-1}, P_{p-1}\rangle = 0$:

$$(P_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une famille orthogonale}$$

c) On a, par le résultat 4. a) : $\|P_n\|^2 = 2n\|P_{n-1}\|^2$, soit en glissant :

$$\|P_n\|^2 = 2^n n!\|P_0\|^2$$

Or $\|P_0\|^2 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$ (intégrale de référence) et donc :

$$\lambda_n = \|P_n\| = 2^{n/2}\pi^{1/4}\sqrt{n!}$$

d) $\left(\frac{1}{\lambda_n}P_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthonormée de E.

Exercice 2.4.

Soit n un entier naturel tel que $n \geq 3$. A tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, on associe le polynôme $\varphi(P)$ défini par :

$\varphi(P)(X) = aP(X+2) + bP(X+1) + cP(X)$, a, b et c étant des réels fixés.

1. a) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Montrer que φ bijectif $\iff a+b+c \neq 0$.

c) Montrer que :

$$\forall\, P \in \mathbb{R}_n[X], \varphi(P)(X) = (a+b+c)P(X) + \sum_{k=1}^{n} \frac{a2^k + b}{k!}\, P^{(k)}(X)$$

2. On suppose dans cette question $a+b+c = 0$.

a) Montrer que $\mathbb{R}_0[X] \subset \operatorname{Ker}\varphi$ et $\operatorname{Im}\varphi \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

b) A quelle condition, portant sur a, b et c, a-t-on $\operatorname{Im}\varphi = \mathbb{R}_{n-1}[X]$? Que vaut $\operatorname{Ker}\varphi$ dans ce cas ?

c) Montrer que si $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, on a $\mathbb{R}_{n-2}[X] \subset \operatorname{Im}\varphi$ et $\operatorname{Ker}\varphi \subset \mathbb{R}_1[X]$. Quand a-t-on égalité ?

d) Montrer que φ n'a pas d'autre valeur propre que 0. L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

3. On suppose dans cette question $a+b+c \neq 0$.

a) Montrer que : λ valeur propre de $\varphi \implies \lambda = a+b+c$.

b) Montrer que $a+b+c$ est effectivement valeur propre de φ et déterminer le sous-espace propre associé.

c) φ est-il diagonalisable ?

Solution :

1. a) Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, alors $\varphi(P)$ est combinaison linéaire d'éléments de $\mathbb{R}_n[X]$, donc appartient encore à cet espace.
La linéarité de φ résulte des propriétés des opérations, donc :

$$\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$$

b) Si $P = a_k X^k + a_{k-1}X^{k-1} + \cdots$, alors des calculs simples donnent :

$$\varphi(P) = (a+b+c)a_k X^k + \cdots$$

$\star$ Si $a+b+c \neq 0$, φ conserve le degré et est donc un isomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

$\star$ Si $a+b+c = 0$, alors l'image par φ de tout polynôme constant est le polynôme nul et φ n'est pas injectif, donc pas bijectif.

c) La formule de Taylor permet d'écrire :

$$P(X+2) = \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!} P^{(k)}(X),\ P(X+1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} P^{(k)}(X)$$

donc :

$$\varphi(P)(X) = (a+b+c)P(X) + \sum_{k=1}^{n} \frac{a.2^k + b}{k!} P^{(k)}(X)$$

2. On a donc ici : $\varphi(P)(X) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a.2^k + b}{k!} P^{(k)}(X)$

a) On a déjà vu que le noyau de φ contient les polynômes constants et $\varphi(P)$ est combinaison linéaire des polynômes $P', \ldots, P^{(n)}$, donc est de degré inférieur ou égal à 1 :

$$\mathbb{R}_0[X] \subset \operatorname{Ker}\varphi \text{ et } \operatorname{Im}\varphi \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$$

b) On a $\varphi(P) = (2a+b)P' + \sum_{k=2}^{n} \frac{a.2^k + b}{k!} P^{(k)}(X)$, ainsi :

$\varphi(1) = 0$, $\varphi(X) = 2a + b, \ldots, \varphi(X^k) = k(2a + b)X^{k-1} + \cdots$.
La matrice M de φ relativement à la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est donc strictement trigonale supérieure, la diagonale de M étant bordée de la sur-diagonale :

$$2a + b, 2(2a + b), \ldots, n(2a + b)$$

$\star$ Si $2a+b \neq 0$, la première colonne de M est nulle et les autres colonnes sont non nulles et forment une famille échelonnée de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, donc une base de cet espace et :

$$\operatorname{Im}\varphi = \mathbb{R}_{n-1}[X], \operatorname{Ker}\varphi = \mathbb{R}_0[X]$$

$\star$ Si $2a + b = 0$, alors la vue des colonnes de M montre que l'image de φ est contenue dans $\mathbb{R}_{n-2}[X]$.

c) $\star$ Si $2a + b \neq 0$, on sait que :

$$\mathbb{R}_{n-2}[X] \subset \mathbb{R}_{n-1}[X] = \operatorname{Im}\varphi \text{ et } \operatorname{Ker}\varphi = \mathbb{R}_0[X] \subset \mathbb{R}_1[X]$$

$\star$ Si $2a+b = 0$, alors $\varphi(P)(X) = \dfrac{4a+b}{2}P''(X)+\cdots$ et on a $4a+b \neq 0$ (sinon on aurait $a = b = 0$, ce qui est exclu dans cette question).
La matrice M de φ est alors trigonale supérieure, de diagonale nulle, bordée d'une sur-diagonale nulle elle-même bordée d'une sur-diagonale de terme générique $\dfrac{4a+b}{2}\,k(k-1)$ non nul.
La vision des colonnes de M montre alors que $\operatorname{Im}\varphi = \mathbb{R}_{n-2}[X]$ et $\operatorname{Ker}\varphi = \mathbb{R}_1[X]$.

d) M est trigonale supérieure, donc ses valeurs propres se lisent dans sa diagonale : seul 0 est valeur propre et φ est diagonalisable si et seulement si $M = 0$, ce qui impose $a = b = c = 0$.

3. a) et b) Maintenant la matrice M de φ est trigonale supérieure de termes diagonaux tous égaux à $a + b + c$, donc :

$$\operatorname{Spec}(\varphi) = \{a + b + c\}$$

et $\varphi(P) = (a + b + c)P \iff \sum_{k=1}^{n} \dfrac{a.2^k + b}{k!}P^{(k)}(X) = 0$. Soit en raisonnant comme dans la question précédente :

$\star$ Si $2a + b \neq 0$, $\varphi(P) = (a + b + c)P \iff P \in \mathbb{R}_0[X]$;

$\star$ Si $2a + b = 0$ et $4a + b \neq 0$, $\varphi(P) = (a + b + c)P \iff P \in \mathbb{R}_1[X]$;

$\star$ Si $a = b = 0$, alors $\varphi = c.id$ et tout polynôme non nul est propre.

c) φ n'admet qu'une valeur propre et est diagonalisable si et seulement si c'est une homothétie,donc si et seulement si $a = b = 0$.

Exercice 2.5.

Dans cet exercice, $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.

• Une matrice $M = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq 3} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est dite *stochastique* si pour tout $(i,j) \in [\![1,3]\!]^2$, $m_{i,j} \geq 0$ et si pour tout $i \in [\![1,3]\!]$, $m_{i,1} + m_{i,2} + m_{i,3} = 1$.

• Une matrice $M = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq 3} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est dite *déterministe* si elle est stochastique et si pour tout $(i,j) \in [\![1,3]\!]^2$, $m_{i,j} \in \{0,1\}$.

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^k pour $k \in \mathbb{N}$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $C_n(A) = \frac{1}{n+1}\big(\sum_{k=0}^{n} A^k\big)$. En discutant suivant le reste de la division euclidienne de n par 3, exprimer $C_n(A)$ en fonction de I_3, A, A^2 et n.

3. On note $C_n(A) = (c_{i,j}(n))_{1\leq i,j\leq 3}$. Pour $(i,j) \in [\![1,3]\!]^2$, déterminer la limite $c_{i,j}$ de $c_{i,j}(n)$ lorsque n tend vers $+\infty$. On pose $C = (c_{i,j})_{1\leq i,j\leq 3}$.

4. Les matrices A et C sont-elles stochastiques ? déterministes ?

5. Soit a (resp. c) l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice A (resp. C) dans la base canonique. Montrer que c est le projecteur sur $\mathrm{Ker}(a - Id)$ parallèlement à $\mathrm{Im}(a - Id)$.

Solution :

1. Si on note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$, A traduit dans cette base l'application linéaire telle que $e_1 \mapsto e_2 \mapsto e_3 \mapsto e_1$.
Donc A^2 traduit l'application linéaire telle que $e_1 \mapsto e_3 \mapsto e_2 \mapsto e_1$, A^3 traduit l'identité, et donc :

$$A^{3k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; A^{3k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} ; A^{3k+2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Comme $A^{3k} + A^{3k+1} + A^{3k+2}$ vaut $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, on obtient pour tout q de $\mathbb{N}$:

$\star\ C_{3q+2} = \frac{1}{3q+3}(\underbrace{J+J+\cdots+J}_{q+1 \text{ fois}}) = \frac{1}{3}J$

$\star\ C_{3q+1} = \frac{q}{3q+2}J + \frac{1}{3q+2}(I+A)$

$\star\ C_{3q} = \frac{q}{3q+1}J + \frac{1}{3q+1}I$

3. La convergence s'entendant terme à terme, les suites (C_{3q}), (C_{3q+1}) et (C_{3q+2}) sont convergentes de même limite $C = \frac{1}{3}J$.
Par exhaustion, on en déduit que la suite (C_n) converge vers C.

4. A est stochastique et déterministe, tandis que C est simplement stochastique.

5. On a $C^2 = \frac{1}{9}J^2 = \frac{1}{9}\times 3J = C$, donc c est bien un projecteur.
L'image de c est la droite engendrée par le vecteur $(1,1,1)$, tandis que le noyau de c est le plan d'équation $x+y+z=0$, donc le plan de base $((1,-1,0),(1,0,-1))$.
Or $A - I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et des calculs simples montrent que le noyau de $a - id$ est la droite engendrée par $(1,1,1)$ et que son image est engendrée par exemple par les premier et troisième vecteurs colonnes, donc est le plan d'équation $x+y+z=0$.

$$\operatorname{Ker} c = \operatorname{Im}(a-id) \text{ et } \operatorname{Im} c = \operatorname{Ker}(a-id)$$

d'où le résultat.

Exercice 2.6.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n et p un projecteur de E. On note r le rang de p.

Pour tout u appartenant à $\mathcal{L}(E)$, espace des endomorphismes de E, on pose :

$$G(u) = \frac{1}{2}(u\circ p + p\circ u)$$

1. Montrer que G est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$.

2. On pose $\mathcal{A} = \{u \in \mathcal{L}(E) \ / \ \operatorname{Im}(u) \subset \operatorname{Ker}(p) \text{ et } \operatorname{Im}(p) \subset \operatorname{Ker}(u)\}$.

a) Montrer que $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ et préciser la restriction de G à $\mathcal{A}$.

b) Montrer que $\mathcal{A}$ est isomorphe à l'espace vectoriel des endomorphismes de $\operatorname{Ker}(p)$ et en déduire sa dimension.

3. On définit :

$\mathcal{B} = \{u \in \mathcal{L}(E) \ / \ \mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Im}(p) \text{ et } \mathrm{Ker}(p) \subset \mathrm{Ker}(u)\}$

$\mathcal{C} = \{u \in \mathcal{L}(E) \ / \ \mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Im}(p) \text{ et } \mathrm{Im}(p) \subset \mathrm{Ker}(u)\}$

$\mathcal{D} = \{u \in \mathcal{L}(E) \ / \ \mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(p) \text{ et } \mathrm{Ker}(p) \subset \mathrm{Ker}(u)\}$.

a) Quel est l'effet de G sur chacun de ces sous-espaces ?

b) Montrer que $\mathcal{B}$ est isomorphe à l'espace des endomorphismes de $\mathrm{Im}(p)$, en déduire sa dimension.

c) Montrer que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont en somme directe. En déduire que $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont en somme directe.

Solution :

1. u et p étant des endomorphismes de E, il en est de même de $G(u)$, donc G est une application de $\mathcal{L}(E)$ dans lui-même.
Soit alors $u, v \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} G(u+\lambda v) &= \frac{1}{2}((u+\lambda v)\circ p + p\circ(u+\lambda v)) \\ &= \frac{1}{2}(u\circ p + \lambda v\circ p + p\circ u + \lambda p\circ v) = G(u) + \lambda G(v), \text{ et donc :} \\ &\qquad G \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(E)) \end{aligned}$$

2. a) $\star$ $\mathcal{A}$ est non vide, car contient l'endomorphisme nul ;

$\star$ Si $u \in \mathcal{A}$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$, on a $\mathrm{Im}(\lambda u) = \mathrm{Im}\, u \subset \mathrm{Ker}\, p$ et $\mathrm{Im}\, p \subset \mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Ker}(\lambda u)$, donc $\lambda u \subset \mathcal{A}$. Le résultat reste valide pour $\lambda = 0$.

$\star$ Si u et v appartiennent à $\mathcal{A}$:
$\rightarrow$ On a $\mathrm{Im}\, u \subset \mathrm{Ker}\, p$ et $\mathrm{Im}\, v \subset \mathrm{Ker}\, p$, d'où $\mathrm{Im}\, u + \mathrm{Im}\, v \subset \mathrm{Ker}\, p$. Comme $\mathrm{Im}(u+v) \subset \mathrm{Im}\, u + \mathrm{Im}\, v$, on a bien $\mathrm{Im}(u+v) \subset \mathrm{Ker}\, p$.
$\rightarrow$ On a $\mathrm{Im}\, p \subset \mathrm{Ker}\, u$ et $\mathrm{Im}\, p \subset \mathrm{Ker}\, v$, donc $\mathrm{Im}\, p \subset \mathrm{Ker}\, u \cap \mathrm{Ker}\, v \subset \mathrm{Ker}(u+v)$.
Bref, $u + v \in \mathcal{A}$ et finalement

$\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

Bien entendu, si $u \in \mathcal{A}$, on a $u \circ p = 0$ (car $\mathrm{Im}\, p \subset \mathrm{Ker}\, u$) et $p \circ u = 0$ (car $\mathrm{Im}\, u \subset \mathrm{Ker}\, p$), donc $G(u) = 0$:
La restriction de G à $\mathcal{A}$ est nulle.

b) A $u \in \mathcal{A}$ associons sa restriction à $\mathrm{Ker}\, p$. Comme $\mathrm{Im}\, u \subset \mathrm{Ker}\, p$, on a *a fortiori* $\mathrm{Im}(u_{|\,\mathrm{Ker}\, p}) \subset \ker p$ et on peut considérer cette restriction comme étant un endomorphisme de $\mathrm{Ker}\, p$.
On dispose ainsi d'une application $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{L}(\mathrm{Ker}\, p)$.

⋆ Si $\varphi(u) = 0$, la restriction de u à $\operatorname{Ker} p$ est nulle et comme la restriction de u à $\operatorname{Im} p$ est nulle (car $\operatorname{Im} p \subset \operatorname{Ker} u$), u est nulle sur deux sous-espaces supplémentaires ($\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$ sont supplémentaires, puisque p est un projecteur) et donc $u = 0$.

φ est injective.

⋆ Soit v un endomorphisme de $\operatorname{Ker} p$. Soit alors $u \in \mathcal{L}(E)$, dont la restriction à $\operatorname{Ker} p$ est v et dont la restriction à $\operatorname{Im} p$ est l'application nulle.
v est ainsi parfaitement définie (linéaire et restrictions à deux sous-espaces supplémentaires connues), d'image contenue dans $\operatorname{Ker} p$ et de noyau contenant $\operatorname{Im} p$.

φ est surjective

Ainsi φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels et si p est de rang r, on a $\dim \operatorname{Ker} p = n - r$, donc :

$$\dim \mathcal{A} = (n-r)^2$$

3. a) ⋆ Soit $u \in \mathcal{B}$.
Comme $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Im} p$, on a pour tout x de E, $p \circ u(x) = p\big(u(x)\big) = u(x)$ et comme $\operatorname{Ker} p \subset \operatorname{Ker} u$, on a $p(x) = 0 \implies u(x) = 0$. Donc :
Si $x \in \operatorname{Ker} p$, on a :

$$G(u)(x) = \frac{1}{2}\big(u(p(x)) + p(u(x))\big) = \frac{1}{2}\,p(u(x)) = \frac{1}{2}u(x) = 0 = u(x)$$

Si $x \in \operatorname{Im} p$, on a :

$$G(u)(x) = \frac{1}{2}\big(u(p(x)) + p(u(x))\big) = \frac{1}{2}(u(x) + u(x)) = u(x)$$

Ainsi $G(u)$ et u concident sur deux sous-espaces supplémentaires et donc $G(u) = u$.

$$u \in \mathcal{B} \implies G(u) = u$$

⋆ Soit $u \in \mathcal{C}$. On a $\operatorname{Im} p \subset \operatorname{Ker} u$, donc $u \circ p = 0$ et comme $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Im} p$, on a $p \circ u = u$, donc :

$$u \in \mathcal{C} \implies G(u) = \frac{1}{2}\,u$$

⋆ Soit $u \in \mathcal{D}$. On a $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} p$, donc $p \circ u = 0$ et $G(u) = \frac{1}{2}\,u \circ p$
Si $x \in \operatorname{Ker} p \subset \operatorname{Ker} u$, on a $G(u)(x) = 0 = u(x) = \frac{1}{2}\,u(x)$
Si $x \in \operatorname{Im} p$, on a $p(x) = x$ et $G(u)(x) = \frac{1}{2}\,u(x)$
Ainsi $G(u)$ et $\frac{1}{2}\,u$ concident sur deux sous-espaces supplémentaires et :

$$u \in \mathcal{D} \implies G(u) = \frac{1}{2}\,u$$

b) $\mathcal{B}$ est à $\mathcal{A}$ ce qu'est $id - p$ à p (car $id - p$ est le projecteur conjugué du projecteur p et l'image de l'un est le noyau de l'autre et réciproquement).

Comme le rang de $id - p$ vaut $n - \mathrm{rg}(p)$, il vient avec les notations de 2. b) :

$$\dim \mathcal{B} = (n - (n - r))^2 = r^2$$

c) $\star$ Si $u \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$, $\mathrm{Im}\, u$ est contenue à la fois dans $\mathrm{Ker}\, p$ et dans $\mathrm{Im}\, p$, donc $\mathrm{Im}\, u = \{0\}$ et $u = 0$, ce qui prouve que :

$$\mathcal{C} \text{ et } \mathcal{D} \text{ sont en somme directe}$$

$\star$ $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ et $\mathcal{C} \oplus \mathcal{D}$ sont inclus dans les sous-espaces propres de G respectivement associés aux valeurs propres $0, 1, 1/2$. Comme on sait que des sous-espaces propres associés à des valeurs propres différentes d'un endomorphisme sont toujours en somme directe, il en est *a fortiori* de même des espaces en question et finalement

$$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \text{ et } \mathcal{D} \text{ sont en somme directe.}$$

Exercice 2.7.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t} dt$ existe.

2. Montrer que l'application $x \mapsto \mathrm{e}^x \displaystyle\int_x^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t} dt$ est une fonction polynomiale de degré n à coefficients réels.

Soit n un entier naturel non nul fixé et soit φ l'application définie pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(P)(x) = \mathrm{e}^x \int_x^{+\infty} P(t) \mathrm{e}^{-t} dt$$

3. Dans la suite de cet exercice, on confond polynôme et fonction polynôme associée.

a) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Déterminer le noyau et l'image de φ.

c) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de φ.

Solution :

1. La fonction $t \mapsto t^n.\mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $[x, +\infty[$, positive au voisinage de $+\infty$ et négligeable au voisinage de $+\infty$ devant $t \mapsto t^{-2}$. La convergence de l'intégrale proposée en résulte.

2. Procédons à une intégration par parties dans l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} t^{n+1} \mathrm{e}^{-t}\, dt$:

$$u(t) = t^{n+1} \implies u'(t) = (n+1)t^n,\ v'(t) = \mathrm{e}^{-t} \impliedby v(t) = -\mathrm{e}^{-t}$$

Comme $\lim\limits_{+\infty} uv = 0$, on peut procéder à cette intégration par parties directement avec la borne infinie et :

$$\int_x^{+\infty} t^{n+1}\mathrm{e}^{-t}\,dt = \big[-t^{n+1}\mathrm{e}^{-t}\big]_x^{\to+\infty} + (n+1)\int_x^{+\infty} t^n\mathrm{e}^{-t}\,dt$$

$$\int_x^{+\infty} t^{n+1}\mathrm{e}^{-t}\,dt = x^{n+1}\mathrm{e}^{-x} + (n+1)\int_x^{+\infty} t^n\mathrm{e}^{-t}\,dt$$

En posant $P_n(x) = \mathrm{e}^x\displaystyle\int_x^{+\infty} t^n\mathrm{e}^{-t}\,dt$, on a donc :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, x \in \mathbb{R}, P_{n+1}(x) = x^{n+1} + (n+1)P_n(x)$$

Comme $P_0(x) = \mathrm{e}^x\displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}dt = 1$, une récurrence aisée montre que pour tout n, P_n est une fonction polynomiale à coefficients réels, de degré n et de coefficient dominant valant 1.

3. a) Le calcul fait en 2. peut se faire pour toute puissance et la « linéarité de l'intégration sous réserve de convergence » montre que $\varphi(P)$ appartient à $\mathbb{R}_n[X]$ et que l'application $P \mapsto \varphi(P)$ est linéaire :

$$\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$$

b) $\star$ Si $\varphi(P) = 0$, comme une exponentielle n'est jamais nulle, il reste :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \int_x^{+\infty} P(t)\mathrm{e}^{-t}\,dt = 0$$

En dérivant, il vient : $\forall\, x \in \mathbb{R}, -P(x)\mathrm{e}^{-x} = 0$, donc $\forall\, x \in \mathbb{R}, P(x) = 0$ et P est le polynome nul.

$$\operatorname{Ker}\varphi = \{0\} \text{ et } \varphi \text{ est injective}$$

$\star$ φ étant un endomorphisme d'un espace de dimension finie $n+1$, son injectivité impose sa bijectivité, et :

$$\operatorname{Im}\varphi = \mathbb{R}_n[X]$$

c) Soit P un polynôme propre associé à la valeur propre λ. On a :

$\varphi(P) = \lambda P$, soit : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^x\displaystyle\int_x^{+\infty} P(t)\mathrm{e}^{-t}dt = \lambda P(x)$, ou encore :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \int_x^{+\infty} P(t)\mathrm{e}^{-t}dt = \lambda.\mathrm{e}^{-x}P(x)$$

Par dérivation légitime, on en déduit :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, P(x)\mathrm{e}^{-x} = \lambda\mathrm{e}^{-x}(P'(x) - P(x))$$

ou encore :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \lambda P'(x) = (\lambda - 1)P(x)$$

Des raisons de degré montrent que si $\lambda \neq 1$, seul convient le polynôme nul, ce qui a été exclu par hypothèse, donc la seule valeur propre possible est $\lambda = 1$, qui donne $P' = 0$ et P polynôme constant.

