HEC 2016 - option eco

Exercice

Soit n et p deux entiers supérieurs ou égaux à 1. Si M est une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, la matrice ${}^tM$ de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ désigne la transposée de M.
On identifie les ensembles $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}$ en assimilant une matrice de $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ à son unique coefficient.
On note $\mathcal{B}_n$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{B}_p$ la base canonique de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.
Si $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $N \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ ($q \in \mathbb{N}^*$), *on admet* que ${}^t(MN) = {}^tN\,{}^tM$.

1. Soit X une matrice colonne non nulle donnée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de composantes $x_1, x_2, ..., x_n$ dans la base $\mathcal{B}_n$.
   On pose : $A = X\,{}^tX$ et $\alpha = {}^tXX$.
   (a) Exprimer A et α en fonction de $x_1, x_2, ..., x_n$. Justifier que la matrice A est diagonalisable.
   (b) Soit f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de matrice A dans la base $\mathcal{B}_n$.
   Déterminer $\mathrm{Im}f$ et $\mathrm{Ker}f$; donner une base de Imf et préciser la dimension de $Kerf$.
   (c) Calculer la matrice AX. Déterminer les valeurs propres de A ainsi que les sous-espaces propres associés.
2. On suppose que n et p vérifient $1 \leq p \leq n$. Soit $(V_1, V_2, ..., V_p)$ une famille libre de p vecteurs de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
   On note V la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont, dans cet ordre, $V_1, V_2, ..., V_p$.
   Soit g l'application linéaire de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de matrice V dans les bases $\mathcal{B}_p$ et $\mathcal{B}_n$.
   (a) Justifier que le rang de V est égal à p. Déterminer $\mathrm{Ker}g$.
   (b) Soit Y une matrice colonne de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.
   Montrer que l'on a $VY = 0$ si et seulement si l'on a ${}^tVVY = 0$.
   (c) En déduire que la matrice ${}^tVV$ est inversible.

Problème

On s'intéresse dans ce problème à quelques aspects mathématiques de la fonction de production d'une entreprise qui produit un certain bien à une époque donnée, à partir de deux facteurs de production travail et capital.
Dans tout le problème :
• *On note respectivement x et y les quantités de travail et de capital requises pour produire une certaine quantité de ce bien.*
• *On suppose que $x > 0$ et $y > 0$. On pose $\mathcal{D} = (\mathbb{R}_+^*)^2$ et pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$, $z = \dfrac{x}{y}$.*
La partie III est indépendante des parties I et II.

Partie I. Fonction de production CES (Constant Elasticity of Substitution).

Dans toute cette partie, on note c un réel vérifiant $0 < c < 1$ et θ un réel vérifiant $\theta < 1$ avec $\theta \neq 0$.
Soit f la fonction définie sur $\mathcal{D}$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, telle que :

$$\forall (x, y) \in \mathcal{D}, \quad f(x, y) = \left(cx^\theta + (1-c)y^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}} \quad (\textit{fonction de production CES}).$$

1. *Exemple.* Dans cette question **uniquement,** on prend $\theta = -1$ et $c = \dfrac{1}{2}$.
   (a) Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$, on a : $f(x, y) = \dfrac{2xy}{x+y}$. Justifier que f est de classe C^2 sur $\mathcal{D}$ et calculer pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$, les dérivées partielles $\partial_1(f)(x, y)$ et $\partial_2(f)(x, y)$.
   (b) Soit w et U les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall t > 0$, $w(t) = \dfrac{2t}{1+t}$ et $U(t) = w(t) - tw'(t)$.
   Dresser le tableau de variation de la fonction U sur $\mathbb{R}_+^*$ et étudier la convexité de U sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (c) On rappelle que $z = \dfrac{x}{y}$. Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$, on a $f(x, y) = yw(z)$.
   (d) Vérifier pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$, les relations : $\partial_1(f)(x, y) = w'(z)$ et $\partial_2(f)(x, y) = U(z)$.
2. (a) Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$ et pour tout réel $\lambda > 0$, on a : $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda f(x, y)$.
   (b) Justifier que f est de classe C^2 sur $\mathcal{D}$ et, pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$, calculer $\partial_1(f)(x, y)$ et $\partial_2(f)(x, y)$.
   (c) Déterminer pour tout $y > 0$ fixé, le signe et la monotonie de la fonction $x \mapsto \partial_1(f)(x, y)$.
   De même, déterminer pour tout $x > 0$ fixé, le signe et la monotonie de la fonction $y \mapsto \partial_2(f)(x, y)$.
3. Soit G la fonction définie sur $\mathcal{D}$ par $G(x, y) = \dfrac{\partial_1