Réciproquement, on vérifie que si P est un polynôme constant, on a $\varphi(P) = P$, donc :

$$\mathrm{Spec}(\varphi) = \{1\} \text{ et } E_{(1)}(\varphi) = \mathbb{R}_0[X]$$

Exercice 2.8.

Soit N une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et u l'élément de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé. On note I_3 la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. On suppose que $\mathrm{rg}(N) = 1$ et $N^2 = 0$.
Montrer l'existence d'une base (a, b, c) de $\mathbb{R}^3$ telle que :

$$a \notin \mathrm{Ker}(u),\ b = u(a),\ c \in \mathrm{Ker}(u)$$

En déduire que N est semblable à la matrice U_1 suivante :

$$U_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. On suppose que $\mathrm{rg}(N) = 2$, que $N^2 \neq 0$ et $N^3 = 0$. Montrer l'existence d'une base (a', b', c') de $\mathbb{R}^3$ telle que :

$$a' \notin \mathrm{Ker}(u),\ b' = u(a'),\ c' = u^2(a')$$

En déduire que N est semblable à $U_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

3. On considère la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$: $N = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

a) Calculer N^2, N^3 et en déduire que : $\inf\{k \in \mathbb{N},\ N^k = 0\} = \mathrm{rg}(N) + 1$.

b) On note $M = N^2 - N$ et $A = I_3 + N$.

i) Montrer que A est inversible et que : $A^{-1} = I_3 + M$.

ii) Montrer que les matrices M et N sont semblables (On pourra raisonner en fonction du rang de N.)

iii) En déduire que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

c) En déduire que si une matrice B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est semblable à une matrice du type :

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

alors elle est aussi semblable à son inverse B^{-1}.
Que pensez-vous de la réciproque ?

Solution :

1. On suppose $\text{rg}(N) = 1$ et $N^2 = 0$: ainsi u n'est pas l'endomorphisme nul et :

$$\exists\, a \in \mathbb{R}^3, a \notin \text{Ker}(u).$$

Soit $b = u(a)$, on a bien $b \in \text{Ker}(u)$, puisque $u^2 = 0$. Par le théorème du rang : $\dim(\text{Ker}(u)) = 2$, il existe donc $c \in \text{Ker}(u)$ tel que (b, c) forme une famille libre.
Montrons que (a, b, c) est une famille libre de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$:

Soit λ, μ, ν réels tels que $\lambda a + \mu b + \nu c = 0$. En appliquant u, on obtient : $\lambda.u(a) + 0 + 0 = 0$, soit $\lambda = 0$.
Il reste : $\mu b + \nu c = 0$, d'où $\mu = \nu = 0$, car (b, c) est libre.
Ainsi (a, b, c) est une base de $\mathbb{R}^3$ telle que : $a \notin \text{Ker}(u), b = u(a), c \in \text{Ker}(u)$.
La matrice de u dans cette base (a, b, c) est : $U_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. On suppose $\text{rg}(N) = 2$, $N^2 \neq 0$ et $N^3 = 0$; donc :

$$\exists\, a' \notin \text{Ker}(u^2). \text{ On pose } b' = u(a'), c' = u^2(a').$$

Montrons que (a', b', c') est une famille libre de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
Soit λ, μ, ν réels tels que $\lambda a' + \mu b' + \nu c' = 0$. Alors $\lambda u^2(a') + 0 + 0 = 0$ et donc $\lambda = 0$.
Puis : $\mu b' + \nu c' = 0 \implies \mu u(b') + 0 = 0 \implies \mu = 0$, car $b' \notin \text{Ker}(u)$, et enfin $\nu c' = \nu u^2(a') = 0 \implies \nu = 0$ car $a' \notin \text{Ker}(u^2)$.
Ainsi (a', b', c') est une base de $\mathbb{R}^3$ telle que : $a' \notin \text{Ker}(u), b' = u(a'), c' = u^2(a')$.
La matrice de u dans cette base (a', b', c') est : $U_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

3. a) On a $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha\gamma \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = 0$.

On a : $N = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, d'où $\text{rg}(N) \leq 2$. Selon le rang de N, on obtient :

- $\text{rg}(N) = 0 \implies \alpha = \beta = \gamma = 0$: on a bien $N^1 = 0$,
- $\text{rg}(N) = 1 \implies (\alpha = 0)$ ou $(\gamma = 0) \implies \alpha\gamma = 0$: on a bien $N \neq 0$ et $N^2 = 0$,
- $\text{rg}(N) = 2 \implies N^2 \neq 0$ et $N^3 = 0$.

Dans tous les cas, on a bien : $\inf\{k \in \mathbb{N} \mid N^k = 0\} = \text{rg}(N) + 1$

b) On note $M = N^2 - N$ et $A = I_3 + N$

i) A est une matrice échelonnée donc inversible.
On a : $A(I_3 + M) = (I_3 + N)(I_3 + N - N^2) = I_3 = (I_3 + M)A$, d'où :

$$A^{-1} = I_3 + M$$

ii) • $\text{rg}(N) = 0 : N = M = 0$,

• $\text{rg}(N) = 1$ entraîne $M = N^2 - N = -N$, donc $\text{rg}(M) = \text{rg}(N) = 1$, et $M^2 = (N^2 - N)^2 = 0$.

On en déduit grâce à la question 1 que M et N sont toutes deux semblables à U_1.

iii) $\text{rg}(N) = 2$ entraîne que la matrice N est semblable à U_2 d'où $M = N^2 - N$ est semblable à $U_2^2 - U_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, donc $\text{rg}(M) = 2$.

On en déduit grâce à la question 2 que M et N sont toutes deux semblables à U_2.

Dans tous les cas, les matrices M et N sont donc semblables et il existe $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $N = P^{-1}MP$.

On a $A = I_3 + N = I_3 + P^{-1}MP = P^{-1}(M + I_3)P = P^{-1}A^{-1}P$
Les matrices A et A^{-1} sont donc semblables.

5. On a montré que toute matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est semblable à A^{-1}.

La matrice B est semblable à A. Il existe donc Q telle que $B = Q^{-1}AQ$, d'où $A^{-1} = Q^{-1}B^{-1}Q$ et A^{-1} est semblable à B^{-1}, d'où le résultat demandé par transitivité.
Soit $B = -I_3$; on a alors : $B^{-1} = B = -I_3$ et pourtant B n'est pas semblable à une matrice de la forme souhaitée.

Exercice 2.9.

Soit n un entier tel que $n \geq 2$. Dans tout l'exercice, on confondra vecteur de $\mathbb{R}^n$ et matrice colonne canoniquement associée. On considère $E = \mathbb{R}^n = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, muni de son produit scalaire canonique $\langle\ ,\ \rangle$. On note $\|\ \|$ la norme euclidienne associée.

Soit a, b deux vecteurs de E de norme 1 orthogonaux. On définit un endomorphisme u de E par :

$$\text{pour tout } x \in E, u(x) = \langle a, x\rangle b - \langle b, x\rangle a$$

Soit A la matrice canoniquement associée à u.

1. a) Déterminer $\operatorname{Ker} u$. Déterminer la dimension de $\operatorname{Im} u$ ainsi qu'une base de cet espace.

b) Montrer que $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u$ et que les sous-espaces $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ sont orthogonaux.

2. Montrer que pour tout $(x, y) \in E^2$

$$\langle u(x), y\rangle = -\langle x, u(y)\rangle$$

3. Déterminer les valeurs propres (réelles) de u. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

4. Montrer que l'endomorphisme $u \circ u$ est symétrique.
En déduire que si λ est une valeur propre complexe non réelle de la matrice A, alors $\lambda = i\alpha$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$, où i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$.

Solution :

1. a) On a $x \in \operatorname{Ker}(u)$ si et seulement si $\langle a, x\rangle b = \langle b, x\rangle a$. Or la famille (a, b) est libre ; donc ceci impose $\langle b, x\rangle = \langle a, x\rangle = 0$ et $x \in \operatorname{Vect}(a, b)^{\perp}$.
La réciproque est immédiate.

Ainsi $\operatorname{Ker}(u) = \operatorname{Vect}(a, b)^{\perp}$, qui est de dimension 2.

Comme pour tout x, $u(x) = \langle a, x\rangle b - \langle b, x\rangle a$, on a $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Vect}(a, b)$ et comme u est de rang 2, il vient

$$\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Ker}(u)^{\perp}.$$

b) Par le cours et la question précédente, on a $\mathrm{Ker}(u) \oplus^{\perp} \mathrm{Im}(u) = E$.

2. Il suffit d'écrire :

$$\begin{cases} \langle u(x), y\rangle = \langle a, x\rangle\langle b, y\rangle - \langle b, x\rangle\langle a, y\rangle \\ \langle u(y), x\rangle = \langle a, y\rangle\langle b, x\rangle - \langle b, y\rangle\langle a, x\rangle \end{cases}$$

D'où :

$$\forall\, x, y, \langle u(x), y\rangle = -\langle x, u(y)\rangle$$

Matriciellement ceci se traduit par le fait que A est une matrice antisymétrique.

3. Si λ est une valeur propre (nécessairement réelle) de u, il existe $x \neq 0$ tel que $u(x) = \lambda x$. Ainsi :

$$\lambda||x||^2 = \langle \lambda x, x\rangle = \langle u(x), x\rangle = -\langle x, u(x)\rangle = -\lambda||x||^2$$

Donc $\lambda = 0$. Comme le noyau de u est de dimension 2, 0 est effectivement valeur propre de u.

4. On vérifie aisément que u^2 est symétrique, car le carré d'une matrice antisymétrique est symétrique.

Ainsi, si λ est une valeur propre complexe non réelle de A, alors λ^2 est une valeur propre de A^2, donc est un réel.
Plus précisément, λ est un imaginaire pur, car si $\lambda = a + ib, b \neq 0$, alors $\lambda^2 = a^2 - b^2 + 2iab$ et ce nombre n'est réel que si $a = 0$.

Exercice 2.10.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On considère deux projecteurs p et q de E différents de l'identité Id_E et de l'application nulle ; on suppose en outre que p et q commutent et que leur somme f n'est pas égale à l'identité.

1. Montrer que $p \circ q$ est un projecteur de E et calculer $f^3 - 3f^2 + 2f$. En déduire les valeurs propres possibles de f.

On note $\mathrm{Spec}(f)$ l'ensemble des valeurs propres de f.

2. a) Montrer que $0 \in \mathrm{Spec}(f)$ si et seulement si $\mathrm{Ker}\, p \cap \mathrm{Ker}\, q \neq \{0_E\}$.

b) Montrer que $2 \in \mathrm{Spec}(f)$ si et seulement si $\mathrm{Im}\, p \cap \mathrm{Im}\, q \neq \{0_E\}$.

c) Montrer que $\mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Ker}(f - Id_E) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2Id_E) = E$.

3. En déduire que [$2 \notin \mathrm{Spec}(f)$ ou $0 \notin \mathrm{Spec}(f)$] entraîne que $1 \in \mathrm{Spec}(f)$ et $\mathrm{Spec}(f) \neq \{1\}$.

Solution :

1. On a par commutativité : $(p \circ q) \circ (p \circ q) = p \circ p \circ q \circ q = p \circ q$.

Par la formule du binôme (valide puisque p et q commutent), il vient en notant la composition par simple juxtaposition :

$f^3 = p^3 + 3p^2q + 3qp^2 + q^3 = p + 6pq + q$;
$f^2 = p^2 + 2pq + q^2 = p + 2pq + q$.

$$f^3 - 3f^2 + 2f = 0$$

Aussi les valeurs propres possibles de f sont parmi les zéros de X^3-3X^2+2X, donc dans l'ensemble $\{0, 1, 2\}$.

2. a) On a $0 \in \mathrm{Sp}(f)$ si et seulement si il existe $x \neq 0$ tel que $f(x) = p(x) + q(x) = 0$. Comme $f^2(x) = 0$, il vient $p(x) + 2(p \circ q)(x) + q(x) = 0$, donc $(p \circ q)(x) = 0$.

En appliquant p à la relation $p(x) + q(x) = 0$, on obtient $p(x) = 0$ et donc $q(x) = 0$. Donc $\mathrm{Ker}\, p \cap \mathrm{Ker}\, q \neq \{0\}$.

La réciproque est évidente.

b) On a $2 \in \mathrm{Sp}(f)$ si et seulement si il existe $x \neq 0$ tel que

$$f(x) = p(x) + q(x) = 2x.$$

On a alors $f^2(x) = 4x = 2x + 2(p \circ q)(x)$. Donc $(p \circ q)(x) = x$. Donc $x \in \mathrm{Im}\, p$ et comme p et q jouent le même rôle, on a également $x \in \mathrm{Im}\, q$.

Réciproquement, si $x \in \mathrm{Im}\, p \cap \mathrm{Im}\, q$, on a $p(x) = q(x) = x$ donc $f(x) = 2x$.

c) On sait déjà que $\mathrm{Ker}\, f$, $\mathrm{Ker}(f - Id)$ et $\mathrm{Ker}(f - 2Id)$ sont en somme directe (quitte à ce que certains parmi ces sous-espaces soient réduits à $\{0\}$).

Soit $u \in E$, si on peut écrire $u = x + y + z$, avec $x \in \mathrm{Ker}\, f$, $y \in \mathrm{Ker}(f - Id)$ et $z \in \mathrm{Ker}(f - 2Id)$, alors :

$$\begin{cases} u = x + y + z \\ f(u) = y + 2z \\ f^2(u) = y + 4z \end{cases}$$

et donc :

$$\begin{cases} x = u - \frac{3}{2}f(u) + \frac{1}{2}f^2(u) \\ y = 2f(u) - f^2(u) \\ z = -\frac{1}{2}f(u) + \frac{1}{2}f^2(u) \end{cases}$$

On vérifie alors que ces vecteurs sont bien tels que : $x \in \mathrm{Ker}\, f$, $y \in \mathrm{Ker}(f - Id)$, et $z \in \mathrm{Ker}(f - 2Id)$, ce qui prouve que la somme des trois noyaux précédents est E.

3. Supposons que $2 \notin \mathrm{Sp}(f)$.

• Si $1 \notin \mathrm{Sp}(f)$, alors $E = \mathrm{Ker}\, f$ et $f = 0$. Donc $p = -q$ ce qui entraîne que $p^2 = p = -pq = -qp = q^2 = q$; donc $p = q$ et $0 = p + q = 2p$ d'où $p = 0$.
Finalement si $2 \notin \mathrm{Sp}(f)$ alors $1 \in \mathrm{Sp}(f)$. La démonstration est identique si l'on suppose que $0 \notin \mathrm{Sp}(f)$.

Pour terminer, si $\mathrm{Sp}(f) = \{1\}$, comme f est diagonalisable, il vient $f = Id$, ce qui contredit l'hypothèse $f \neq Id$.

Finalement $\mathrm{Sp}(f) \neq \{1\}$.

Exercice 2.11.

Soit N une variable aléatoire gaussienne centrée réduite.
Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions f continues telles que $[f(N)]^2$ admet une espérance.

1. Montrer que, pour tout $(f, g) \in \mathcal{E}^2$, la variable $f(N)g(N)$ admet une espérance, que l'on note $\langle f, g\rangle$ dans la suite de l'exercice.

2. Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ contenant $\mathbb{R}[X]$.

3. Montrer que $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{E}$.

4. Calculer, pour tout entier naturel n, la valeur de l'intégrale

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$$

(*On pourra séparer les cas n pair et n impair.*)

5. Soit $(P_k)_{0\leq k\leq n}$ la base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$ (pour le produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$) obtenue par le procédé de Schmidt à partir de la base canonique.

a) Calculer P_0 et P_1

b) Montrer que pour tout entier k tel que $n \geq k \geqslant 1$, il existe un triplet de réels (a_k, b_k, c_k) tel que

$$X.P_k = a_k P_{k+1} + b_k P_k + c_k P_{k-1}$$

Solution :

1. Pour tout $A > 0, B < 0$ et $(f, g) \in \mathcal{E}^2$, on a par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :
$\displaystyle\int_B^A f(x)g(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \int_B^A \left(f(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}}\right)\left(g(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}}\right)dx$

$$\leq \sqrt{\int_B^A \left(f(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}}\right)^2 dx \int_B^A \left(g(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}}\right)^2 dx}$$
$$\leq \sqrt{\int_B^A f^2(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \int_B^A g^2(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\, dx}$$

Quand B tend vers $-\infty$ et A vers $+\infty$, le membre de droite a une limite car $(f,g) \in \mathcal{E}^2$, donc le membre de gauche aussi et $f(N)g(N)$ a une espérance. D'où le résultat.

2. Le sous-ensemble $\mathcal{E}$ est un sous-ensemble non-vide de $C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
Pour tout $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(f,g) \in \mathcal{E}^2$, on a par linéarité de l'espérance, toutes les convergences étant acquises :

$$E((\lambda f(N) + \mu g(N))^2) = \lambda^2 E(f(N)^2) + 2\lambda\mu\langle f,g\rangle + \mu^2 E(g(N)^2)$$

Enfin, les fonctions polynomiales sont dans $\mathcal{E}$ car le produit d'une fonction polynomiale P par $x \mapsto \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$.
En effet, au voisinage de $+\infty$ ou de $-\infty$:

$$P(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} = o(x^{-2}), \text{ car } \lim_{x\to\pm\infty} x^2 P(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} = 0.$$

3. ⋆ $\langle\ ,\ \rangle$ est clairement symétrique.

⋆ $\langle\ ,\ \rangle$ est bilinéaire en vertu de la linéarité de l'espérance.

⋆ $\forall f \in \mathcal{E}, \langle f,f\rangle = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$

Donc $\langle f,f\rangle$ est positive comme intégrale d'une fonction positive et $\langle f,f\rangle = 0$ si, et seulement si $f = 0$ (en utilisant la continuité de l'intégrant).

4. Par intégration par parties, on trouve, pour tout entier $n \geq 2$:

$$I_n = \left[-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{n-1}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\right]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} (n-1)x^{n-2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = (n-1)I_{n-2}$$

Or $I_0 = 1$ et $I_1 = 0$. D'où, pour tout entier naturel n,

$$I_{2n+1} = 0, I_{2n} = (2n-1)(2n-3)\ldots 1 = \frac{(2n)!}{2^n n!}$$

5. a) P_0 est la normalisation du polynôme constant 1. D'où :

$$P_0 = \frac{1}{I_0} = 1$$

D'après le procédé de Schmidt, on a :

$$P_1 = \frac{X - \langle X, P_0\rangle P_0}{\langle X - \langle X,P_0\rangle P_0, X - \langle X,P_0\rangle P_0\rangle} = \frac{X}{I_2 - 2I_1^2 + I_1 I_0} = X$$

b) Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$, le polynôme $XP_k(X)$ appartient à $\mathbb{R}_{k+1}[X] = \text{Vect}(P_i,\ i \leq k+1)$.

On a donc :

$$XP_k(X) = \sum_{i=0}^{k+1} \alpha_i P_i(X)$$

avec $\alpha_i = \langle X.P_k, P_i \rangle$.

On remarque alors que $\langle X.P_k, P_i \rangle = \langle P_k, X.P_i \rangle$.

Cette dernière expression montre que $\alpha_i = 0$ si $i \leq k-2$ car $P_k \in \left(\mathbb{R}_{k-1}[X]\right)^{\perp}$.

D'où le résultat final.

Exercice 2.12.

Soit n un entier tel que $n \geq 2$.

On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.

On définit une application Φ sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\text{pour tout } P \text{ de } \mathbb{R}_n[X],\ \Phi(P) = P'' - 2XP'$$

où P' et P'' désignent respectivement les dérivées première et seconde de P.

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Déterminer les valeurs propres de Φ. L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable ?

3. a) Montrer que pour tout $p \in [\![0, n]\!]$, il existe un unique polynôme unitaire H_p de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $\Phi(H_p) = -2pH_p$.

b) Déterminer le degré de H_p ainsi que les coefficients des termes de degré $p-1$ et $p-2$ de H_p.

4. Soit $p \neq q$ deux entiers de $[\![0, n]\!]$. Montrer que l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_p(t) H_q(t) \mathrm{e}^{-t^2}\, dt$$

est convergente et calculer sa valeur.

Solution :

1. La dérivation étant linéaire, l'application Φ est linéaire. De plus, pour tout $k \geq 2$, $\Phi(X^k) = k(k-1)X^{k-2} - 2kX^k$, et $\Phi(1) = 0, \Phi(X) = -2X$ entraînent que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. La matrice associée à Φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & -4 & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \ddots & \ddots & \ddots & n(n-1) \\ 0 & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -2n \end{pmatrix}$$

C'est une matrice triangulaire supérieure.

Ses valeurs propres se lisent sur sa diagonale et $\mathrm{Sp}(A) = \{0, -2, -4, \dots, -2n\}$.

La matrice A admet $(n+1)$ valeurs propres, et $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension $n+1$. L'endomorphisme Φ est donc diagonalisable.

3. a) L' endomorphisme Φ admet $-2p$ comme valeur propre et le sous-espace propre associé est de dimension 1. Il existe donc un unique polynôme (unitaire après normalisation) H_p tel que $\Phi(H_p) = -2pH_p$.

b) La considération du terme de plus haut degré montre que si $\Phi(H_p) = -2pH_p$, alors P est de degré exactement p.

On écrit alors $H_p(X) = X^p + \sum_{k=0}^{p-1} a_k X^k$, puis $\Phi(H_p) = -2pH_p$ donne, en égalant les coefficients des deux membres de cette égalité :

$$\begin{cases} -2(p-1)a_{p-1} = -2pa_{p-1} \\ -2(p-2)a_{p-2} + p(p-1) = -2pa_{p-2} \end{cases}$$

Donc $a_{p-1} = s0, a_{p-2} = -\dfrac{p(p-1)}{4}$.

4. On sait (ou on vérifie aisément) que $(P,Q) \to \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t^2}dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

On a : $\langle \Phi(P), Q\rangle = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (P''(t) - 2tP'(t))Q(t)\mathrm{e}^{-t^2}dt$, soit :

$$\langle \Phi(P), Q\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P''(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t^2}dt - \int_{-\infty}^{+\infty} P'(t)Q(t)2t\mathrm{e}^{-t^2}dt$$

En intégrant par parties, directement avec les bornes infinies :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P''(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t^2}dt = \left[P'(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t^2}\right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} P'(t)(Q'(t) - 2tQ(t))\mathrm{e}^{-t^2}dt$$

et, en remplaant, on obtient :

$$\langle \Phi(P), Q\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P'(t)Q'(t)\mathrm{e}^{-t^2}dt$$

Sous cette forme la symétrie est claire et $\langle \Phi(P), Q\rangle = \langle \Phi(Q), P\rangle$.

Ainsi, Φ est un endomorphisme symétrique et les sous-espaces propres sont orthogonaux. L'intégrale demandée est donc nulle.

Exercice 2.13.

Soit n un entier naturel non nul et Q un polynôme à coefficients réels de degré $d \leq n$. On définit l'application suivante :

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & (PQ)^{(n)} \end{cases}$$

où $(PQ)^{(n)}$ indique que l'on prend la dérivée $n^{\text{ème}}$ du produit de P par Q.

1. Justifier que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur le polynôme Q pour que φ soit un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

3. Montrer que la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est triangulaire supérieure. Que dire de plus dans le cas particulier où $d < n$?

4. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur le polynôme Q pour que φ soit diagonalisable.

Solution :

1. L'application φ est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$ car pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a : $\deg(PQ) \leq n + d$ et $\deg((PQ)^{(n)}) \leq n + d - n = d \leq n$.

L'application φ est linéaire car la dérivation et l'application $P \mapsto PQ$ sont linéaires.
Donc φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Déterminons le noyau de φ :

$$P \in \operatorname{Ker}\varphi \Longleftrightarrow (PQ)^{(n)} = 0 \Longleftrightarrow \deg(PQ) < n \Longleftrightarrow \deg(P) < n - d$$

Le noyau de φ est donc réduit au sous-espace nul si, et seulement si, $d = n$.

Par conséquent, l'endomorphisme φ est injectif (et donc bijectif car $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie) si, et seulement si $d = n$.

3. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Le polynôme $\varphi(X^k)$ est de degré inférieur à k, et même strictement inférieur à k si $d < n$. Donc la matrice de φ est triangulaire supérieure.

4. Comme la matrice de φ dans la base canonique est triangulaire, on lit ses valeurs propres sur la diagonale.

• Si $d < n$, on a vu à la question précédente que les éléments diagonaux (donc les valeurs propres) de la matrice de φ dans la base canonique sont nuls. L'endomorphisme φ est alors diagonalisable si, et seulement si, c'est l'endomorphisme nul, soit $Q = 0$.

• Si $d = n$, calculons les coefficients diagonaux de la matrice de φ dans la base canonique. Si on note a_n le coefficient du monôme dominant de Q, les coefficients diagonaux sont $a_n \dfrac{(n+k)!}{k!}$ pour $k \in [\![0, n]\!]$. Comme ces coefficients sont tous différents, la matrice est diagonalisable.

En conclusion, φ est diagonalisable si, et seulement si $Q = 0$ ou $d = n$.

Exercice 2.14.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. On considère trois endomorphismes de E, notés f, g et h tels que :

$$\begin{cases} h \circ f - f \circ h &= 2f \\ h \circ g - g \circ h &= -2g \\ f \circ g - g \circ f &= h \end{cases}$$

On suppose de plus que si F est un sous-espace vectoriel de E qui est stable à la fois par f, g et h, alors $F = \{0\}$ ou $F = E$.

Soit λ une valeur propre de h.

1. Soit x un vecteur propre de h associé à la valeur propre λ. Montrer que :

$$h\big(f(x)\big) = (\lambda + 2)f(x).$$

2. Montrer qu'il existe un vecteur non-nul x_0 et λ_0 un réel tels que

$$\begin{cases} h(x_0) = \lambda_0 x_0 \\ f(x_0) = 0 \end{cases}$$

3. On définit la famille de vecteurs $(x_k)_{k \leq n-1}$ par le vecteur x_0 trouvé à la question précédente et la relation de récurrence :

$$\forall k \in [\![0, n-2]\!], x_{k+1} = g(x_k)$$

Montrer que, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$:

$$\begin{cases} h(x_k) = (\lambda_0 - 2k)x_k \\ g(x_k) = x_{k+1} \\ f(x_k) = k(\lambda_0 - k + 1)x_{k-1} \end{cases}$$

en posant $x_{-1} = 0$.

4. Montrer que la famille $(x_k)_{k \leq n-1}$ est une base de E.

Solution :

1. Comme $h(x) = \lambda x$, la première propriété donne :

$$h(f(x)) = 2f(x) + f(h(x)) = 2f(x) + f(\lambda x) = (2 + \lambda)f(x)$$

D'où le résultat.

2. Soit λ_0 la plus grande valeur propre (qui existe car on a supposé qu'il en existe au moins une) de h et x_0 un vecteur propre associé à cette valeur propre.
Si $f(x_0)$ est non nul, alors, d'après la question précédente, $\lambda_0 + 2$ est une valeur propre de h, ce qui est impossible car on a choisi λ_0 maximale. D'où :

$$f(x_0) = 0.$$

3. Procédons par récurrence. Définissons, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la proposition :

$$\mathcal{P}_k : \text{« } h(x_k) = (\lambda_0 - 2k)x_k,\ f(x_k) = k(\lambda_0 - k + 1)x_{k-1} \text{ »}$$

• Les relations sont vérifiées pour $k = 0$, d'après la question précédente. D'où $\mathcal{P}_0$ est vraie.

• Soit $k \in \mathbb{N}$; supposons la propriété $\mathcal{P}_k$ vérifiée. Alors :

$$\begin{aligned} h(x_{k+1}) &= h \circ g(x_k) \\ &= g \circ h(x_k) - 2g(x_k) \text{ (d'après la deuxième relation)} \\ &= (\lambda_0 - 2k)x_{k+1} - 2x_{k+1} \text{ (hypothèse de récurrence)} \\ &= (\lambda_0 - 2(k+1))x_{k+1} \\ f(x_{k+1}) &= f \circ g(x_k) \\ &= g \circ f(x_k) + h(x_k) \text{ (d'après la troisième relation)} \\ &= k(\lambda_0 - k + 1)x_k + (\lambda_0 - 2k)x_k \text{ (hypothèse de récurrence)} \\ &= (k+1)(\lambda_0 - k)x_k \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie.
On obtient le résultat demandé par le principe de récurrence.

4. Soit d l'indice du premier terme nul de la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Les vecteurs x_k sont donc non-nuls pour $k < d$ et nuls pour $k \geq d$.

• D'après la question précédente et la définition de la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, l'espace vectoriel $\text{Vect}(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est stable à la fois par f, g et h : d'après l'énoncé, il est égal à E (il ne peut être réduit à $\{0\}$ car $x_0 \neq 0$). La famille $(x_k)_{k\leq d-1}$ est génératrice de E, car les termes d'indices plus grand que d sont nuls.

• De plus, la famille de vecteurs non nuls $(x_k)_{k\leq d-1}$ est constituée de vecteurs propres de h associés à des valeurs propres distinctes (d'après la question précédente) : elle est donc libre.

En conclusion, la famille $(x_k)_{k\leq d-1}$ est donc une base de E, et en particulier $d = n$ car la dimension d'un espace vectoriel est égale au cardinal de ses bases.

Exercice 2.15.

Soit $E = C^2([0,1],\mathbb{R})$. On considère les deux parties de E :

$$V = \{f \in E,\ f(0) = f(1) = 0\} \text{ et } W = \{f \in E, f'' = f\}$$

où f' et f'' désignent les dérivées première et seconde de f.

1. On admet qu'une base de W est donnée par $(x \mapsto \mathrm{e}^x, x \mapsto \mathrm{e}^{-x})$.
Montrer que V et W sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

Soit $\varphi : E^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(f,g) = \int_0^1 \big[f(t)g(t) + f'(t)g'(t)\big]dt$$

2. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.

3. Montrer que V et W sont supplémentaires orthogonaux dans E.

4. Soit $U = \{f \in E,\ f(0) = f(1) = f'(0) = f'(1) = 0\}$.

   a) Montrer que U n'est pas réduit à la fonction nulle.

   b) Montrer que si $f \in U$ alors

$$\Big(\int_0^1 f(t)dt\Big)^2 - \int_0^1 f^2(t)dt \leq \int_0^1 f(t)f''(t)dt$$

5. On se place dans l'espace euclidien $(\mathbb{R}_3[X],\varphi)$ et on note $\|.\|$ la norme associée.

   a) Déterminer une base de $VP = \{P \in \mathbb{R}_3[X],\ P(0) = P(1) = 0\}$.

   b) Montrer l'existence du réel $\alpha = \inf_{\lambda,\mu\in\mathbb{R}} \|\mu X^3 - (\lambda+\mu)X^2 + (\lambda-1)X\|$.

   c) Montrer que $\alpha > 0$.

Solution :

1. • V est un sous-espace vectoriel de E, car non vide (contient $f = 0$) et stable par combinaison linéaire,

• $W = \text{Vect}(x \mapsto \mathrm{e}^x, x \mapsto \mathrm{e}^{-x})$ est également un sous-espace vectoriel de E, puisque ces deux fonctions sont bien de classe $\mathcal{C}^2$.

$$\bullet\ f \in V \cap W \implies \begin{cases} f(x) = \alpha \mathrm{e}^x + \beta \mathrm{e}^{-x} \\ f(0) = f(1) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha \mathrm{e} + \beta/\mathrm{e} = 0 \end{cases}$$
$$\implies \alpha = \beta = 0 \implies f = 0.$$

• Soit $f \in E$. On cherche deux fonctions $v \in V$ et $w : x \mapsto \lambda \mathrm{e}^x + \mu \mathrm{e}^{-x} \in W$ telles que : $\forall x \in [0,1], f(x) = v(x) + w(x)$. On a alors :

$$\begin{cases} f(x) = v(x) + \lambda \mathrm{e}^x + \mu \mathrm{e}^{-x} \\ v(0) = v(1) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} f(0) = \lambda + \mu \\ f(1) = \lambda \mathrm{e} + \mu/\mathrm{e} \end{cases}$$
$$\implies \begin{cases} \lambda = \dfrac{\mathrm{e} f(1) - f(0)}{\mathrm{e}^2 - 1} \\ \mu = \dfrac{\mathrm{e} f(1) - \mathrm{e}^2 f(0)}{\mathrm{e}^2 - 1} \end{cases}$$

Ainsi $w(x) = \lambda \mathrm{e}^x + \mu \mathrm{e}^{-x}$ est bien déterminée, on pose alors : $v(x) = f(x) - w(x)$ qui, par construction est bien dans V.

2. Soit $\varphi : E^2 \to \mathbb{R}, (f,g) \mapsto \displaystyle\int_0^1 (f(t)g(t) + f'(t)g'(t))\, dt$

φ est un produit scalaire sur E, car c'est clairement une forme symétrique, bilinéaire (linéarité des opérations de dérivation et d'intégration), positive (positivité de l'intégrale) et définie (l'intégrale d'une fonction positive et continue est nulle si et seulement si cette fonction est nulle).

3. On sait déjà que V et W sont supplémentaires dans E.
Soit alors $f \in V$ et $g \in W$,

$$\int_0^1 f'(t)g'(t)\, dt = [f(t)g'(t)]_0^1 - \int_0^1 f(t)g''(t)dt = 0 - \int_0^1 f(t)g(t)\, dt$$

car $f(0) = f(1) = 0$ et $g = g''$. D'où :

$$\varphi(f,g) = \int_0^1 f(t)g(t)\, dt + \int_0^1 f'(t)g'(t)\, dt = 0 \text{ et } V \text{ et } W \text{ sont orthogonaux.}$$

4. a) U n'est pas réduit à la fonction nulle car il contient par exemple la fonction $x \mapsto \cos(2\pi x) - 1$.

b) Soit $f \in U$. On a :

$$\int_0^1 f'^2(t)\,dt = \big[f(t)f'(t)\big]_0^1 - \int_0^1 f(t)f''(t)\,dt = -\int_0^1 f(t)f''(t)\,dt$$

d'où :

$$\varphi(f,f) = \int_0^1 f^2(t)\,dt - \int_0^1 f'^2(t)\,dt = \int_0^1 f^2(t)\,dt + \int_0^1 f(t)f''(t)\,dt$$

On a $\varphi(f,1) = \displaystyle\int_0^1 f^2(t)\,dt$ et $\varphi(1,1) = 1$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz : $(\varphi(f,1))^2 \leq \varphi(f,f)\varphi(1,1)$ donne alors :

$$\Big(\int_0^1 f(t)\,dt\Big)^2 \leq \int_0^1 f^2(t)\,dt + \int_0^1 f(t)f''(t)\,dt$$

5. L'espace $(\mathbb{R}_3[X],\varphi)$ est un espace euclidien de dimension 4.

a) P appartient à VP si et seulement si P est de degré inférieur ou égal à 3, admet 0 et 1 pour racines, donc est de la forme

$$X(1-X)(aX+b)$$

ainsi :

$$VP = \mathrm{Vect}(X(1-X), X^2(1-X))$$

b) La fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (\lambda,\mu) \mapsto ||\mu X^3 - (\lambda+\mu)X^2 + (\lambda-1)X||$ est minorée par 0, donc α existe. De plus c'est la racine carrée d'une fonction polynomiale, elle est donc continue sur $\mathbb{R}^2$, donc elle atteint sa borne inférieure α et il existe $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\alpha = g(\lambda,\mu)$.

c) On a :

$\alpha = \inf\limits_{\lambda,\mu\in\mathbb{R}} ||\lambda(X-X^2) + \mu(X^3-X^2) - X|| = \inf\limits_{P\in VP} ||P-x|| = d(x,VP).$

Le théorème de la projection orthogonale assure que $\alpha = ||p_{VP}(x) - x||$, où $p_{VP}(x)$ est le projeté orthogonal du polynôme X sur le sous-espace vectoriel VP. Comme $x \notin VP, x \neq p_{VP}(x)$, d'où

$$d(x,VP) = \alpha > 0.$$

Exercice 2.16.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$ et f un endomorphisme de E.

1. On suppose dans cette question que $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f^2) = r$.

a) Montrer que $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Ker}\, f^2$ et que $E = \mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Im}\, f$.

b) Réciproquement, on suppose que $E = \mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Im}\, f$.
Montrer que $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f^2)$.

2. On suppose dans cette question que $r = 1$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit diagonalisable.

3. On suppose désormais que $\text{rg}(f) = r, \text{rg}(f^2) = p$, avec $r \neq p$.

a) Montrer que $p \leq r - 1$.

b) Exprimer $\dim(\text{Ker}\, f \cap \text{Im}\, f)$ en fonction de r et p.

4. a) Montrer qu'il existe un entier k tel que $\text{rg}(f^k) = \text{rg}(f^{k+1})$.

b) Montrer qu'on a alors $E = \text{Ker}(f^k) \oplus \text{Im}(f^k)$.

Solution :

1. a) Comme $\text{rg}\, f = \text{rg}\, f^2$, on a $\dim \text{Ker}\, f = \dim \text{Ker}\, f^2$ et comme on a toujours $\text{Ker}\, f \subseteq \text{Ker}\, f^2$, il vient immédiatement que $\text{Ker}\, f = \text{Ker}\, f^2$.

Soit $x \in \text{Ker}\, f \cap \text{Im}\, f$. Alors $f(x) = 0$ et $x = f(y)$. Donc $f^2(y) = 0$ ce qui entraîne que $f(y) = x = 0$. On termine avec le théorème du rang pour conclure que $E = \text{Ker}\, f \oplus \text{Im}\, f$.

b) Réciproquement, soit $x \in \text{Ker}\, f^2$. Alors $f^2(x) = f(f(x)) = 0$. Donc $f(x) \in \text{Im}\, f \cap \text{Ker}\, f = \{0\}$. Donc $x \in \text{Ker}\, f$. Ainsi $\text{Ker}\, f^2 = \text{Ker}\, f$ et on conclut par le théorème du rang.

2. Un endomorphisme de rang 1 est diagonalisable si et seulement il admet une valeur propre non nulle. En effet :
$\text{rg}\, f = 1 \implies 0 \in \text{Sp}(f)$ et $\dim E_0 = (n-1)$. Donc :

• si $\text{Sp}(f) = \{0\}$, alors f non diagonalisable, sauf si f est l'endomorphisme nul, qui n'est pas de rang 1 !.

• Si $\text{Sp}(f) \neq \{0\}$, f admet une autre valeur propre $\lambda \neq 0$ et $\dim E_\lambda = 1$ (puisque $\dim E_0 = (n-1)$). Donc f est diagonalisable.

3. a) Soit $g : \text{Im}\, f \to \text{Im}\, f^2$ définie par, pour tout $x \in \text{Im}\, f, g(x) = f(x)$. L'application g est linéaire de $\text{Im}\, f$ vers $\text{Im}\, f^2$, surjective et le théorème du rang montre que :

$$\text{rg}\, f = \text{rg}\, f^2 + \dim \text{Ker}\, g$$

Or $\text{Ker}\, g = \text{Ker}\, f \cap \text{Im}\, f$ et $\text{rg}\, f \neq \text{rg}\, f^2$, donne $\text{Ker}\, g = \text{Ker}\, f \cap \text{Im}\, f \neq \{0\}$. Donc $p \leq r - 1$.

b) Par le théorème du rang, $\dim(\text{Ker}\, f \cap \text{Im}\, f) = r - p$.

4. Regardons la famille de sous-espaces vectoriels $(\text{Ker}\, f^k)_{k \geq 1}$. C'est une famille croissante pour l'inclusion. La suite des entiers naturels $(\dim \text{Ker}\, f^k)_{k \geq 1}$

est donc croissante, majorée par la dimension de E. Elle est donc stationnaire : il existe k tel que $\dim \operatorname{Ker} f^k = \dim \operatorname{Ker} f^{k+1}$. Comme $\operatorname{Ker} f^k \subseteq \operatorname{Ker} f^{k+1}$. On a $\operatorname{Ker} f^k = \operatorname{Ker} f^{k+1}$.

Montrons que $\operatorname{Ker} f^k = \operatorname{Ker} f^{k+2}$.
En effet, soit $x \in \operatorname{Ker} f^{k+2}$; alors $f(x) \in \operatorname{Ker} f^{k+1}$ et donc $f(x) \in \operatorname{Ker} f^k$, donc $x \in \operatorname{Ker} f^{k+1} = \operatorname{Ker} f^k$.

Par une récurrence immédiate, pour tout $p \geq 1$, $\operatorname{Ker} f^k = \operatorname{Ker} f^{k+p}$. Par le théorème du rang, on obtient également que pour tout $p \geq 1$, $\operatorname{Im} f^k = \operatorname{Im} f^{k+p}$, par inclusion évidente et égalité des dimensions.

Montrons que $\operatorname{Ker} f^k \cap \operatorname{Im} f^k = \{0\}$.

En effet, soit $x \in \operatorname{Ker} f^k \cap \operatorname{Im} f^k$; alors $f^k(x) = 0$ et $x = f^k(y)$. Donc $f^{2k}(y) = 0$ et $\operatorname{Ker} f^{2k} = \operatorname{Ker} f^k$ entraîne $x = f^k(y) = 0$.
$\operatorname{Ker} f^k$ et $\operatorname{Im} f^k$ sont donc en somme directe et comme les dimensions sont *ad hoc* ces deux sous-espaces de E sont supplémentaires.

Exercice 2.17.

Soit $\big(E, \langle\ ,\ \rangle\big)$ un espace euclidien.

1. a) Soit v un vecteur non nul de E. Montrer que l'application $\psi_v : x \mapsto \langle v, x\rangle$ est une application linéaire de E vers $\mathbb{R}$; préciser son noyau.

b) Réciproquement, montrer que, pour toute application linéaire φ non identiquement nulle de E vers $\mathbb{R}$, il existe un unique vecteur non nul $v \in E$ tel que $\varphi = \psi_v$.

2. Soit φ une application linéaire non nulle de E vers $\mathbb{R}$, u un vecteur non nul de $H = \operatorname{Ker} \varphi$, et $f \in \mathcal{L}(E)$ défini par :

$$f(x) = x + \varphi(x)\, u \qquad (*)$$

a) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f, et étudier si f est diagonalisable.

b) Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Peut-on choisir une telle base orthonormée ?

c) Justifier que f est inversible et déterminer son inverse. Montrer que f^{-1} peut être définie par une formule analogue à $(*)$.

Solution :

1. a) Par la bilinéarité du produit sacalaire, l'application ψ_v est clairement linéaire. De plus son noyau est l'hyperplan $H = v^\perp = [\text{Vect}(v)]^\perp$.

b) Soit $(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une base orthonormée de E.

$\star$ Pour $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ quelconque et $\varphi \in \mathcal{L}(E,\mathbb{R})$, on a $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi(e_i)$ et donc si on pose $v = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i).e_i$, on a $\varphi(x) = \langle v, x\rangle = \psi_v(x)$, soit $\varphi = \psi_v$.

$\star$ Soit $v_1, v_2 \in E$, si $\psi_{v_1} = \psi_{v_2}$, on a pour tout vecteur x de E, $\langle v_1, x\rangle = \langle v_2, x\rangle$, donc $\langle v_1 - v_2, x\rangle = 0$ et pour $x = v_1 - v_2$ il reste $\|v_1 - v_2\|^2 = 0$ et $v_1 = v_2$.

On a ainsi prouvé l'existence et l'unicité.

2. a) On a $f(x) = \lambda\, x$ si et seulement si $\varphi(x)\, u = (\lambda - 1)\, x$, d'où :

• $\lambda = 1$ entraîne que $\varphi(x) = 0$, soit $x \in H = \text{Ker}\,\varphi$;

• $\lambda \neq 1$ entraîne que $x \in \text{Vect}(u) \subseteq H$ ce qui est exclu. Ainsi $\text{Sp}(f) = \{1\}$, et $\text{Ker}(f - Id) = H$, donc f n'est pas diagonalisable.

b) Il existe v tel que $\varphi = \psi_v$, et $v \perp u$; soit (u_i) une base de E telle que $u_1 = v$, $u_2 = u$ et $(u_2, \ldots, u_n)$ base de H. On a :

$$M_{(u_i)}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ ||v||^2 & & & \\ 0 & & I_{n-1} & \\ \vdots & & & \end{pmatrix}$$

en prenant $e_1 = v/||v||$, $e_2 = u/||u||$ complété en $(e_3, \ldots, e_n)$ base orthonormée de H (*i.e.* (e_i) base orthonormée adaptée à $E = H^\perp \oplus H$), on a donc :

$$M_{(e_i)}(f) = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ ||v||\ ||u|| & & & \\ 0 & & I_{n-1} & \\ \vdots & & & \end{pmatrix}$$

qui est de la forme voulue.

c) La matrice A est inversible car triangulaire avec des 1 sur sa diagonale. Pour déterminer son inverse, comme $\langle v, u\rangle = 0$, on a :

$[y = x + \langle v, x\rangle\, u \Rightarrow \langle v, y\rangle = \langle v, x\rangle] \Rightarrow \big[y = x + \langle v, x\rangle\, u \Leftrightarrow x = y - \langle v, y\rangle\, u\big]$

soit :

$$f^{-1}(y) = y - \langle v, y\rangle\, u = y + \psi_{-v}(y)\, u$$

3

PROBABILITÉS

Exercice 3.1.

On considère trois variables aléatoires X, Y et Z, définies sur le même espace probabilisé, indépendantes et suivant la loi exponentielle de paramètre λ.

1. Déterminer la loi de $Y + Z$.

2. a) Soit $D = Y + Z - X$, déterminer une densité de la variable aléatoire D sur $\mathbb{R}^+$.

   b) Calculer $P(X \leq Y + Z)$.

3. Déterminer l'événement complémentaire de l'événement

$$[X \leq Y + Z] \cap [Y \leq Z + X] \cap [Z \leq X + Y],$$

et calculer sa probabilité.

4. Quelle est la probabilité pour qu'on puisse construire un triangle (éventuellement aplati) dont les côtés aient pour longueur X, Y et Z ?

Solution :

1. $Y + Z$ est encore une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et comme X et Y sont indépendantes, une densité f_{Y+Z} de $Y + Z$ peut être définie par convolution, ce qui donne :

$$\forall\, x > 0, f_{Y+Z}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(t) f_Z(x-t)\, dt = \int_0^x \lambda.\mathrm{e}^{-\lambda t}.\lambda.\mathrm{e}^{-\lambda(x-t)}\, dt$$
$$= \int_0^x \lambda^2 \mathrm{e}^{-\lambda x} dt$$
$$f_{Y+Z}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \lambda^2 x.\mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

2. a) La variable aléatoire $-X$ est aussi indépendante de $Y+Z$ et, à nouveau par convolution :

$$\forall\, x \geqslant 0, f_D(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{Y+Z}(t) f_{-X}(x-t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{Y+Z}(t) f_X(t-x)\, dt$$
$$= \int_x^{+\infty} \lambda^2 t.\mathrm{e}^{-\lambda t}.\lambda.\mathrm{e}^{-\lambda(t-x)}\, dt = \lambda^3 \mathrm{e}^{\lambda x} \int_x^{+\infty} t.\mathrm{e}^{-2\lambda t}\, dt$$

Le calcul de l'intégrale écrite se fait sans problème à l'aide d'une intégration par parties, ce qui donne :

$$\forall\, x \geqslant 0, f_D(x) = \frac{\lambda}{4}(2\lambda x + 1)\mathrm{e}^{-\lambda x}$$

b) On a $P(X \leq Y+Z) = P(D \geqslant 0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_D(x)\, dx$, donc il suffisait bien de connaître une densité de D sur $\mathbb{R}^+$ et :

$$P(X \leq Y+Z) = \frac{\lambda}{4} \int_0^{+\infty} (2\lambda x + 1)\mathrm{e}^{-\lambda x}\, dx$$

et en intégrant à nouveau par parties, on obtient : $P(D \geqslant 0) = \dfrac{3}{4}$

3. Posons $C = [X \leq Y+Z] \cap [Y \leq Z+X] \cap [Z \leq X+Y]$, les lois de de Morgan montrent que :

$$\overline{C} = [X > Y+Z] \cup [Y > Z+X] \cup [Z > X+Y]$$

⋆ Les trois événements constituant la réunion précédente sont deux à deux disjoints (si on avait par exemple $[X > Y+Z]$ et $[Y > Z+X]$, on aurait $[X > 2Z+X]$, ce qui est clairement impossible puisque Z est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$).

⋆ De plus chacun de ces événements relève du traitement de la question 2. b), donc a pour probabilité $1 - P(D \geqslant 0) = \dfrac{1}{4}$, soit :

$$P(\overline{C}) = \frac{3}{4}$$

4. On peut construire un triangle de côtés donnés si et seulement si chacun de ces nombres est inférieur ou égal à la somme des deux autres, ce qui correspond à la réalisation de l'événement C de probabilité $\dfrac{1}{4}$.

Exercice 3.2.

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes, de même loi uniforme sur l'ensemble $E = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$. Soit Z et T les variables aléatoires définies par :

$$Z = |X - Y| \text{ et } T = \inf(X, Y)$$

Sous réserve d'existence, on note $E(A)$ l'espérance de la variable aléatoire A.

1. a) Justifier l'existence des moments de tous ordres de Z et T.

   b) Montrer que $E(Z) = \dfrac{n(n+2)}{3(n+1)}$.

   c) En déduire $E(T)$ et en donner un équivalent lorsque n tend vers l'infini.

2. Soit U une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, telle qu'il existe $K \in \mathbb{N}^*$ vérifiant : $0 \leq U \leq K$.

   a) Exprimer $\sum_{j=1}^{K} P(U \geqslant j)$ en fonction de l'espérance $E(U)$.

   b) Calculer de même $\sum_{j=1}^{K} j^2 P(U \geqslant j)$ en fonction de $E(U)$, $E(U^2)$ et $E(U^3)$.

3. a) Calculer pour tout $j \in \mathbb{N}$, la probabilité $P(T \geqslant j)$.

   b) En utilisant la question 2. a), retrouver la valeur de $E(T)$.

4. Calculer $E(Z^2)$ en fonction de la variance σ_X^2 de la variable aléatoire X.

Solution :

1. a) Z et T sont des variables aléatoires qui ne prennent qu'un nombre fini de valeurs. Elles admettent donc des moments de tous ordres puisque les sommes qui les définissent sont en fait finies.

   b) $Z = |X - Y|$ prend les valeurs $0, 1, \ldots, n$ et :

$$(Z = i) = \bigcup_{k=0}^{n-i} [(X = i + k) \cap (Y = k)] \cup \bigcup_{k=0}^{n-i} [(Y = i + k) \cap (X = k)]$$

Chaque événement $(X = i) \cap (Y = j)$ est de probabilité $\dfrac{1}{(n+1)^2}$ et pour $i \geqslant 1$ la réunion précédente est une union disjointe, d'où :

$$\forall\, i \in [\![1, n]\!], P(Z = i) = 2(n - i + 1) \times \frac{1}{(n+1)^2}$$

Ainsi :

$$E(Z) = \sum_{i=0}^{n} iP(Z=i) = \frac{2}{(n+1)^2}\sum_{i=1}^{n} i(n-i+1)$$
$$= \frac{2}{n+1}\sum_{i=1}^{n} i - \frac{2}{(n+1)^2}\sum_{i=1}^{n} i^2$$
$$= \frac{2}{n+1}\times\frac{n(n+1)}{2} - \frac{2}{(n+1)^2}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Ce qui donne bien :

$$E(Z) = \frac{n(n+2)}{3(n+1)}$$

c) On a :

$|X-Y| = \sup(X,Y) - \inf(X,Y)$, et $X+Y = \sup(X,Y) + \inf(X,Y)$.

Par conséquent : $2T = X + Y - |X-Y|$ et comme on sait que $E(X) = E(Y) = \frac{n}{2}$, il vient :

$$E(T) = \frac{n}{2} - \frac{n(n+2)}{6(n+1)} = \frac{n(2n+1)}{6(n+1)} \underset{(\infty)}{\sim} \frac{n}{3}$$

2. a) On a $E(U) = \sum_{i=0}^{K} iP(U=i) = \sum_{i=1}^{K} iP(U=i)$, tandis que par retournement classique des sommations :

$$\sum_{j=1}^{K} P(U \geqslant j) = \sum_{j=1}^{K}\sum_{i=j}^{K} P(U=i) = \sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{i} P(U=i) = \sum_{i=1}^{K} iP(U=i)$$

On a donc bien :

$$E(U) = \sum_{j=1}^{K} P(U \geqslant j)$$

b) $\sum_{j=1}^{K} j^2 P(U \geqslant j) = \sum_{j=1}^{K}\sum_{i=j}^{K} j^2 P(U=i) = \sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{i} j^2 P(U=i)$, donc :

$$\sum_{j=1}^{K} j^2 P(U \geqslant j) = \sum_{i=1}^{K} \frac{i(i+1)(2i+1)}{6} P(U=i)$$

Soit, en développant :

$$\sum_{j=1}^{K} j^2 P(U \geqslant j) = \frac{1}{3}E(U^3) + \frac{1}{2}E(U^2) + \frac{1}{6}E(U)$$

3. a) Evidemment, si $j > n$, on a $P(T \geqslant j) = 0$ et si $0 \leq j \leq n$, on peut écrire, par indépendance de X et Y :

$$P(T \geqslant j) = P((X \geqslant j) \cap (Y \geqslant j)) = P(X \geqslant j)P(Y \geqslant j) = \left(\frac{n-j+1}{n+1}\right)^2$$

b) Ainsi :

$$E(T) = \sum_{j=1}^{n} P(T \geqslant j) = \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{j=1}^{n} (n-j+1)^2 = \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{j=1}^{n} j^2$$

Soit :

$$E(T) = \frac{1}{(n+1)^2} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(2n+1)}{6(n+1)}$$

4. On a, par indépendance de X et Y :

$E(Z^2) = E((X-Y)^2) = E(X^2) + E(Y^2) - 2E(X)E(Y)$

et puisque X et Y suivent la même loi :

$$E(Z^2) = 2(E(X^2) - E(X)^2) = 2\sigma_X^2$$

Exercice 3.3.

Soient n points distincts dans le plan. Soit p un entier supérieur ou égal à n. On dispose de p crayons de couleurs distinctes, et on colorie au hasard les n points $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

1. Dans cette question seulement, on suppose que $n = 6$. Que vaut la probabilité que, au moins 3 points aient la même couleur ou que au moins 3 points aient des couleurs distinctes ?

2. Calculer la probabilité $P_{n,p}(k)$ que k couleurs exactement apparaissent, lorsque :

a) $k = 1$,

b) $k = 2$,

c) $k = n$.

3. a) On désigne par $S_{n,k}$ le nombre de surjections d'un ensemble à n éléments vers un ensemble à k éléments.
Trouver une relation de récurrence liant $S_{n,k}, S_{n-1,k}$ et $S_{n-1,k-1}$.

b) Les entiers n, p et k étant donnés, décrire un algorithme et écrire un programme turbo-pascal permettant de calculer $S_{n,k}$.

c) Trouver une relation liant $S_{n,k}$ et $P_{n,p}(k)$, et en déduire une relation de récurrence liant les termes $P_{n,p}(k)$.

4) Etudier la convergence de la suite de terme général $\sqrt[p]{P_{p,p^2}(2)}$.

Solution :

1. Soit c le nombre de couleurs effectivement utilisées :

si $c \geqslant 3$, il y a au moins trois points qui ont des couleurs distinctes !

si $c = 1$, il y a au moins trois points de la même couleur ! !

si $c = 2$, comme il y a six points à colorier, il y en a au moins trois de l'une des deux couleurs utilisées.
La probabilité cherchée vaut donc 1.

2. Il y a p^n faons de colorier les n points, toutes équiprobables.

a) Il y a p couleurs disponibles, donc : $P_{n,p}(1) = \dfrac{p}{p^n}$.

b) On choisit une première couleur de p faons, puis on choisit une partie de $E = \{A_1, \ldots, A_n\}$, non vide et différente de E de $2^n - 2$ faons pour colorier ces points avec cette couleur, on choisit enfin une deuxième couleur de $p - 1$ faons pour achever le coloriage. Ainsi il y a $p(p-1)(2^n - 2)$ faons de colorier en utilisant deux couleurs et :

$$P_{n,p}(2) = \frac{p(p-1)(2^n - 2)}{p^n}$$

c) On choisit la couleur de A_1 de p faons, puis celle de A_2 de $p - 1$ faons, celle de A_3 de $p - 2$ faons, etc. Donc :

$$P_{n,p}(n) = \frac{p(p-1)\ldots(p-n+1)}{p^n}$$

3. a) Soit E de cardinal n, F de cardinal p et a un élément de E.
Les surjections φ de E vers F sont de deux sortes :
→ celles pour lesquelles la restriction de φ à $E' = E \setminus \{a\}$ est encore une surjection de E' vers F. On les obtient à partir des $S_{n-1,k}$ surjections de E' vers F, chacune d'elles pouvant se prolonger de k faons. Il y en a donc $kS_{n-1,k}$;
→ celles pour lesquelles la restriction de φ à E' n'est plus surjective de E' vers F. L'image de a par φ est un des éléments de F, disons b, et la restriction de φ à E' est une surjection de E' vers $F' = F \setminus \{b\}$. On trouve donc $kS_{n-1,k-1}$ surjections de ce type.
Finalement :

$$S_{n,k} = k(S_{n-1,k} + S_{n-1,k-1})$$

b) On procède récursivement, à partir de $S_{n,n} = n!$ et $S_{n,1} = 1$, pour $n \geqslant 1$. En supposant la fonction factorielle définie antérieurement, notée `fact`, cela donne :

```
function s(n : integer ; k :integer) :integer ;
begin
    if k=n then s := fact(n) else if k=1 then s :=1 else
    s :=k*(s(n-1,k)+s(n-1,k-1)) ;
end ; ...
```

c) On a $P_{n,p}(k) = \dfrac{\binom{p}{k} S_{n,k}}{p^n}$ (on commence par choisir k couleurs parmi les p disponibles, puis on construit une surjection de l'ensemble des n points vers l'ensemble de ces k couleurs).

Comme $\binom{p}{k} = \frac{p}{k}\binom{p-1}{k-1}$, il vient en remplaant dans la relation obtenue en 3. a) :

$$P_{n,p}(k) = \frac{k}{p} P_{n-1,p}(k) + \frac{p-k+1}{p} P_{n-1,p}(k-1)$$

4. On a $P_{p,p^2}(2) = \dfrac{p^2(p^2-1)(2^p-2)}{(p^2)^p}$, donc :

$$\sqrt[p]{P_{p,p^2}(2)} = \exp\left(\frac{1}{p}\ln\left(\frac{p^2(p^2-1)(2^p-2)}{(p^2)^p}\right)\right)$$

Or $\dfrac{1}{p}\ln\left(\dfrac{p^2(p^2-1)(2^p-2)}{(p^2)^p}\right) = \dfrac{1}{p}\ln p^2 + \dfrac{1}{p}\ln(p^2-1) + \dfrac{1}{p}\ln(2^p-2) - \ln p^2$

Les deux premiers termes sont de limite nulle, le troisième de limite $\ln 2$ et le dernier de limite $-\infty$, le tout est donc de limite $-\infty$ et :

$$\lim_{p\to\infty} \sqrt[p]{P_{p,p^2}(2)} = 0$$

Exercice 3.4.

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. Montrer que si X est une variable aléatoire à densité, prenant ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et admettant une espérance m, alors pour tout scalaire $\lambda > 0$, on a :

$$P(X \geqslant \lambda m) \leq \frac{1}{\lambda}.$$

2. Soit X une variable aléatoire positive à densité, f une densité de X, F sa fonction de répartition supposée strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. On suppose enfin X admet une espérance m.

a) Montrer que F réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $[0,1[$. On note F^{-1} la bijection réciproque.

b) Montrer que : $F^{-1}(\frac{1}{4}) \leq \frac{4m}{3}$; $F^{-1}(\frac{1}{2}) \leq 2m$; $F^{-1}(\frac{3}{4}) \leq 4m$.

3. Soit Y une variable aléatoire réelle à densité, admettant une densité g paire et admettant une variance σ^2. On suppose que la fonction de répartition G de Y est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

a) Vérifier que G réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$.

On note alors G^{-1} sa bijection réciproque et on pose $I = G^{-1}(\frac{3}{4}) - G^{-1}(\frac{1}{4})$.

b) Montrer que $P\big(|Y| > G^{-1}(\frac{3}{4})\big) \leq \big(\frac{2\sigma}{I}\big)^2$.

c) En déduire que $I \leq 2\sqrt{2}\,\sigma$.

Solution :

1. L'inégalité à démontrer (inégalité de Markov) est triviale si $0 < \lambda \leq 1$.
Si $\lambda > 1$, on écrit :

$$m = \int_0^{+\infty} x f(x)\,dx \geqslant \int_{\lambda m}^{+\infty} x f(x)\,dx \geqslant \lambda m \int_{\lambda m}^{+\infty} f(x)\,dx$$

Ainsi :

$$P(X \geqslant \lambda m) \leq \frac{m}{\lambda m} = \frac{1}{\lambda}$$

2. a) La fonction F est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, d'image $[0,1[$.
Elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $[0,1[$.

b) D'après l'inégalité de Markov, on a pour $\lambda \geqslant 1$:

$$1 - F(\lambda m) \leq \frac{1}{\lambda},\ \textit{i.e.}\ F(\lambda m) \geqslant 1 - \frac{1}{\lambda}$$

et, par croissance de F^{-1} :

$$\lambda m \geqslant F^{-1}(1 - \tfrac{1}{\lambda})$$

En choisissant successivement $\lambda = \frac{4}{3}, \lambda = 2$ et $\lambda = 4$, on obtient les inégalités :

$$F^{-1}(\tfrac{1}{4}) \leq \frac{4m}{3}\ ;\ F^{-1}(\tfrac{1}{2}) \leq 2m\ ;\ F^{-1}(\tfrac{3}{4}) \leq 4m$$

3. a) On démontre comme en 2. a) que G réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$.

b) On écrit :
$P(Y \leq G^{-1}(1/4)) = G(G^{-1}(1/4)) = 1/4$
$P(Y \geqslant G^{-1}(3/4)) = 1 - G(G^{-1}(3/4)) = 1/4$

Par suite $G^{-1}(1/4) = -G^{-1}(3/4)$ et $I = 2G^{-1}(3/4)$.

Posons alors $\lambda = \dfrac{I^2}{4\sigma^2}$ et appliquons l'inégalité de Markov à Y^2.

La variable aléatoire Y admet une variance, elle admet donc une espérance m et comme g est paire, on a $m = 0$. Donc $E(Y^2) = V(Y) = \sigma^2$.

Ainsi : $P(Y^2 \geqslant \lambda E(Y^2)) \leq \frac{1}{\lambda}$ s'écrit : $P(Y^2 \geqslant (G^{-1}(3/4))^2) \leq \big(\frac{2\sigma}{I}\big)^2$, soit :

$$P\big(|Y| > G^{-1}(\tfrac{3}{4})\big) \leq \big(\tfrac{2\sigma}{I}\big)^2$$

c) On a :

$$P\big(|Y| > G^{-1}(\tfrac{3}{4})\big) = P(Y \geqslant G^{-1}(3/4)) + P(Y \leq -G^{-1}(3/4))$$
$$= 1 - G(G^{-1}(3/4)) + G(G^{-1}(1/4)) = \frac{1}{2}$$

Ainsi $\big(\frac{2\sigma}{I}\big)^2 \geqslant \frac{1}{2}$, d'où $I \leq 2\sqrt{2}\,\sigma$.

Exercice 3.5.

1. Soit Z une variable aléatoire réelle à valeurs dans $]0,1[$, possédant une densité g continue sur $]0,1[$. Montrer que Z possède une espérance.

On suppose que pour tout $x \in]0,1[$, $g(1-x) = g(x)$. Quelle est, dans ce cas, l'espérance de Z ?

2. Montrer que la fonction $x \mapsto \sin x$ réalise une bijection de $\big[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\big]$ sur $[-1,1]$. On note φ sa bijection réciproque. Montrer que la fonction φ est dérivable sur $]-1,1[$ et calculer sa dérivée.

3. Soit $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$. Montrer que cette intégrale converge et la calculer.

4. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est une densité de probabilité.

Soit X une variable aléatoire réelle admettant f pour densité.

Déterminer $E(X)$ en utilisant la première question. Retrouver ce résultat en utilisant la définition de l'espérance et le changement de variable $x = (\sin\theta)^2$.

Solution :

1. Z est une variable bornée, elle admet donc des moments de tous ordres et, en particulier, admet une espérance.

Le changement de variable $u = 1 - t$ donne :

$$E(Z) = \int_0^1 t g(t)\,dt = \int_1^0 (1-u)g(1-u)(-du) = \int_0^1 (1-u)g(u)\,du$$
$$= \int_0^1 g(u)\,du - \int_0^1 u g(u)\,du = 1 - E(Z) :$$
$$E(Z) = \frac{1}{2}$$

2. La fonction sin est continue, strictement croissante sur $[-\pi/2, \pi/2]$ d'image $[-1, 1]$. Elle réalise donc une bijection entre ces deux intervalles et $\sin' = \cos$ est non nulle sur $]-\pi/2, \pi/2[$.
Ainsi la bijection réciproque φ est définie et continue sur $[-1, 1]$, d'image $[-\pi/2, \pi/2]$. De plus φ est dérivable sur $]-1, 1[$, avec :

$$\varphi'(t) = \frac{1}{\sin'(\varphi(t))} = \frac{1}{\cos(\varphi(t))} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\varphi(t)}} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

3. La fonction à intégrer est continue sur $]0, 1[$, équivalente à $x \mapsto \frac{1}{x^{1/2}}$ au voisinage de 0 et à $x \mapsto \frac{1}{(1-x)^{1/2}}$ au voisinage de 1.
Deux applications de la règle de Riemann et la relation de Chasles prouvent alors que l'intégrale proposée converge.

On écrit $x(1-x) = x - x^2 = -(x-\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}(1-(2x-1)^2)$, d'où à l'aide du changement de variable $t = 2x - 1$:

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \int_0^1 \frac{2\,dx}{\sqrt{1-(2x-1)^2}} = \int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

Ainsi en intégrant sur un segment $[u, v]$ inclus dans $]-1, 1[$ et en passant à la limite :

$$I = \big[\varphi(t)\big]_{\to -1}^{\to 1} = \pi$$

4. $\star$ Le calcul précédent montre que f est bien une densité de probabilité (fonction positive, continue sauf en -1 et 1 où elle admet des limites infinies, intégrale sur $\mathbb{R}$ convergente de valeur 1)

$\star$ La fonction f vérifie les conditions de la question 1. donc :

$$E(Z) = \frac{1}{2}$$

$\star$ Le calcul direct, à l'aide du changement de variable $x = \sin^2\theta$, qui est de classe $\mathcal{C}^1$, strictement monotone sur $[0, \pi/2]$, d'image $[0, 1]$, donc légitime directement avec les bornes de l'énoncé, donne :

$$E(Z) = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2\theta \times 2\sin\theta\cos\theta\,d\theta}{\sqrt{\sin^2\theta(1-\sin^2\theta)}}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} 2\sin^2\theta\,d\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} (1-\cos(2\theta))\,d\theta = \frac{1}{\pi}\Big[\theta - \frac{1}{2}\sin(2\theta)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

et on retrouve :

$$E(Z) = \frac{1}{2}$$

Exercice 3.6.

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes telles que X suit la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$ et Y suit la loi uniforme sur l'intervalle $]-1,1[$.

On pose $T = X + Y$ et $Z = \lfloor T \rfloor$ (où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière du réel x).

1. Préciser les valeurs prises par Z.

2. Expliciter la loi de Z.

3. Calculer $E(Z)$ et $V(Z)$.

4. On désigne par F la fonction de répartition de T. Calculer $F(t)$ pour :

   a) $t < 0$;
   b) $t \in [0,1[$;
   c) $t \in [k, k+1[$ avec $k \in \mathbb{N}^*$.

5. En déduire que T est une variable aléatoire à densité et donner une densité de T.

Solution :

1.$X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $Y(\Omega) =]-1,1[$, comme les intervalles $[k-1, k+1[, k \in \mathbb{N}^*$ recouvrent $\mathbb{R}_+^*$, on a $T(\Omega) = \mathbb{R}_+^*$ et $Z(\Omega) = \mathbb{N}$.

2. La famille $(X = k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements, donc pour tout i de $\mathbb{N}$:

$$(Z = i) = (X + Y \in [i, i+1[) = \bigcup_{k=1}^{\infty} ((X + Y \in [i, i+1[) \cap (X = k))$$

$$= \bigcup_{k=1}^{\infty} ((Y \in [i-k, i-k+1[) \cap (X = k))$$

Compte tenu des valeurs prises par Y, seules interviennent les valeurs de k telles que $[i-k, i-k+1[\cap]-1,1[\neq \emptyset$, et donc :

$\rightarrow (Z = 0) = (X = 1) \cap (Y \in]-1,0[)$;

$\rightarrow$ Pour $i \geqslant 1$:

$$(Z = i) = ((X = i) \cap (Y \in [0,1[)) \cup ((X = i+1) \cap (Y \in]-1,0[)$$

D'où, par disjonction et indépendance :

$$\begin{cases} P(Z = 0) = \dfrac{p}{2} \\ \forall\, i \geqslant 1, P(Z = i) = \dfrac{1}{2}(q^{i-1}p + q^i p) = \dfrac{1}{2}p(1+q)q^{i-1} \end{cases}$$

3. Les séries rencontrées sont des dérivées de séries géométriques, dont la convergence est connue. On peut alors écrire :

$\star$ $E(Z) = \sum_{i=0}^{\infty} iP(Z=i) = \sum_{i=1}^{\infty} iP(Z=i) = \frac{1}{2}p(1+q)\sum_{i=1}^{\infty} iq^{i-1}$

$$E(Z) = \frac{1}{2}p(1+q)\times\frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1+q}{2p}$$

$\star$ Puis :

$$E(Z(Z-1)) = \sum_{i=0}^{\infty} i(i-1)P(Z=i) = \sum_{i=2}^{\infty} i(i-1)P(Z=i)$$

$$= \frac{1}{2}pq(1+q)\sum_{i=2}^{\infty} i(i-1)q^{i-2} = \frac{1}{2}pq(1+q)\times\frac{2}{(1-q)^3}$$

Donc :

$$E(Z(Z-1)) = \frac{q(1+q)}{p^2}$$

et :

$V(Z) = E(Z(Z-1)) + E(Z) - E(Z)^2 = \frac{q(1+q)}{p^2} + \frac{1+q}{2p} - \frac{(1+q)^2}{4p^2}$, soit :

$$V(Z) = \frac{(2q+p)(1+q)}{2p^2} - \frac{(1+q)^2}{4p^2} = \frac{(1+q)^2}{4p^2}$$

4. a) T prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, donc si $t<0$, $F(t)=0$.

b) Si $t \in [0,1[$, on a $(X+Y \leq t) = (X=1) \cap (Y \leq t-1)$ et comme $P(X=1)=p$ et $P(Y \leq t-1) = \frac{(t-1)-(-1)}{2}$, il vient par indépendance :

$$F(t) = \frac{pt}{2}$$

c) Plus généralement, si $t \in [k, k+1[$, alors en suivant les valeurs accessibles pour la variable aléatoire X :

$$F(t) = P(X+Y \leq t)$$
$$= P(X \leq k-1) + P(X=k)P(Y \leq t-k) + P(X=k+1)P(Y \leq t-k-1)$$
$$= 1 - q^{k-1} + q^{k-1}p\,\frac{t-k+1}{2} + q^k p\,\frac{t-k}{2}$$

5. La fonction F est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sauf aux points entiers, où F admet une dérivée à gauche et une dérivée à droite. Par conséquent $X+Y$ est bien une variable aléatoire à densité, une densité f de $X+Y$ étant donnée, par exemple, par :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t<0 \\ \frac{p}{2} & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ \frac{q^{k-1}p}{2}(1+q) & \text{si } t \in [k, k+1[\text{ avec } k \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Exercice 3.7.

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée, d'écart-type σ, le paramètre réel inconnu σ étant strictement positif.

1. Montrer que la variable aléatoire $T = \dfrac{X^2}{2\sigma^2}$ suit la loi $\gamma(1/2)$.

2. Pour n entier de $\mathbb{N}^*$, on considère un n-échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ indépendant, identiquement distribué, de la loi de X.

a) Donner une densité de la variable aléatoire $S_n = \dfrac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} X_i^2$.

b) Soit Y_n définie par $Y_n = \dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2$. Montrer que Y_n est un estimateur sans biais de σ^2.

c) En justifiant son existence, calculer l'espérance $E(\sqrt{Y_n})$ en fonction de n et σ.
En déduire un estimateur $\widehat{\sigma_n}$ sans biais du paramètre σ.

3. a) En justifiant son existence, calculer la variance $V(\widehat{\sigma_n})$ en fonction de n et σ.

b) On admet que, pour tout réel $x > 0$, on a $\Gamma(x+n) \underset{(n\to\infty)}{\sim} n^x(n-1)!$.
Montrer que $\widehat{\sigma_n}$ est un estimateur convergent de σ.

Solution :

1. Une densité f_X de X est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_X(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \times \mathrm{e}^{-x^2/2\sigma^2}$ et si on note F_X la fonction de répartition de X, on a :

$\forall\, t \geqslant 0, F_T(t) = P(T \leq t) = P(X^2 \leq 2\sigma^2 t) = F_X(\sigma\sqrt{2t}) - F_X(-\sigma\sqrt{2t})$

et par dérivation, une densité f_T de T est :

$$f_T(t) = \begin{cases} \dfrac{\sigma}{\sqrt{2t}} f_X(\sigma\sqrt{2t}) + \dfrac{\sigma}{\sqrt{2t}} f_X(-\sigma\sqrt{2t}) & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

soit :

$$f_T(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} t^{-1/2} \mathrm{e}^{-t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

Comme $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, on reconnaît :

$$T \hookrightarrow \gamma(1/2)$$

2. a) Les variables aléatoires $\dfrac{X_i^2}{2\sigma^2}$ sont indépendantes et de même loi $\gamma(1/2)$, on sait alors que S_n suit la loi $\gamma(n/2)$, dont une densité f_{S_n} est définie par :

$$f_{S_n}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(n/2)} \times t^{\frac{n}{2}-1} \mathrm{e}^{-t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

b) On sait aussi que $E(S_n) = \dfrac{n}{2}$ et comme $Y_n = \dfrac{2\sigma^2}{n} S_n$:

$$E(Y_n) = \frac{2\sigma^2}{n} \times \frac{n}{2} = \sigma^2$$

Y_n est un estimateur sans biais de σ^2.

c) On a $\sqrt{Y_n} = \sigma\sqrt{\dfrac{2}{n}}\sqrt{S_n}$ et, par le théorème de transfert, on a (la convergence (absolue) est évidente) :

$$E(\sqrt{S_n}) = \frac{1}{\Gamma(n/2)} \int_0^{+\infty} x^{\frac{1}{2}} x^{\frac{n}{2}-1} \mathrm{e}^{-x} dx = \frac{1}{\Gamma(n/2)} \times \Gamma((n+1)/2)$$

$$E(\sqrt{Y_n}) = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(n/2)} \times \sigma\sqrt{\frac{2}{n}}$$

Ainsi :

$$\widehat{\sigma_n} = \frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma((n+1)/2)} \times \sqrt{\frac{nY_n}{2}} \text{ est un estimateur sans biais de } \sigma$$

3. a) Posons $a_n = \dfrac{\Gamma(n/2)}{\Gamma((n+1)/2)}$, on a :

$$V(\widehat{\sigma_n}) = \frac{n}{2} a_n^2 V(\sqrt{Y_n}) = \frac{n}{2} a_n^2 (E(Y_n) - [E(\sqrt{Y_n})]^2)$$

or$E(Y_n) = \sigma^2$ et $[E(\sqrt{Y_n})]^2 = \dfrac{2\sigma^2}{n} \times \dfrac{1}{a_n^2}$, d'où :

$$V(\widehat{\sigma_n}) = \sigma^2 \big(\frac{na_n^2}{2} - 1\big)$$

b) Le résultat admis donne : $\Gamma(n + \frac{1}{2}) \underset{(\infty)}{\sim} \sqrt{n}.(n-1)!$ et on sait que pour tout k de $\mathbb{N}^*$, $\Gamma(k) = (k-1)!$ On distingue donc deux cas :

$\star$ Si n est pair, $n = 2p$, alors $a_{2p} = \dfrac{\Gamma(p)}{\Gamma(p+1/2)} \underset{(\infty)}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{p}}$, soit $a_n \sim \sqrt{\dfrac{2}{n}}$;

$\star$ Si n est impair $n = 2p+1$, $a_{2p+1} = \dfrac{\Gamma(p+1/2)}{\Gamma(p+1)} = \dfrac{\Gamma(p+1/2)}{p\Gamma(p)} \underset{(\infty)}{\sim} \dfrac{\sqrt{p}}{p}$, soit

$$a_n \sim \frac{1}{\sqrt{p}} = \sqrt{\frac{2}{n-1}} \sim \sqrt{\frac{2}{n}}$$

Dans tous les cas on a $a_n \sim \sqrt{\frac{2}{n}}$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{na_n^2}{2} = 1$, soit $\lim\limits_{n\to\infty} V(\widehat{\sigma_n}) = 0$ et $\widehat{\sigma_n}$ est un estimateur convergent de σ.

Exercice 3.8.

Soit X une variable aléatoire de densité f continue et strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$, nulle sur $\mathbb{R}_-^*$. On note F la fonction de répartition de X.
On suppose que X admet une espérance notée $E(X)$.

1. a) Justifier que l'on peut définir une fonction réciproque F^{-1} entre des intervalles à préciser.

b) Calculer $\displaystyle\int_0^1 F^{-1}(t)\,dt$.

Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $T(x) = \dfrac{1}{E(X)} \displaystyle\int_0^x t\,f(t)\,dt$.

2. a) Justifier que T est définie sur $\mathbb{R}_+$ et qu'on peut définir une fonction G sur $\mathbb{R}$ par :

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ T \circ F^{-1}(x) & \text{si } x \in]0,1[\\ 1 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

b) Vérifier que G possède les propriétés caractérisant une fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

c) Retrouver ainsi à l'aide de G le calcul de $\displaystyle\int_0^1 F^{-1}(t)\,dt$.

3. Montrer qu'une variable aléatoire Y de fonction de répartition G admet une espérance, et que

$$E(Y) = 1 - \int_0^{+\infty} T(u) f(u)\,du$$

Solution :

1. a) F est nulle sur $\mathbb{R}^-$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée strictement positive. Ainsi F est continue strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, d'image $[0,1[$, on peut donc définir F^{-1} sur $[0,1[$ et F^{-1} réalise une bijection strictement croissante de $[0,1[$ sur $[0,+\infty[$.

b) Effectuons le changement de variable $x = F^{-1}(t)$, *i.e.* $t = F(x)$, qui est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout segment $[\alpha, \beta]$, avec $0 < \alpha < \beta < 1$. Il vient :

$$\int_\alpha^\beta F^{-1}(t)\,dt = \int_{F^{-1}(\alpha)}^{F^{-1}(\beta)} x.F'(x)\,dx = \int_{F^{-1}(\alpha)}^{F^{-1}(\beta)} x.f(x)\,dx$$

Comme X admet une espérance, on peut faire tendre α vers 0 et β vers 1 et :

$$\int_0^1 F^{-1}(t)\,dt = \int_0^{+\infty} xf(x)\,dx = E(X)$$

2. a) L'espérance $E(X)$ est strictement positive, donc T est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$, nulle en 0, de limite 1 en $+\infty$ et strictement croissante, puisque de dérivée $x \mapsto \dfrac{1}{E(X)} xf(x)$ strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$.

Ainsi $T \circ F^{-1}$ est bien définie sur $]0,1[$, de limite 0 en 0^+ et de limite 1 en 1^-.

b) G est en fait continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$, avec :

$$\forall\, x \in]0,1[, G'(x) = T'(F^{-1}(x))(F^{-1})'(x)$$

Or $T'(x) = \dfrac{1}{E(X)}\, xf(x)$ et $(F^{-1})'(x) = \dfrac{1}{F'(F^{-1}(x))} = \dfrac{1}{f(F^{-1}(x))}$, d'où :

$$\forall\, x \in]0,1[, G'(x) = \frac{1}{E(X)} F^{-1}(x) f(F^{-1}(x)) \frac{1}{f(F^{-1}(x))} = \frac{F^{-1}(x)}{E(X)}$$

Donc G est croissante de limite nulle en $-\infty$ (en fait nulle sur $\mathbb{R}^-$) et de limite 1 en $+\infty$ (en fait valant 1 sur $[1, +\infty[$) et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux : c'est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

c) Comme $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} G'(x)\,dx = 1 = \int_0^1 G'(x)\,dx$ (vrai pour toute densité), on retrouve bien :

$$\int_0^1 F^{-1}(t)\,dt = E(X)$$

3. Soit $a > 0$, on écrit : $\displaystyle\int_0^a tG'(t)\,dt = \frac{1}{E(X)} \int_0^a t.F^{-1}(t)\,dt$

Soit, en effectuant le changement de variable $t = F(x)$:

$$\int_0^a tG'(t)\,dt = \frac{1}{E(X)} \int_0^{F^{-1}(a)} F(x)x.f(x)\,dx$$

Comme $F(x)xf(x) \underset{(+\infty)}{\sim} xf(x)$, le fait que X admet une espérance donne la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} xf(x)\,dx$ donc celle de $\displaystyle\int_0^{+\infty} F(x)xf(x)\,dx$ et :

$$E(Y) = \int_0^{+\infty} tG'(t)\,dt = \frac{1}{E(X)}\int_0^{+\infty} F(x)x.f(x)\,dx$$

D'autre part, l'équivalent $T(u)f(u) \underset{+\infty)}{\sim} f(u)$ donne la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} T(u)f(u)\,du$ et en procédant à une intégration par parties, directement avec la borne infinie :

$$\int_0^{+\infty} T(u)f(u)\,du = \big[T(u)F(u)\big]_0^{\to+\infty} - \int_0^{+\infty} T'(u)F(u)\,du$$

$$= 1 - \int_0^{+\infty} \frac{1}{E(X)} uf(u)F(u)\,du$$

Finalement, la comparaison des deux expressions obtenues donne :

$$E(Y) = 1 - \int_0^{+\infty} T(u)f(u)\,du$$

Exercice 3.9.

Trois personnes, notées A, B et C entrent simultanément dans un magasin ayant deux bornes d'accueil. A et B occupent immédiatement (à l'instant 0) les deux bornes, C attend et occupe la première borne laissée libre par A ou B (on suppose que le temps de changement de personne est négligeable).

On suppose que les temps passés à une borne par A, B et C sont des variables aléatoires indépendantes, suivant toutes la loi uniforme sur $[0, 1]$ et notées respectivement X, Y et Z.

1. On pose $U = \sup(X, Y)$ et $V = \inf(X, Y)$.

   a) Déterminer les fonctions de répartition de U et V, ainsi qu'une densité de chacune d'elles.

   b) Déterminer l'espérance et la variance de U et V.

2. On note T le temps total passé par C dans le magasin.

   a) Déterminer la loi de T.

   b) Déterminer l'espérance de T.

Solution :

1. a) U et V prennent leurs valeurs entre 0 et 1, et pour $x \in [0, 1]$, on a par indépendance de X et Y :

$\star$ $P(U \leq x) = P((X \leq x) \cap (Y \leq x)) = P(X \leq x)P(Y \leq x) = x^2$.

$\star$ $P(V > x) = P((X > x) \cap (Y > x)) = P(X > x)P(Y > x) = (1-x)^2$

Donc :

$$F_U(x) = x^2 \text{ et } F_V(x) = 1 - (1-x)^2$$

Par dérivation, on peut donc prendre pour densité sur $[0,1]$:

$$f_U(x) = 2x \text{ et } f_V(x) = 2(1-x)$$

b) $\star$ $E(U) = \displaystyle\int_0^1 x \times 2x\, dx = \left[\frac{2}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{2}{3}$.

$$E(V) = \int_0^1 x \times 2(1-x)\, dx = \left[x^2 - \frac{2}{3}\, x^3\right]_0^1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$\star$ $E(U^2) = \displaystyle\int_0^1 x^2 \times 2x\, dx = \left[\frac{1}{2}x^4\right]_0^1 = \frac{1}{2}$.

$$E(V^2) = \int_0^1 x^2 \times 2(1-x)\, dx = \left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}\, x^4\right]_0^1 = \frac{1}{6}$$

et donc :

$$V(U) = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18},\ V(V) = \frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{1}{18}$$

2. a) Puisque C prend la place laissée libre par le premier de A et de B qui a fini, on a :

$$C = \inf(X, Y) + Z = V + Z$$

Comme V et Z sont indépendantes, on obtient par convolution, et en notant f_T une densité de T :

$$f_T(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_V(t) f_Z(x-t)\, dt = \int_0^1 f_V(t) f_Z(x-t)\, dt$$

Il n'y a du grain à moudre que si $x - t$ est compris entre 0 et 1, et comme t est aussi compris entre 0 et 1, on distingue plusieurs cas :

$\star$ Si $0 \leq x \leq 1$, l'intégration porte en fait sur le segment $[0, x]$ et :

$$f_T(x) = \int_0^x 2(1-t) \times 1\, dt = 2x - x^2$$

$\star$ Si $1 \leq x \leq 2$, l'intégration porte en fait sur le segment $[x-1, 1]$ et :

$$f_T(x) = \int_{x-1}^1 2(1-t) \times 1\, dt = (x-2)^2$$

$\star$ Si $x > 2$ ou si $x < 0$, alors $0 \leq t \leq 1$ est incompatible avec $0 \leq x - t \leq 1$ et $f_T(x) = 0$.

b) On a donc $E(T) = \int_0^1 t(2t - t^2)\,dt + \int_1^2 t(t-2)^2\,dt$ et le calcul s'achève sans peine :

$$E(T) = \frac{5}{6}$$

Exercice 3.10.

Soit $(U_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées de loi uniforme sur le segment $[0,1]$. On note alors :

$$V_n = (U_n)^n \text{ et } V = \sup\{V_n,\ n \geqslant 1\}$$

1. Soit $n \geqslant 1$. Montrer que V_n est une variable aléatoire à densité et préciser $E(V_n)$.

2. Pour tout réel x tel que $0 \leq x \leq 1$ et tout entier n tel que $n \geqslant 1$, montrer l'inégalité : $1 - x \leq n(1 - x^{1/n})$.

3. Pour x réel tel que $0 \leq x \leq 1$ et n entier tel que $n \geqslant 1$, on pose $A_n(x) = [V_n \geqslant x]$. Calculer $P(A_n(x))$.

4. Soit x réel tel que $0 \leq x < 1$. Montrer que la série $\sum P(A_n(x))$ diverge.

5. On pourra utiliser sans démonstration le résultat suivant (lemme de Borel Cantelli) :

Soit $(A_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'événements indépendants d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que $\sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n)$ diverge, alors, presque sûrement, une infinité d'événements A_n se réalisent.

a) Montrer que pour tout réel x tel que $0 \leq x < 1$, on a $P([V \geqslant x]) = 1$.

b) En déduire, en utilisant le théorème de la limite monotone, que $P([V = 1]) = 1$.

Solution :

1. Notons F_n la fonction de répartition de V_n. On a :

$$\forall\, t < 0, F_n(t) = 0,\ \forall\, t > 1, F_n(t) = 1$$

et pour $t \in [0,1]$, on a :

$$F_n(t) = P(U_n \leq t^{1/n}) = t^{1/n}$$

Ainsi F_n est continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, donc V_n est une variable aléatoire à densité, de densité $f_n(t) = \frac{1}{n} t^{\frac{1}{n}-1}$, sur $]0,1[$.
On a alors :

$$E(V_n) = \int_0^1 \frac{1}{n} t^{\frac{1}{n}-1+1}\, dt = \Big[\frac{1}{n}\frac{t^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1}\Big]_0^1 = \frac{1}{1+n}$$

2. Soit $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto 1 - x - n(1-x^{1/n})$, φ est dérivable sur $]0,1]$, et on a :

$$\varphi'(x) = -1 + x^{\frac{1}{n}-1} = -1 + \mathrm{e}^{(\frac{1}{n}-1)\ln x} \geqslant 0$$

Donc φ croît et comme $\varphi(1) = 0$, φ est négative sur $[0,1]$

$$\forall\, x \in [0,1], \forall\, n \in \mathbb{N}^*, 1 - x \leq n(1 - x^{1/n})$$

3. Pour $x \in [0,1]$:

$$P(A_n(x)) = P(V_n \geqslant x) = 1 - F_n(x) = 1 - x^{1/n}$$

4. Pour $x \in [0,1[$, on écrit : $P(A_n(x)) \geqslant \frac{1}{n}(1-x)$ et comme la série de terme général $\frac{1}{n}$ diverge, il en est de même de la série de terme général $P(A_n(x))$.

5. a) L'indépendance des variables aléatoires U_n donne l'indépendance des événements $A_n(x)$. Par conséquent, d'après le lemme de Borel-Cantelli, presque sûrement une infinité d'événements $A_n(x)$ se produisent lorsque $x \in [0,1[$.
Donc :

$$P(V \geqslant x) = P(\sup\{V_n, n \geqslant 1\} \geqslant x) = 1$$

b) Par le théorème de la limite monotone, on a :

$$\begin{aligned} P(V = 1) &= P(\bigcap_{n=1}^{\infty}(V \geqslant 1 - \frac{1}{n})) = \lim_{N\to\infty} P(\bigcap_{n=1}^{N}(V \geqslant 1 - \frac{1}{n})) \\ &= \lim_{N\to\infty} P(V \geqslant 1 - \frac{1}{N}) = 1 \end{aligned}$$

Exercice 3.11.

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. Soit U une variable aléatoire discrète, à valeurs dans $\mathbb{N}$, admettant un moment d'ordre deux.

a) Démontrer la formule : $E(U) = \sum_{j=1}^{+\infty} P(U \geqslant j)$, ($E(.)$ désignant l'espérance).

b) Exprimer de même la somme $\sum_{j=1}^{+\infty} jP(U \geqslant j)$ en fonction de $E(U^2)$ et $E(U)$.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires discrètes, à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendantes, de même loi.

On note pour tout $k \in \mathbb{N}$, $p_k = P(X_n = k)$ et $F_k = \sum_{j=0}^{k} p_j$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $M_n = \sup_{1\leq i\leq n} (X_i)$.

2. Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la probabilité $P(M_n \leq k)$ en fonction de F_k et n.

3. On suppose dans cette question que les variables X_n suivent la loi uniforme sur $\mathbb{N}_K = \{1, 2, \ldots, K\}$, où K est un entier strictement supérieur à 1.

a) Calculer pour tout $k \in \mathbb{N}_K$, la probabilité $P(M_n = k)$.

b) On jette trois dés équilibrés ; quelle est la probabilité que le plus grand des chiffres obtenus soit 4 ?

4. On suppose maintenant que les variables X_n suivent la loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$ de paramètre p (avec $0 < p < 1$) et on note $q = 1 - p$.

a) Calculer $E(M_n)$.

b) Trois joueurs jouent à Pile ou Face avec une pièce équilibrée et s'arrêtent dès qu'ils ont obtenu un Pile. La variable aléatoire M_3 est alors le nombre de jets effectués par le ou les joueurs ayant obtenu Pile en dernier. Calculer $E(M_3)$.

Solution :

1. a) Par la propriété de Fubini, on a :

$$\sum_{j\geqslant 1} P(U \geqslant j) = \sum_{j\geqslant 1} P\Big(\bigcup_{k\geqslant j} (U = k)\Big) = \sum_{j\geqslant 1} \Big[\sum_{k\geqslant j} P(U = k)\Big]$$

$$= \sum_{k\geqslant 1} \Big[\sum_{j=1}^{k} P(U = k)\Big] = \sum_{k\geqslant 1} kP(U = k)$$

soit :

$$\sum_{j\geqslant 1} P(U \geqslant j) = E(U)$$

b) De même, on a :

$$\sum_{j\geqslant 1} jP(U \geqslant j) = \sum_{j\geqslant 1} jP\Big(\bigcup_{k\geqslant j} U = k\Big) = \sum_{j\geqslant 1} \Big[\sum_{k\geqslant j} jP(U = k)\Big]$$

$$= \sum_{k\geqslant 1} \Big[\sum_{j=1}^{k} jP(U = k)\Big] = \sum_{k\geqslant 1} \frac{k(k+1)}{2} P(U = k)$$

soit :

$$\sum_{j\geqslant 1} jP(U \geqslant j) = \frac{1}{2}[E(U^2) + E(U)]$$

2. Sachant que : $(M_n \leq k) = \bigcap_{i=1}^{n} (X_i \leq k)$, on en déduit, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$P(M_n \leq k) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leq k) = (F_k)^n$$

3. a) Si μ est la loi uniforme sur $\mathbb{N}_K$, on a $p_k = \frac{1}{K}$; de plus $F_0 = 0$. Pour tout $k \in \mathbb{N}_K$, il vient $F_k = \frac{k}{K}$ et :

$$P(M_n = k) = P(M_n \leq k) - P(M_n \leq k-1) = (F_k)^n - (F_{k-1})^n$$

soit :

$$P(M_n = k) = \frac{1}{K^n}[k^n - (k-1)^n]$$

b) Les dés étant équilibrés, μ est la loi uniforme sur $\mathbb{N}_6$. D'où :

$$P(M_3 = 4) = \frac{1}{6^3}(4^3 - 3^3) = \frac{37}{216}.$$

4 a) Si μ est la loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$ de paramètre p, on a : $F_k = \sum_{j=1}^{k} pq^{j-1} = 1 - q^k$

et donc : $P(M_n \leq k) = (1-q^k)^n$.

On a alors $P(M_n \leq 1) = 1$ et pour $k \geqslant 2$,

$$\begin{aligned} P(M_n \geqslant k) &= 1 - P(M_n \leq k-1) = 1 - (1-q^{k-1})^n \\ &= \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{j+1} q^{j(k-1)} \end{aligned}$$

Il résulte alors de la première question :

$$\begin{aligned} E(M_n) &= 1 + \sum_{k\geqslant 2} \Big(\sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{j+1} q^{j(k-1)} \Big) \\ &= 1 + \sum_{j=1}^{n} \Big[\binom{n}{j} (-1)^{j+1} \Big(\sum_{k\geqslant 2} q^{j(k-1)} \Big) \Big] = 1 + \sum_{j=1}^{n} \Big[\binom{n}{j} (-1)^{j+1} \frac{q^j}{1-q^j} \Big] \end{aligned}$$

b) Dans le cas $p = q = \frac{1}{2}$ et $n = 3$, on obtient $E(M_3) = \frac{22}{7}$.

Exercice 3.12.

On dispose d'une pièce de monnaie donnant « pile » avec la probabilité p et « face » avec la probabilité $q = 1 - p$ (avec $p \in]0, 1[$).

On lance cette pièce, les lancers étant indépendants les uns des autres, et on note N le nombre aléatoire de lancers nécessaires à la première apparition de « pile » (on pose $N = -1$ si « pile » n'apparaît jamais).
Quand « pile » apparaît au bout de n lancers, on effectue une série de n lancers avec cette même pièce et on note X le nombre de « pile » obtenus au cours de cette série.

1. Quelle est la loi de N ?

2. Déterminer la loi du couple (N, X).

3. Calculer $P(X = 0)$ et $P(X = 1)$.

4. Pour tout entier naturel k non nul, exprimer $P(X = k)$ sous forme d'une série.

5. Calculer la somme de cette série.
On rappelle que si $|x| < 1$ *alors* $\sum_{k=r}^{+\infty} \binom{k}{r} x^{k-r} = \frac{1}{(1-x)^{r+1}}$

6. Déterminer l'espérance de X par deux méthodes : une première fois par calcul direct, une deuxième en utilisant la formule de l'espérance totale. Pourquoi ce résultat est-il raisonnable ?

Solution :

1. La variable aléatoire N représente le temps d'attente du premier « pile » lors de lancers successifs indépendants. N suit donc la loi géométrique de paramètre p et $P(N = -1) = 0$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la loi de X sachant $(N = n)$ est la loi binomiale de paramètres n et p. On a donc :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \forall\, k \in [\![0, n]\!], P((N, X) = (n, k)) = P(N = n) P_{(N=n)}(X = k)$$

$$P((N, X) = (n, k)) = P(N = n) P_{(\boldsymbol{N=n})}(X = k) = (1-p)^{\boldsymbol{n}-1} p \binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k}} p^{\boldsymbol{k}} (1-p)^{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k}}.$$

ou encore :

$$P((N, X) = (n, k)) = \binom{n}{k} p^{k+1} (1-p)^{2n-k-1}$$

3. a) On utilise le système quasi-complet d'événements $(N = n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ pour calculer les probabilités des événements liés à X.
On a :

$$P(X = 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} P((N, X) = (n, 0)) = \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{n}{0} p^{0+1} (1-p)^{2n-0-1}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} p(1-p)^{2n-1}$$

On reconnaît une série géométrique de raison $(1-p)^2$ et on obtient :

$$P(X=0) = p(1-p)\frac{1}{1-(1-p)^2} = \frac{1-p}{2-p}$$

b) De même :

$$P(X=1) = \sum_{n=1}^{+\infty} P((N,X)=(n,1)) = \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{n}{1} p^{1+1}(1-p)^{2n-1-1}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} np^2(1-p)^{2n-2}$$

ou encore :

$$P(X=1) = p^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n\big[(1-p)^2\big]^{n-1} = p^2 \frac{1}{[1-(1-p)^2]^2} = \frac{1}{(2-p)^2}$$

4. Selon le même principe, on a :

$$P(X=k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^{k+1}(1-p)^{2n-k-1}$$

5. On en déduit :

$$P(X=k) = p^{k+1}(1-p)^{k-1} \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} [(1-p)^2]^{n-k}$$

donc :

$$P(X=k) = p^{k+1}(1-p)^{k-1}\frac{1}{[1-(1-p)^2]^{k+1}} = \frac{(1-p)^{k-1}}{(2-p)^{k+1}}$$

À noter que cette formule est valable pour tout k de $\mathbb{N}^*$.

6. a) Effectuons le calcul direct. Comme $\frac{1-p}{2-p} \in [0,1[$, la série de terme général $k\big(\frac{1-p}{2-p}\big)^{k-1}$ est convergente. Ainsi, $E(X)$ existe. On peut écrire :

$$E(X) = 0\frac{1-p}{2-p} + \frac{1}{(2-p)^2} \sum_{k=1}^{+\infty} k\big(\frac{1-p}{2-p}\big)^{k-1}$$

donc :

$$E(X) = \frac{1}{(2-p)^2} \times \frac{1}{(1-\frac{1-p}{2-p})^2} = 1$$

b) Appliquons la formule de l'espérance totale.

- $\forall\, n \in \mathbb{N}, E(X|(N=n)) = np$
- Soit $e_n = \sum_{k=0}^{n} kP_{(N=n)}(X=k) = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} p^{k+1}(1-p)^{2n-k-1}$.

Calculons cette somme :

$$e_n = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} p^{k+1}(1-p)^{2n-k-1} = \sum_{j=0}^{n-1} n\binom{n-1}{j} p^{j+2}(1-p)^{2n-j-2}$$

$$= np^2(1-p)^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} p^j(1-p)^{n-1-j} = np^2(1-p)^{n-1}.$$

Ainsi, la série de terme général e_n est convergente car $|1-p| < 1$.
On en déduit que l'espérance de X existe et que :

$$E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} E(X|(N=n))P(N=n) = \sum_{n=1}^{+\infty} np(1-p)^{n-1}p$$

$$= p^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n(1-p)^{n-1}$$

donc :

$$E(X) = p^2 \times \frac{1}{(1-(1-p))^2} = 1$$

c) Ce résultat est raisonnable dans la mesure où le nombre de lancers effectués dans la deuxième phase *compense* le retard pris dans la première série de lancers : n vaut *en moyenne* $\frac{1}{p}$, donc np vaut *en moyenne* 1.

Exercice 3.13.

Soit X une variable aléatoire réelle, dont une densité f_X est donnée par :

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\beta}{x^{\beta+1}} & \text{si } x > 1 \\ 0 & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$

où β désigne un paramètre réel strictement positif. On dira que X suit la loi $\mathcal{P}(\beta)$.

1. On pose $Y = \ln X$. Déterminer une densité f_Y de la variable aléatoire Y.

2. Pour n entier supérieur ou égal à 3, on considère un n-échantillon $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ indépendant, identiquement distribué, de la loi $\mathcal{P}(\beta)$, et on suppose que le paramètre β est inconnu.

a) Quelle est la loi de la variable aléatoire Z_n définie par $Z_n = \sum_{i=1}^{n} \ln X_i$? (On donnera une densité de probabilité de Z_n.)

b) On pose $\widehat{\beta_n} = \frac{n}{Z_n}$. Calculer l'espérance $E(\widehat{\beta_n})$ et la variance $V(\widehat{\beta_n})$ de la variable aléatoire $\widehat{\beta_n}$, après en avoir justifié l'existence.

Quelles conclusions peut-on en tirer à propos de $\widehat{\beta_n}$ en tant qu'estimateur du paramètre β ?

3. On pose $T_n = \sqrt{n}\,\dfrac{\widehat{\beta_n} - \beta}{\beta}$, et on admet que la suite $(T_n)_{n\geqslant 3}$ converge en loi vers une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.
Donner, pour n assez grand, un intervalle de confiance du paramètre β , au rique α donné. On notera b la réalisation de $\widehat{\beta_n}$ sur l'échantillon observé.

4. Soit $(X_1^*, \ldots, X_m^*)$ un m-échantillon iid de la loi $\mathcal{P}(\beta)$. Pour m assez grand, on construit un intervalle de confiance du paramètre β au même risque α, et on veut que cet intervalle ait une longueur k fois plus petite (avec $k > 1$) que celle de l'intervalle calculé avec le n-échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$. On suppose que la réalisation de $\widehat{\beta_m} = \dfrac{m}{Z_m}$ sur cet échantillon est encore égale à b.

a) Quelle relation vérifient m et n ?

b) Montrer que le rapport $\dfrac{m}{n}$ a alors une limite lorsque n tend vers l'infini et déterminer cette limite. Interpréter le résultat obtenu.

Solution :

1. On a $Y(\Omega) = \mathbb{R}^{+*}$, et pour $y > 0$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X \leq \mathrm{e}^y) = F_X(\mathrm{e}^y)$$

Donc

$$f_Y(y) = \begin{cases} \beta \mathrm{e}^{-\beta y} & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{si } y \leq 0 \end{cases}$$

La variable aléatoire βY suit la loi exponentielle de paramètre 1, ce qui équivaut à dire que Y suit la loi exponentielle de paramètre β.

2. a) Les variables aléatoires X_i étant indépendantes, il en est de même des variables aléatoires $Y_i = \ln X_i$. D'après le cours, Z_n suit la loi exponentielle de paramètre $n\beta$ et βZ_n suit la loi γ_n. Donc :

$$f_{\beta Z_n}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(n)} x^{n-1} \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

D'où :

$$f_{Z_n}(x) = \begin{cases} \dfrac{\beta^n}{\Gamma(n)} x^{n-1} \mathrm{e}^{-\beta x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

b) On a $\widehat{\beta_n}(\Omega) = \mathbb{R}^{+*}$.

Pour $n \geqslant 3$, la convergence des intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{n-2}\mathrm{e}^{-\beta x}\,dx$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{n-3}\mathrm{e}^{-\beta x}\,dx$, montre, grâce au changement de variable C^1 bijectif $y = \beta x$ que :

$$\int_0^{+\infty} y^{n-2}\mathrm{e}^{-\beta y}\,dy = \frac{\Gamma(n-1)}{\beta^{n-1}}, \int_0^{+\infty} y^{n-3}\mathrm{e}^{-\beta y}\,dy = \frac{\Gamma(n-2)}{\beta^{n-2}}$$

On en déduit l'existence du moment d'ordre 2 de $\widehat{\beta_n}$, par le théorème de transfert.
Il vient :

$$E(\widehat{\beta_n}) = \frac{n\beta}{n-1}, V(\widehat{\beta_n}) = \frac{n^2\beta^2}{(n-1)^2(n-2)}$$

Ainsi $\widehat{\beta_n}$ est un estimateur asymptotiquement sans biais et convergent de β.

3. Soit U la variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite, et soit $u > 0$ tel que $P(U \leq u) = 1 - \frac{\alpha}{2}$.

Pour n assez grand, on a $P(-u \leq T_n \leq u) = 1 - \alpha$ et :

$$P\big(-u \leq \sqrt{n}\frac{\widehat{\beta_n} - \beta}{\beta} \leq u\big) = 1-\alpha \Rightarrow P\big(\frac{\widehat{\beta_n}}{1 + u/\sqrt{n}} \leq \beta \leq \frac{\widehat{\beta_n}}{1 - u/\sqrt{n}}\big) = 1-\alpha$$

La réalisation de l'intervalle de confiance pour β au risque α est donc :

$$\big[\frac{b}{1 + u/\sqrt{n}}, \frac{b}{1 - u/\sqrt{n}}\big]$$

4. a) On a $(\text{longueur})_n = \dfrac{2u\sqrt{n}}{n - u^2} \times b$. On veut donc :

$$\frac{2u\sqrt{n}}{n - u^2}b = k \times \frac{2u\sqrt{m}}{m - u^2}b, \text{ soit } k\sqrt{\frac{m}{n}} \times \frac{n - u^2}{m - u^2} = 1$$

b) Lorsque m et n tendent vers l'infini, on a $k\sqrt{\dfrac{m}{n}} \times \dfrac{n}{m} \sim 1$ d'où :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{m}{n} = k^2$$

Ainsi, si l'on veut être k fois plus précis, il faut multiplier à peu près par k^2 la taille de l'échantillon.

Exercice 3.14.

Un mobile, initialement posté à l'origine d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ se déplace de la manière suivante : à chaque instant $n = 1, 2, 3, \ldots$ il bouge dans une direction quelconque. On modélise ceci de la façon suivante :
on considère $(U_k)_{k \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur l'intervalle $[0, 2\pi[$.

On pose alors pour tout $k \geqslant 1$, $A_k = \cos(U_k)$, $O_k = \sin(U_k)$ et pour tout $n \geqslant 1$,

$$\begin{cases} X_n = A_1 + A_2 + \ldots + A_n \\ Y_n = O_1 + O_2 + \ldots + O_n \end{cases}$$

1. Écrire un programme en PASCAL prenant en entrée la donnée n (nombre de déplacements) et rendant des nombres aléatoires X_n et Y_n construits comme ci-dessus.

2. Calculer $E(A_k)$ et $E(O_k)$ pour tout $k \geqslant 1$ puis $E(X_n)$ et $E(Y_n)$ pour tout $n \geqslant 1$.

3. On définit pour tout $n \geqslant 1$, $Z_n = X_n^2 + Y_n^2$.

a) Que représente géométriquement la variable aléatoire Z_n ?

b) Montrer que $E(Z_n) = n$. Interpréter ce résultat avec celui de la question 2.

4. a) Montrer que :

$$P(Z_n \leq n) = P\Big(\sum_{1 \leq i < j \leq n} \cos(U_i - U_j) \leq 0\Big)$$

b) Expliquer simplement pourquoi :

$$P\Big(\sum_{1 \leq i < j \leq n} \cos(U_i - U_j) \leq 0\Big) = P\Big(\sum_{1 \leq i < j \leq n} \cos(U_i - U_j) \geqslant 0\Big)$$

c) En déduire que $P(Z_n \leq n) = \frac{1}{2}$ et interpréter ce résultat.

Solution :

1. Voici une proposition de programme :

```
program exo ;
var k,n : integer ;
   m x,y,u : real ;
Begin
randomize ;
writeln('n ?') ; readln(n) ;
x := 0 ; y := 0 ;
for k := 1 to n do begin
      u := random ;
      x := x + cos(2*pi*u) ;
      y := y + sin(2*pi*u)
      end ;
writeln(x,y)
```

```
end ;
```

2. Par le théorème de transfert :

$$E(A_k) = E(\cos(U_k)) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(t)\,dt = 0$$

$$E(O_k) = E(\sin(U_k)) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin(t)\,dt = 0$$

Par linéarité de l'espérance, il vient $E(X_n) = E(Y_n) = 0$.

3. a) La variable aléatoire Z_n représente le carré de la distance entre le mobile et l'origine après n déplacements.

b) On calcule :

$$\begin{cases} E(A_k^2) = E(\cos^2(U_k)) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos^2(t)\,dt = \frac{1}{2} \\ E(O_k^2) = E(\sin^2(U_k)) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin^2(t)\,dt = \frac{1}{2} \end{cases}$$

et :

$$E(Z_n) = E(X_n^2) + E(Y_n^2) = n\frac{1}{2} + n\frac{1}{2} = n$$

En moyenne, après n déplacements, le mobile est à la distance $\sqrt{n}$ de l'origine.

4. a) On a $P([Z_n \leq n]) = P([X_n^2 + Y_n^2 \leq n])$. Or :

$$X_n^2 + Y_n^2 = \sum_{k=1}^{n} (A_k^2 + O_k^2) + 2 \sum_{1\leq i<j\leq n} (A_iA_j + O_iO_j)$$

Comme $A_k^2 + O_k^2 = \cos^2(U_k) + \sin^2(U_k) = 1$, et $A_iA_j + O_iO_j = \cos(U_i - U_j)$, il vient

$$\begin{aligned} P([Z_n \leq n]) &= P(n + \sum_{1\leq i<j\leq n} \cos(U_i - U_j) \leq n) \\ &= P(\sum_{1\leq i<j\leq n} \cos(U_i - U_j) \leq 0) \end{aligned}$$

b) Lorsque $i < j$, la variable aléatoire $\cos(U_i - U_j)$ est symétrique sur $[-1, 1]$. Il en est de même pour $\sum_{1\leq i<j\leq n} \cos(U_i - U_j)$. Par conséquent

$$P(\sum_{1\leq i<j\leq n} \cos(U_i - U_j) \leq 0) = P(\sum_{1\leq i<j\leq n} \cos(U_i - U_j) \geqslant 0)$$

c) La somme des deux derniers réels étant égale à 1 (le cas de l'égalité est quasi-impossible) , il vient $P([Z_n \leq n]) = \frac{1}{2}$.

Ainsi, à l'issue de n déplacements, le mobile a autant de chances de se trouver à l'intérieur du disque $D(0, \sqrt{n})$ qu'à l'extérieur.

Exercice 3.15.

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, définies sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$.

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $M_n = \inf(U_1, U_2, ..., U_n)$.

1. a) Montrer que M_n est une variable aléatoire.

b) Calculer $E(M_n)$ et $V(M_n)$.

c) Etudier la convergence en probabilité de la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

2. On définit les variables aléatoires U et V par :

$$U = \inf(U_1, 1-U_1) \text{ et } V = \sup(U_1, 1-U_1).$$

Enfin on pose $Q = \dfrac{V}{U}$.

a) Déterminer la loi de Q.

b) Etudier l'existence de l'espérance de Q.

3. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, soit X_n la variable aléatoire définie sur Ω par : $X_n(\omega) = \sqrt{n}$ si $U_1(\omega) \leq \dfrac{1}{n}$ et $X_n(\omega) = 0$ si $U_1(\omega) > \dfrac{1}{n}$

a) Montrer que X_n est effectivement une variable aléatoire.

On dit qu'une suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge « vélocement » vers Z si pour tout $\alpha > 0$, la série de terme général $P(\{\omega \in \Omega / |Z_n(\omega) - Z(\omega)| > \alpha\})$ converge.

b) En utilisant la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, comparer la convergence en probabilité et la convergence « véloce ».

Solution :

1. a) M_n est une variable aléatoire puisque, pour tout réel a :

$$M_n^{-1}([a, +\infty[) = \bigcap_{k=1}^{n} U_k^{-1}([a, +\infty[) \in \mathcal{T}$$

b) Un raisonnement et un calcul classiques montrent que si f désigne une densité de la loi uniforme sur $[0,1]$ et F sa fonction de répartition, alors, pour tout réel t de $[0,1]$:

$$f_{M_n}(t) = nf(t)(1-F(t))^{n-1} = n(1-t)^{n-1}$$

D'où :

$$E(1-M_n) = n\int_0^1 (1-t)(1-t)^{n-1}dt = \frac{n}{n+1},$$

$$E(1-M_n^2) = n\int_0^1 (1-t)^2(1-t)^{n-1}dt = \frac{n}{n+2}$$

Ce qui donne :

$$E(M_n) = \frac{1}{n+1}, V(M_n) = V(1-M_n) = \frac{n}{(n+1)^2(n+2)}$$

c) La suite (M_n) tend en probabilité vers 0 car, pour $\varepsilon > 0$:

$$P(|M_n| < \varepsilon) = P(M_n < \varepsilon) = 1-(1-\varepsilon)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$$

2. a) Pour $t > 1$, on a :

$$F_Q(t) = \begin{cases} P\big(\frac{1-U_1}{U_1} \leq t\big) & \text{si } U_1 \leq \frac{1}{2} \\ P\big(\frac{U_1}{1-U_1} \leq t\big) & \text{si } U_1 > \frac{1}{2} \end{cases} = \begin{cases} P\big(U_1 \geqslant \frac{1}{t+1}\big) & \text{si } U_1 \leq \frac{1}{2} \\ P\big(U_1 < \frac{t}{t+1}\big) & \text{si } U_1 > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Donc :

$$F_Q(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 1 \\ P\big(\frac{1}{t+1} < U_1 \leq \frac{1}{2}\big) + P\big(\frac{1}{2} < U_1 \leq \frac{t}{t+1}\big) = \frac{t-1}{t+1} & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

b) En dérivant :

$$f_Q(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 1 \\ \frac{2}{(t+1)^2} & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

Comme $tf_Q(t) \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{2}{t}$, la règle de Riemann assure que Q n'a pas d'espérance.

3. a) Il suffit de remarquer que :

$$X_n^{-1}(\sqrt{n}) = \{\omega \in \Omega \mid U_1(\omega) \leq \frac{1}{n}\} = U_1^{-1}(]-\infty, 1/n]) \in \mathcal{T}$$

et :

$$X_n^{-1}(0) = \{\omega \in \Omega \mid U_1(\omega) > \frac{1}{n}\} = U_1^{-1}(]1/n, +\infty[) \in \mathcal{T}$$

b) Le terme général d'une série convergente tendant vers 0, la convergence véloce implique la convergence en probabilité.
La réciproque est fausse. En effet, soit $0 < \varepsilon < 1/2$. On a :

$$\bigcup_{m=n}^{+\infty} \big(|X_m| > \varepsilon\big) = \bigcup_{m=n}^{+\infty} \big(U_1 \in [0, 1/m]\big) = (U_1 \in [0, 1/n])$$

d'où $P\big(\bigcup_{m=n}^{+\infty} (|X_m| > \varepsilon)\big) = \frac{1}{n}$, qui est le terme général d'une série divergente.

Exercice 3.16.

Soit X une variable aléatoire strictement positive admettant une espérance $E(X)$.
On pose, lorsque cela a un sens :

$$K_X = E\Big(\frac{X}{E(X)} \ln\big(\frac{X}{E(X)}\big)\Big)$$

1. a) Si X est constante égale à c, que vaut K_X ?

b) En supposant que K_X existe, calculer $K_{\lambda X}$ en fonction de K_X.

c) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^2 \ln^2(t)}$ existe. Le coefficient K_X existe-t-il toujours ?

2. a) La fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = x\ln(x)$ est-elle convexe ?

b) Si g est une fonction convexe définie sur un intervalle I, montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, tout $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in I^n$ et tout $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, on a :

$$g\big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\big) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g(x_i)$$

c) En déduire que si X est une variable aléatoire ne prenant qu'un nombre fini de valeurs (strictement positives), alors K_X existe et qu'il est positif ou nul.

3. a) Soit m un réel strictement supérieur à 1.
Soit X une variable aléatoire à densité, dont une densité f est définie par :

$$f(x) = \frac{m}{x^{m+1}} \text{ si } x \geqslant 1, \text{ et } f(x) = 0 \text{ sinon,}$$

calculer K_X.

b) Soit r un réel de $\mathbb{R}^+$; existe-t-il une variable aléatoire Z telle que $K_Z = r$?

Solution :

1. a) Si X est une variable aléatoire constante, on a $E(X) = X$ et donc en raison de la présence du logarithme $K_C = 0$.

b) Par linéarité de l'espérance, clairement, $K_{\lambda X} = K_X$.

c) $\star$ La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2 \ln^2(t)}$ est continue sur $[2, +\infty[$. Pour $t > \mathrm{e}$, on a $\dfrac{1}{t^2 \ln^2(t)} \leq \dfrac{1}{t^2}$ ce qui assure la convergence de l'intégrale proposée.

⋆ Soit alors f la fonction définie par : $f(t) = \begin{cases} \dfrac{C}{t^2 \ln^2(t)} & \text{si } t \geqslant 2 \\ 0 & \text{si } t < 2 \end{cases}$ (où la constante C est choisie de façon à ce que f soit une densité).
Soit X une variable aléatoire de densité f. Alors :
→ $E(X)$ existe, puisque $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t\ln^2(t)} = \frac{1}{\ln 2}$, (intégration «à vue»).
→ K_X n'existe pas, car sinon, en notant a l'espérance de X, on aurait par le théorème de transfert :

$$K_X = \int_2^{+\infty} \frac{t\ln(t/a)}{at^2\ln^2(t)}dt = \int_2^{+\infty} \frac{\ln(t/a)}{at\ln^2(t)}dt$$

Or : $\dfrac{\ln(t/a)}{at\ln^2(t)} \underset{(+\infty)}{\sim} \dfrac{1}{at\ln t}$ et une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{t\ln t}$ est $t \mapsto \ln|\ln t|$ qui est de limite infinie en $+\infty$, d'où la contradiction.

2. a) On a $f''(x) = \dfrac{1}{x} > 0$ et la fonction f est convexe.

b) Cette question est équivalente à la définition de la convexité. Elle se démontre par récurrence sur n à l'aide de la notion de barycentre partiel.

c) Si $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$, alors, en posant $p_i = P(X = x_i)$, il vient :

$$K_X = \sum_{i=1}^{n} p_i f\big(\frac{x_i}{E(X)}\big) \geqslant f\big(\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i x_i}{E(X)}\big) = f(1) = 0$$

3. a) On vérifie aisément que la fonction proposée est effectivement une densité de probabilité. Ceci fait, des calculs simples donnent :

$$E(X) = \frac{m}{m-1}, \quad \text{et} \quad K_X = \ln\big(\frac{m-1}{m}\big) + \frac{1}{m-1}$$

b) La fonction $K_X : x \mapsto \ln\big(\dfrac{x-1}{x}\big) + \dfrac{1}{x-1}$ définie précédemment est continue sur $]1, +\infty[$, d'image $\mathbb{R}^{+*}$.
Le théorème des valeurs intermédiaires permet de conclure lorsque $r > 0$, et la question 1.a, lorsque $r = 0$.

Exercice 3.17.

1. Démontrer que deux variables aléatoires qui suivent une loi de Bernoulli sont indépendantes si et seulement si leur covariance est nulle.

2. Soit n un entier tel que $2 \leq n$. Une urne contient des boules rouges et des blanches en proportions respectives r et b, avec $0 < r < 1$ et $b = 1 - r$.
Un joueur effectue n tirages successifs d'une boule de cette urne, avec remise de la boule obtenue à chaque étape du tirage.

Pour $k \geqslant 2$, le joueur gagne 1 point au $k^{\text{ème}}$ tirage si la couleur de la boule obtenue à ce tirage n'est pas celle qui a été obtenue au tirage précédent. Sinon, son gain à ce rang du tirage est nul.
Soit G la variable aléatoire égale au nombre de points gagnés par le joueur au cours des n tirages.

a) Pour $k \in [\![2, n]\!]$, on définit la variable aléatoire X_k égale au gain du joueur pour le tirage de rang k.
Préciser la loi de X_k et calculer la covariance $\text{Cov}(X_k, X_{k+1})$, pour $k \in [\![2, n-1]\!]$.

b) Calculer l'espérance et la variance de G.

c) Peut-on choisir r et b pour que G suive une loi binomiale ?

3. On reprend le jeu précédent et on définit la variable aléatoire T_n par :
si $G \geqslant 1$, T_n est égal au rang du tirage amenant le premier point et sinon, T_n vaut $n+1$.

a) Déterminer la loi de T_n.

b) Dans cette question, $r = b = \frac{1}{2}$.

Comparer la loi de $T_n - 1$ avec la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$.

En déduire une estimation de $E(T_n)$ quand n est grand.

Solution :

1. Soient X et Y deux variables aléatoires suivant respectivement les lois de Bernoulli $\mathcal{B}(a)$ et $\mathcal{B}(b)$. On sait que pour tout couple (X, Y) on a :

$$X \text{ et } Y \text{ indépendantes } \implies \text{Cov}(X, Y) = 0.$$

Réciproquement, supposons $\text{Cov}(X, Y) = 0$. La variable XY suit une loi de Bernoulli puisque $XY(\Omega) = \{0, 1\}$. Son paramètre est $E(XY)$ et par hypothèse ici :

$$\text{Cov}(X, Y) = 0 \implies E(XY) = E(X)E(Y) = ab.$$

Ainsi : $ab = P(XY = 1) = P((X, Y) = (1, 1))$, d'où

$$P((X = 1) \cap (Y = 1)) = P(X = 1) \times P(Y = 1).$$

Or on sait que si A et B sont des événements indépendants il en est de même des événements $\overline{A}$ et B, ainsi que des événements $\overline{A}$ et $\overline{B}$ et enfin que des événements A et $\overline{B}$.
Comme ici $\overline{(X = 1)} = (X = 0)$ et $\overline{(Y = 1)} = (Y = 0)$, le tour des possibles est fait et X et Y sont des variables aléatoires indépendantes.

2. Les variables introduites sont liées par $G = \sum_{k=2}^{n} X_k$.

a) X_k suit une loi de Bernoulli et les expériences qui constituent l'événement $(X_k = 1)$ sont de la forme suivante : $(\dots R_{k-1}B_k \dots)$ ou $(\dots B_{k-1}R_k \dots)$.
Ainsi :

$$P(X_k = 1) = rb + br = 2rb, \text{ et } X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(2rb)$$

La variable X_kX_{k+1} suit encore une loi de Bernoulli et les expériences qui constituent l'événement $(X_kX_{k+1} = 1)$, *i.e.* l'événement $(X_k = 1) \cap (X_{k+1} = 1)$ sont de la forme suivante :

$$(\dots R_{k-1}B_kR_{k+1} \dots) \text{ ou } (\dots B_{k-1}R_kB_{k+1} \dots).$$

Donc :

$$P(X_kX_{k+1} = 1) = r^2b + rb^2 = rb(r + b) = rb.$$

On en déduit que

$$\mathrm{Cov}(X_k, X_{k+1}) = E(X_kX_{k+1}) - E(X_k)E(X_{k+1}) = rb - 4r^2b^2.$$

b) Par linéarité de l'espérance : $E(G) = \sum_{k=2}^{n} E(X_k) = 2(n-1)rb$.

On a : $V(G) = \sum_{k=2}^{n} V(X_k) + 2 \sum_{2 \le k < h \le n} \mathrm{Cov}(X_k, X_h)$.
Les variables X_k et X_h sont indépendantes quand $k + 2 \le h$ parce que les 4 tirages concernés sont distincts.
Il ne reste donc que : $V(G) = \sum_{k=2}^{n} V(X_k) + 2 \sum_{2 \le k < n} \mathrm{Cov}(X_k, X_{k+1})$, et :

$$V(G) = 2(n-1)br(1-2br) + 2(n-2)rb(1-4br)$$

c) On voit que si $1-4br = 0$ alors $\mathrm{Cov}(X_k, X_{k+1}) = 0$ et d'après la question 1. on peut dire que X_k et X_{k+1} sont indépendantes.
G est alors somme de $n-1$ variables de Bernoulli indépendantes de même paramètre $2rb = \frac{1}{2}$: G suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n-1, 1/2)$.
Pour que deux réels r et b vérifient à la fois $r + b = 1$ et $rb = \frac{1}{4}$ il faut et il suffit que r et b soient les racines du polynôme $X^2 - X + \frac{1}{4} = (X - \frac{1}{2})^2$.
On a donc montré :

$$r = b = \frac{1}{2} \implies G \hookrightarrow \mathcal{B}(n-1, 1/2)$$

[On peut démontrer que ce sont les seules valeurs de r et b qui permettent que G suive une loi binomiale]

3. La variable aléatoire T_n est à valeurs dans $\{2, 3, ..., n+1\}$.

a) Pour $k \leq n, (T_n = k) = \{(R_1R_2 \dots R_{k-1}B_k \dots), (B_1B_2 \dots B_{k-1}R_k \dots)\}$. Ainsi :

$$P(T_n = k) = r^{k-1}b + b^{k-1}r = br(r^{k-2} + b^{k-2}).$$

$(T_n = n+1) = (G = 0) = \{(R_1R_2 \dots R_n), (B_1B_2 \dots B_n)\}$:

$$P(T_n = n+1) = r^n + b^n.$$

b) On a $r = b = \frac{1}{2}$. On a :

$$P(T_n = k) = \frac{1}{2^{k-1}} \text{ pour } 2 \leq k \leq n \text{ et } P(T_n = n+1) = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Considérons S une variable aléatoire suivant la loi géométrique $\mathcal{G}(1/2)$:
On a $P(S = k) = P(T_n - 1 = k) = \frac{1}{2^k}$ pour $1 \leq k \leq n-1$ et $P(S = k) = \frac{1}{2^k}$ pour $k \geqslant n$.
On sait que $E(S) = 2$. Donc :

$$E(T_n - 1) = E(S) + \frac{n}{2^{n-1}} - \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k}{2^k} = 2 + \frac{n}{2^{n-1}} - \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k}{2^k}.$$

Ce dernier terme est le reste d'indice $n-1$ d'une série convergente donc il tend vers 0 quand $n$tend vers l'infini. De même $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{2^{n-1}} = 0$, d'où :

$$\lim_{n\to+\infty} E(T_n - 1) = E(S) = 2 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} E(T_n) = 3.$$

Exercice 3.18.

Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $a + b < 1$.
Un interrupteur admet deux positions que l'on note 0 et 1.
Si, à l'instant n, il est en position 0, il sera encore en position 0 à l'instant $n+1$ avec la probabilité $1-a$ et passera en position 1 avec la probabilité a.
De même, s'il est en position 1, il y restera l'instant suivant avec la probabilité $1-b$ et basculera en position 0 avec la probabilité b.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit X_n la position de l'interrupteur à l'instant n.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{pmatrix} P([X_{n+1} = 0]) \\ P([X_{n+1} = 1]) \end{pmatrix} = A. \begin{pmatrix} P([X_n = 0)] \\ P([X_n = 1]) \end{pmatrix}$$

avec $A = \begin{pmatrix} 1-a & b \\ a & 1-b \end{pmatrix}$.

2. Si l'on suppose que X_0 suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{a}{a+b}$, déterminer la loi de la variable X_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Dans le cas général, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n suit une loi de Bernoulli dont on déterminera le paramètre p_n.

4. Étudier la convergence en loi de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

5. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la covariance entre les variables X_n et X_{n+1}. Quelle est la limite de la suite $\big(\mathrm{Cov}(X_n, X_{n+1})\big)_{n\in\mathbb{N}}$?

Solution :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la formule des probabilités totales nous donne, pour $x \in \{0, 1\}$:

$$P(X_{n+1} = x) = P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = x)P(X_n = 0) + P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = x)P(X_n = 1)$$

En utilisant les données de l'énoncé concernant les probabilités conditionnelles, on trouve :

$$\begin{cases} P(X_{n+1} = 0) = (1 - a)P(X_n = 0) + bP(X_n = 1) \\ P(X_{n+1} = 1) = aP(X_n = 0) + (1 - b))P(X_n = 1) \end{cases}$$

D'où la relation matricielle annoncée.

2. On remarque que le vecteur $\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 1, il en est donc de même du vecteur $\begin{pmatrix} b/(a+b) \\ a/(a+b) \end{pmatrix}$.

Par conséquent si X_0 suit la loi de bernoulli de paramètre $\frac{a}{a+b}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi de X_n est la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{a}{a+b}$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n(\Omega) = \{0, 1\}$, donc X_n suit une loi de Bernoulli.

Déterminons son paramètre $p_n = P(X_n = 1)$.
D'après la relation matricielle trouvée à la première question, on a :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, p_{n+1} = a(1 - p_n) + (1 - b)p_n = a + (1 - a - b)p_n$$

Donc la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique.
La solution de l'équation $x = a + (1 - a - b)x$ est $\frac{a}{a+b}$ donc la suite $\big(p_n - \frac{a}{a+b}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $1 - a - b$.
On en déduit :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, p_n = \frac{a}{a+b} + (1 - a - b)^n\big(p_0 - \frac{a}{a+b}\big)$$

où p_0 est le paramètre de la loi de X_0.

4. Comme $a + b < 1$, on déduit de la question précédente que :

$$\lim_{n\to+\infty} p_n = \frac{a}{a+b}$$

La suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc en loi vers une variable de Bernoulli de paramètre $\dfrac{a}{a+b}$.

5. On a :
$E(X_nX_{n+1}) = P(X_nX_{n+1}=1) = P(X_n=1)P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1)$
Soit : $E(X_nX_{n+1}) = p_n(1-b)$, et donc :

$$\mathrm{Cov}(X_n, X_{n+1}) = p_n(1-b) - p_np_{n+1} = (1-b-a)p_n(1-p_n)$$

et on déduit de la question 3. que :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{Cov}(X_n, X_{n+1}) = \frac{ab(1-b-a)}{a+b}$$

Exercice 3.19.

On dit qu'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$, suit une loi de Weibull, $\mathcal{W}(a,\ b)$ de paramètres a et b réels strictement positifs si :

$$P(X\leq x) = F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ 1-\exp\big(-(\frac{x}{b})^a\big) & \text{si } x\geqslant 0 \end{cases}$$

1. Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$, n variables aléatoires réelles indépendantes suivant une loi $\mathcal{W}(1,\ b)$.

a) Montrer que $\widetilde{X}_n = \inf(X_1, \ldots,\ X_n)$ suit une loi $\mathcal{W}\big(1, \frac{b}{n}\big)$.

b) Pour chaque $\omega\in\Omega$, on range $X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)$ dans l'ordre décroissant. On note $\widetilde{X}_k(\omega)$ le $k^{\text{ème}}$ de ces nombres. On définit ainsi une variable aléatoire $\widetilde{X}_k$.
Montrer que la fonction de répartition de $\widetilde{X}_k$ est :

$$\widetilde{F}_k(x) = \sum_{r=n-k+1}^{n} \binom{n}{r}\big(1-\mathrm{e}^{-\frac{x}{b}}\big)^r\big(\mathrm{e}^{-\frac{x}{b}}\big)^{n-r}$$

2. On suppose que la variable aléatoire X suit une loi $\mathcal{W}(a,b)$.

a) Soient s,t réels. Comparer, selon les valeurs du paramètre a :

$$P_{[X\geqslant t]}([X\geqslant s+t]) \text{ et } P([X\geqslant s]).$$

b) Montrer que l'espérance de X est $E(X) = b\Gamma\big(1+\frac{1}{a}\big)$.

3. On considère une unité centrale d'ordinateur constituée de n composants tels que la panne d'un seul d'entre eux provoque la panne de l'ensemble. On suppose que les n composants ont des durées de vie $T_1, \ldots, T_n$ indépendantes suivant toutes la même loi $\mathcal{W}(a,b)$.

Exprimer la durée de vie T de l'unité centrale. Quelle est la loi de T lorsque $a = 1$?

Solution :

1. a) Pour tout $x \in \mathbb{R}, [\widetilde{X}_n > x] = \bigcap_{i=1}^{n} [X_i > x]$. On en déduit :

$$P(\widetilde{X}_n \leq x) = 1 - P(\widetilde{X}_n > x) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P(X > x) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - P(X \leq x))$$

$$P(\widetilde{X}_n \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \left(\mathrm{e}^{-\frac{x}{b}}\right)^n = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{nx}{b}} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Donc $\widetilde{X}_n \hookrightarrow \mathcal{W}\left(1, \frac{b}{n}\right)$.

b) On a, $\widetilde{X}_1 \geqslant \widetilde{X}_2 \geqslant \ldots \geqslant \widetilde{X}_k \geqslant \ldots \geqslant \widetilde{X}_n$.

L'événement $[\widetilde{X}_k \leq x]$ est réalisé si, et seulement si, au moins $n - k + 1$ des événements $[X_i \leq x]$ sont réalisés.

Or on réalise exactement r des événements $(X_i \leq x)$ avec la probabilité :

$$\binom{n}{r} [F_X(x)]^r [1 - F_X(x)]^{n-r}$$

(phénomène binomial, la probabilité du succès à chaque épreuve valant $F_X(x)$, où F_X désigne la fonction de répartition de la loi de chaque X_i, les variables en présence étant indépendantes)

Par disjonction des différents cas possibles, on a donc :

$$\begin{aligned} P(\widetilde{X}_k \leq x) &= \sum_{r=n-k+1}^{n} \binom{n}{r} \left(F(x)\right)^r \left(1 - F(x)\right)^{n-r} \\ &= \sum_{r=n-k+1}^{n} \binom{n}{r} \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{x}{b}}\right)^r \left(\mathrm{e}^{-\frac{x}{b}}\right)^{n-r} \end{aligned}$$

2. a) On a :

$$P(X \geqslant s + t | X \geqslant t) = \frac{P(X \geqslant s + t)}{P(X \geqslant t)} = \frac{\mathrm{e}^{-\left(\frac{s+t}{b}\right)^a}}{\mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{b}\right)^a}} = \mathrm{e}^{-\left(\frac{s+t}{b}\right)^a + \left(\frac{t}{b}\right)^a}$$

Donc :

$$\begin{aligned} P(X \geqslant s + t | X \geqslant t) \geqslant P(X \geqslant s) &\iff -\left(\frac{s+t}{b}\right)^a + \left(\frac{t}{b}\right)^a \geqslant -\left(\frac{s}{b}\right)^a \\ &\iff s^a + t^a \geqslant (s+t)^a \end{aligned}$$

Une étude rapide de la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $t \mapsto (s+t)^a - s^a - t^a$ montre que l'on a :

- $P(X \geqslant s + t | X \geqslant t) > P(X \geqslant s)$ si $a < 1$.
- $P(X \geqslant s + t | X \geqslant t) = P(X \geqslant s)$ si $a = 1$.

- $P(X \geqslant s+t | X \geqslant t) < P(X \geqslant s)$ si $a > 1$.

b) On obtient une densité de X par dérivation, puis en effectuant le calcul directement avec la borne $+\infty$, puisque les arguments de négligeabilités classiques prouvent la convergence :

$$E(X) = \int_0^{+\infty} \frac{at}{b}\big(\frac{t}{b}\big)^{a-1} \mathrm{e}^{-(\frac{t}{b})^a}\, dt = a\int_0^{+\infty} \big(\frac{t}{b}\big)^{a} \mathrm{e}^{-(\frac{t}{b})^a}\, dt$$

Le changement de variable $u = \big(\frac{t}{b}\big)^a$ est légitime et donne alors :

$$E(X) = b\int_0^{+\infty} u^{\frac{1}{a}} \mathrm{e}^{-u} du = b\Gamma\big(1+\frac{1}{a}\big)$$

3. L'événement $[T > t]$ est réalisé si et seulement si chacun des événements $[T_i > t]$, $i = 1, \ldots, n$ est réalisé. On a, puisque les composants sont indépendants les uns des autres, et que leurs durées de vie suivent toutes la même loi :

$$P(T \leq t) = 1 - P(T > t) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - F(t)) = 1 - \mathrm{e}^{-n(\frac{t}{b})^a}$$

Donc, si $a = 1$, $T \hookrightarrow \mathcal{E}\big(\frac{b}{n}\big)$.

Exercice 3.20.

1. Montrer que la fonction tan définit une bijection de $]-\pi/2, \pi/2[$ sur $\mathbb{R}$. On note Arc tan sa fonction réciproque. Quelle est la fonction dérivée de la fonction Arc tan ?

2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

Déterminer le réel k de telle sorte que la fonction $f_{(\alpha,\beta)} : x \mapsto \dfrac{k}{\alpha^2 + (x-\beta)^2}$ soit une densité de probabilité.

On dit alors qu'une variable aléatoire réelle de densité $f_{(\alpha,\beta)}$ suit la loi de Cauchy $\mathcal{C}(\alpha, \beta)$.

3. Soit Y une variable aléatoire suivant une loi de Cauchy $\mathcal{C}(\alpha, \beta)$.

a) Étudier l'existence des moments de Y.

b) Expliciter la fonction de répartition F_Y de Y.

c) Pour tout réel $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$, déterminer la loi de la variable aléatoire $Z = aY + b$.

4. Si U est une variable aléatoire uniformément distribuée sur $[0, 1]$, montrer que la relation : $X = \tan\big(\pi(U - \frac{1}{2})\big)$, définit une variable aléatoire de loi de Cauchy $\mathcal{C}(1, 0)$.

5. En déduire un programme Pascal de simulation d'une loi $\mathcal{C}(\alpha, \beta)$.

6. Un point M est pris au hasard sur le demi-cercle unité (demi-cercle situé dans le demi-plan des « x positifs ») avec la loi de probabilité uniforme sur ce demi-cercle. On note U et V les coordonnées du point M.
Montrer que $\frac{V}{U}$ est une variable aléatoire qui suit une loi de Cauchy dont on déterminera les paramètres.

Solution :

1. La fonction $x \mapsto \tan(x)$ est définie, continue et dérivable sur $I =]-\pi/2, \pi/2[$, avec pour tout x, $\tan'(x) = 1 + \tan^2 x > 0$.
Cette fonction est continue strictement croissante, donc réalise une bijection de I sur $\tan(I) = \mathbb{R}$.
On dérive alors la bijection réciproque arctan et pour tout y de $\mathbb{R}$:

$$\arctan'(y) = \frac{1}{\tan'(\arctan y)} = \frac{1}{1+y^2}$$

2. • $\forall\, \alpha, \beta, f_{(\alpha,\beta)}$ est positive si et seulement si $k \geqslant 0$.
• $\forall\, \alpha, f_{(\alpha,\beta)}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
• Enfin :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{(\alpha,\beta)}(x)\, dx = \frac{k}{\alpha^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+(\frac{x-\beta}{\alpha})^2}\, dx = \frac{k}{\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+u^2}\, du = \frac{k\pi}{\alpha}$$

(on a effectué le changement de variable : $u = \frac{x-\beta}{\alpha}$).
Ainsi, $f_{(\alpha,\beta)}$ est une densité de probabilité si et seulement si $k = \frac{\alpha}{\pi}$.

3. a) On a $x f_{(\alpha,\beta)}(x) \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{k}{x}$, comme $x \mapsto \frac{1}{x}$ est d'intégrale divergente sur $[1, +\infty[$ la variable aléatoire Y n'a pas d'espérance. A fortiori Y n'a aucun moment d'ordre p avec $p \geqslant 1$.

b) $F_Y(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_{(\alpha,\beta)}(t)dt = \frac{1}{\alpha\pi}\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{1+(\frac{t-\beta}{\alpha})^2}\, dt$

Donc :

$$F_Y(x) = \frac{1}{\pi}[\arctan(\frac{x-\beta}{\alpha}) + \frac{\pi}{2}]$$

c) Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{R}$, la loi de la variable aléatoire : $Z = aY + b$ est donnée par, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$F_Z(x) = P(aY + b \leq x) = P(Y \leq \frac{x-b}{a}) = F_Y(\frac{x-b}{a})$$

$$= \frac{1}{\pi}[\arctan(\frac{\frac{x-b}{a} - \beta}{\alpha}) + \frac{\pi}{2}] = \frac{1}{\pi}[\arctan(\frac{x-b-a\beta}{a\alpha}) + \frac{\pi}{2}]$$

Donc :

$$X = aY + b \hookrightarrow \mathcal{C}(a\alpha, b + a\beta)$$

4. On suppose que $U \hookrightarrow U([0,1])$ et on pose $X = \tan[\pi(U - \frac{1}{2})]$. Soit $x \in \mathbb{R}$:

$F_X(x) = P(X \leq x) = P(\tan[\pi(U - \frac{1}{2})] \leq x) = P(\pi(U - \frac{1}{2}) \leq \arctan(x))$

$= P(U \leq \frac{1}{\pi}\arctan(x) + \frac{1}{2}) = \frac{1}{\pi}\arctan(x) + \frac{1}{2}$

d'où $X \hookrightarrow \mathcal{C}(1,0)$.

5. Proposition d'un programme Pascal de simulation d'une loi $\mathcal{C}(\alpha, \beta)$.

```
program Loi_Cauchy ;
Var a,b : integer ; U,X : real ;
Begin
readln(a) ; readln(b) ;
U := random ;
X=a*tan ( PI *(U- 0.5)) + b ;
writeln(X) ;
End.
```

6. Si on note θ l'angle au centre, on a : $\frac{V}{U} = \tan(\theta)$, et la loi de θ est la loi uniforme sur $[-\pi/2, \pi/2]$.

Soit $x \in \mathbb{R}$; $\tan(\theta) \leq x \iff -\frac{\pi}{2} < \theta \leq \arctan x$.

Donc $F_{V/U}(x) = \arctan x + \frac{\pi}{2}$ et la loi de V/U est la loi $\mathcal{C}(1,0)$.

Exercice 3.21.

Une urne contient N jetons numérotées de 1 à N, avec $N \geqslant 3$.

On effectue une succession de tirages, en choisissant à chaque fois au hasard une boule, que l'on replace dans l'urne avant le tirage suivant.

Pour $n \geqslant 2$ et $n \leq N$, on note X_n le nombre aléatoire de tirages juste nécessaires pour obtenir n numéros distincts.

1. Quelle est la loi de $X_2 - 1$? Déterminer espérance et variance de X_2.

Pour $n \geqslant 3$, on pose $Y_n = X_n - X_{n-1}$

2. Donner une interprétation de Y_n, déterminer sa loi, son espérance et sa variance.

3. Déterminer l'espérance et la variance de X_n.

4. On suppose N pair et on pose $N = 2m$. Etudier la convergence des suites $\big(\frac{E(X_m)}{m}\big)_{m\geqslant 2}$ et $\big(\frac{V(X_m)}{m}\big)_{m\geqslant 2}$.

Solution :

1. La variable aléatoire Y_2 représente le temps à attendre pour obtenir un numéro différent du premier numéro obtenu, une fois celui-ci obtenu.
Soit Z le numéro du premier numéro obtenu. On a :

$$P(Y_2 = k) = \sum_{i=1}^{n} P(Y_2 = k/Z = i)P(Z = i) = \sum_{i=1}^{n} \big(\frac{1}{N}\big)^{k-1}\big(1 - \frac{1}{N}\big)\times\frac{1}{n}$$
$$= \big(\frac{1}{N}\big)^{k-1}\big(1 - \frac{1}{N}\big)$$

Ainsi Y_2 suit la loi géométrique de paramètre $\frac{N-1}{N}$. (ce que l'on pouvait dire directement en remarquant que le résultat du premier tirage est sans intérêt !). Ainsi :

$$E(X_2) = E(Y_2) + 1 = \frac{2N-1}{N-1}, V(X_2) = V(Y_2) = \frac{N}{(N-1)^2}$$

2. La variable Y_n représente le temps d'attente pour obtenir un numéro différent des $(n-1)$ numéros distincts dèjà obtenus et ce à partir du moment ou l'on obtient ces $(n-1)$ numéros distincts.

A chaque tirage la probabilité de conclure vaut donc $1 - \frac{n-1}{N}$ et celle de ne pas conclure vaut $\frac{n-1}{N}$. L'indépendance des résultats des tirages effectués montre alors que Y_k suit la loi géométrique de paramètre $1 - \frac{n-1}{N}$ et :

$$P(Y_n = k) = \big(\frac{n-1}{N}\big)^{k-1}\big(1 - \frac{n-1}{N}\big)$$
$$E(Y_n) = \frac{N}{N-n+1}, V(Y_n) = \frac{N(n-1)}{(N-n+1)^2}$$

3. Par sommation et indépendance pour le calcul de la variance, il vient :

$$E(X_n) = N\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{N-k+1}, V(X_n) = N\sum_{k=1}^{n}\frac{k-1}{(N-k+1)^2}$$

4. $\star$ $E\big(\frac{X_m}{m}\big) = \sum_{k=1}^{m}\frac{2}{2m-k+1} = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\frac{2}{2-\frac{k-1}{m}}$

On reconnaît une somme de Riemann de la fonction $x \mapsto \frac{2}{2-x}$, pour une subdivision régulière de $[0,1]$ et :

$$\lim_{m\to\infty} E\big(\frac{X_m}{m}\big) = \int_0^1 \frac{2\,dx}{2-x} = 2\ln 2$$

⋆ De même $\dfrac{1}{m}V(X_m) = \dfrac{1}{m}\sum\limits_{k=1}^{m} \dfrac{2\frac{k-1}{m}}{(2-\frac{k-1}{m})^2}$

On reconnaît une somme de Riemann de la fonction $x \mapsto \dfrac{2x}{(2-x)^2}$ toujours sur le segment $[0,1]$ pour une subdivision régulière. Donc :

$$\lim_{m\to+\infty} \frac{V(X_m)}{m} = \int_0^1 \frac{2\,dx}{(2-x)^2} = 2(1-\ln 2)$$

Exercice 3.22.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et k un entier tel que $2 \le k \le n$. Une urne contient n boules indiscernables au toucher, numérotées de 1 à n. Un joueur tire en une seule fois k boules de l'urne.
X_1 et X_k sont les variables aléatoires égales respectivement au plus petit et au plus grand numéro tiré.

1. Dans cette question, $k = 2$.

   a) Déterminer la loi de X_1 et calculer son espérance.

   b) Déterminer la loi de X_2, comparer X_1 et $n+1-X_2$, puis calculer $E(X_2)$.

2. On revient au cas général : $2 \le k \le n$.

   a) Déterminer la loi de X_1.

   b) Le joueur note les numéros des boules sorties et range ces nombres dans l'ordre croissant : $x_1 < x_2 < ... < x_k$.
Pour j appartenant à $[\![1,k]\!]$, soit X_j la variable aléatoire égale au $j^{\text{ème}}$ numéro obtenu dans l'ordre croissant, donc égal à x_j et on pose :

$$D_1 = X_1,\ D_2 = X_2 - X_1, \ldots, D_k = X_k - X_{k-1}.$$

On pose de plus $D_{k+1} = n + 1 - X_k$.
Préciser la loi du vecteur aléatoire $(D_1, D_2, \ldots, D_{k+1})$, et expliquer pourquoi les variables $(D_j)_{1\le j\le k+1}$ suivent toutes la même loi.

   b) En déduire les espérances de X_1 et de X_k, puis la formule :

$$\sum_{i=1}^{n-k+1} i\binom{n-i}{k-1} = \binom{n+1}{k+1} \quad (*)$$

Solution :

Pour modéliser ce jeu on choisit Ω égal à l'ensemble des parties decardinal k de $[\![1,n]\!]$, et on fait l'hypothèse d'équiprobabilité.

1. Ici $\text{card}(\Omega) = \binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

a) $X_1(\Omega) = [\![1, n-1]\!]$, et pour tout i de $[\![1, n-1]\!]$, $(X_1 = i)$ est l'ensemble des parties contenant i ainsi qu'un autre entier entre $(i+1)$ et n. Cet ensemble est de cardinal $n - i$. Donc :

$$P(X_1 = i) = \frac{2(n-i)}{n(n-1)}$$

On a :

$$E(X_1) = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n-1} i(n-i) = \frac{2}{n(n-1)} \left(\frac{n^2(n-1)}{2} - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\right)$$

$$E(X_1) = n - \frac{2n-1}{3} = \frac{n+1}{3}$$

b) De même $X_2(\Omega) = [\![2, n]\!]$ et pour tout $j \in [\![2, n]\!]$, $P(X_2 = j) = \dfrac{2(j-1)}{n(n-1)}$.

Posons $Y = n + 1 - X_2$. On a : $Y(\Omega) = [\![1, n-1]\!]$ et pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, on a :

$$P(Y = i) = P(X_2 = n + 1 - i) = \frac{2(n-i)}{n(n-1)}.$$

Ainsi $n + 1 - X_2$ a même loi que X_1 et :

$$E(X_2) = n + 1 - \frac{n+1}{3} = \frac{2}{3(n+1)}$$

2. Ici $\text{card}(\Omega) = \binom{n}{k}$.

a) Il vient $X_1(\Omega) = [\![1, n-k+1]\!]$ et pour $i \in [\![1, n-k+1]\!]$, $(X_1 = i)$ est l'ensemble des parties contenant i et $k-1$ entiers entre $i+1$ et n. Donc :

$$\forall\, i \in [\![1, n-k+1]\!] P(X_1 = i) = \frac{\binom{n-i}{k-1}}{\binom{n}{k}}$$

b) Notons $\mathcal{D} = (D_1, D_2, \ldots, D_{k+1})$. $\mathcal{D}(\Omega)$ est formé de tous les $(k+1)$–uplets $(d_1, d_2, \ldots, d_{k+1}) \in (\mathbb{N}^*)^{k+1}$ qui vérifient $\sum_{i=1}^{k+1} d_i = n + 1$.

Il y a bijection entre Ω et $\mathcal{D}(\Omega)$ puisque :

$$\begin{cases} d_1 = x_1 \\ d_2 = x_2 - x_1 \\ \cdots \\ d_k = x_k - x_{k-1} \\ d_{k+1} = n + 1 - x_k \end{cases} \iff \left(\forall\, j \in [\![1, k]\!], x_j = \sum_{i=1}^{j} d_i\right)$$

$\mathcal{D}$ suit donc une loi uniforme avec :

$$\forall (d_1, d_2, \ldots, d_{k+1}) \in \mathcal{D}(\Omega), P(\mathcal{D} = (d_1, d_2, \ldots, d_{k+1})) = \frac{1}{\binom{n}{k}}.$$

Pour tout $(d_1, d_2, \ldots, d_{k+1}) \in \mathcal{D}(\Omega)$, si on effectue une permutation sur les composantes du $(k+1)$–uplet $(d_1, d_2, \ldots, d_{k+1})$ on obtient un autre $(k+1)$–uplet de $\mathcal{D}(\Omega)$, donc les lois marginales du vecteur $\mathcal{D}$ sont égales.

En particulier ,comme $\sum_{i=1}^{k+1} D_i = n+1$:

$$E(D_1) = E(D_2) = \cdots = E(D_{k+1}) = \frac{n+1}{k+1}$$

c) Ici $X_1 = D_1$, donc $E(X_1) = \frac{n+1}{k+1}$.

$X_k = n + 1 - D_{k+1}$, donc $E(X_k) = (n+1)(1 - \frac{1}{k+1}) = (n+1)\frac{k}{k+1}$.

Reprenons la loi de X_1 : $E(X_1) = \sum_{i=1}^{n-k+1} i\frac{\binom{n-i}{k-1}}{\binom{n}{k}} = \frac{n+1}{k+1}$

Du fait que $\binom{n}{k} \times \frac{n+1}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ on a bien :

$$\sum_{i=1}^{n-k+1} i\binom{n-i}{k-1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Exercice 3.23.

On considère un tournoi de n participants ($n \geqslant 2$) où le vainqueur est le joueur qui a obtenu le plus de points. On note X_i la variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ qui est égale au nombre de points obtenus par le joueur i à l'issue du jeu.

On suppose que les variables aléatoires X_i sont indépendantes et identiquement distribuées de fonction de répartition F.

On note V_n l'événement : « il existe un unique vainqueur ».

1. Écrire V_n comme la réunion de n événements disjoints.

2. En déduire que $P(V_n) = n\sum_{k=0}^{+\infty} P(X_1 = k)F(k-1)^{n-1}$.

3. On suppose que X_1 ne prend qu'un nombre fini de valeurs. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} P(V_n) = 0$.
Commenter le résultat.

4. On suppose que X_1 suit la loi uniforme sur l'ensemble d'entiers $\{0, \ldots, m\}$ ($m \in \mathbb{N}$).

a) Donner alors l'expression de $P(V_n)$.

b) À l'aide d'une comparaison avec une intégrale, montrer que quand m tend vers l'infini, on a : $\sum_{k=0}^{m} k^{n-1} \sim \frac{m^n}{n}$.

c) En déduire $\lim_{m\to+\infty} P(V_n)$. Commenter le résultat.

Solution :

1. Notons G_i l'événement « le joueur i gagne ». Alors :

$$V_n = \bigcup_{i=1}^{n} \left(\overline{G_1} \cap \ldots \cap \overline{G_{i-1}} \cap G_i \cap \overline{G_{i+1}} \cap \ldots \cap \overline{G_n} \right)$$

2. Par incompatibilité :

$$\begin{aligned} P(V_n) &= \sum_{k=1}^{n} P\big(\overline{G_1} \cap \ldots \cap \overline{G_{i-1}} \cap G_i \cap \overline{G_{i+1}} \cap \ldots \cap \overline{G_n}\big) \\ &= nP(G_1 \cap \overline{G_2} \cap \ldots \cap \overline{G_n}) \end{aligned}$$

par symétrie du problème.

En utilisant la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(X_1 = k)_{k\geqslant 0}$, on obtient :

$$\begin{aligned} P(V_n) &= n \sum_{k=0}^{+\infty} P_{(X_1=k)}(G_1 \cap \overline{G_2} \cap \ldots \cap \overline{G_n}) P(X_1 = k) \\ &= n \sum_{k=0}^{+\infty} P((X_2 \leq k-1) \cap \ldots \cap (X_n \leq k-1)) P(X_1 = k) \\ &= n \sum_{k=0}^{+\infty} P(X_2 \leq k-1) \ldots P(X_n \leq k-1) P(X_1 = k). \end{aligned}$$

Les variables étant identiquement distribuées, on a bien :

$$P(V_n) = n \sum_{k=0}^{+\infty} [F(k-1)]^{n-1} P(X_1 = k)$$

3. Par hypothèse, il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que $P(X_1 = K) > 0$ et pour tout $k \geqslant K+1$, $P(X_1 = k) = 0$. Dans ce cas :

$$P(V_n) = n \sum_{k=0}^{K} [F(k-1)]^{n-1} P(X_1 = k).$$

Or, pour tout $k \in [\![0, K]\!]$, $F(k-1) \in [0, 1[$; donc $\lim_{n\to+\infty} n[F(k-1)]^{n-1} = 0$ et

$$\lim_{n\to+\infty} P(V_n) = 0$$

Quand le nombre de joueurs devient très grand, il y a très peu de chances pour qu'il y ait, dans ce cadre, un unique vainqueur.

4. a) On a $P(V_n) = n \sum_{k=0}^{m} \left(\frac{k}{m+1}\right)^{n-1} \frac{1}{m+1} = \frac{n}{(m+1)^n} \sum_{k=0}^{m} k^{n-1}$.

b) On écrit : $\sum_{k=0}^{m} k^{n-1} = m^n \times \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{k}{m}\right)^{n-1}$.

On reconnaît alors une somme de Riemann et :

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{k}{m}\right)^{n-1} = \int_0^1 x^{n-1}\,dx = \frac{1}{n}$$

Donc :

$$\sum_{k=0}^{m} k^{n-1} \underset{(m\to\infty)}{\sim} \frac{m^n}{n}$$

c) Donc : $P(V_n) \underset{(m\to\infty)}{\sim} \frac{n}{(m+1)^n} \times \frac{m^n}{n} \underset{(m\to\infty)}{\sim} 1$. Soit :

$$\lim_{m\to\infty} P(V_n) = 1$$

Quand le nombre de points que peut marquer un joueur, dans ce cadre, devient grand, la probabilité qu'il y ait un unique vainqueur est proche de 1.

5

QUESTIONS COURTES

1. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $A^3 + A = 0$. Montrer que A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ et $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$.
Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ ont les mêmes valeurs propres non nulles (s'il y en a).
Montrer que, lorsque $n = p$, $f \circ g$ et $g \circ f$ ont les mêmes valeurs propres.

3. Soit $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'équation $X^n = A$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, admet-elle au moins une solution ?

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $I_n = \dfrac{1}{2^{n+1} n!} \displaystyle\int_0^1 (1-t)^n \mathrm{e}^{t/2} dt$.
Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$. En déduire la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n n!}$

5. Soit $f(x) = \ln\left(x + \dfrac{1}{1+x}\right)$.
Donner le domaine de définition de f.
Démontrer que les dérivées $f^{(n)}(0)$ d'ordre impair sont nulles, lorsque n est un multiple de 3.

6. Soit (u_n) une suite réelle positive et λ un réel strictement positif. L'équivalence suivante est-elle vérifiée ?

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lambda \Longleftrightarrow (u_n)^n \sim \lambda^n$$

7. Soit X une variable aléatoire strictement positive de densité f. On suppose que X et $1/X$ admettent une espérance. Comparer $E\big(\frac{1}{X}\big)$ et $\frac{1}{E(X)}$.

8. Soit $n \geqslant 1$ et $(X_1, \ldots, X_n)$ un échantillon identiquement distribué indépendant de loi de Poisson de paramètre inconnu $\lambda > 0$

On pose $\overline{X_n} = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k, \quad T_n = \sqrt{n}\dfrac{\overline{X_n} - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$

À l'aide de T_n, déterminer, pour n grand, un intervalle de confiance de λ au risque α donné.

9. Une urne contient initialement une boule rouge et une boule noire. On effectue dans cette urne une succession de tirages suivant le protocole suivant :

- si on tire une boule rouge, on remet dans l'urne $r > 0$ boules rouges avant le tirage suivant.
- si on tire une boule noire, on remet dans l'urne $s > 0$ boules noires avant le tirage suivant.

On s'arrête lorsque le nombre de boules d'une couleur présente dans l'urne est 10 fois plus grand que le nombre de boules de l'autre couleur.

Écrire une fonction PASCAL permettant de simuler cette expérience.

10. Soit A le point de $\mathbb{R}^2$ de coordonnées $(1, 0)$.
Soit θ une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[-\pi, \pi]$.
À tout $\omega \in \Omega$, on associe le point M_ω du cercle unité d'affixe $\mathrm{e}^{i\theta(\omega)}$
Donner l'espérance de la variable aléatoire représentant la distance de A à M_ω.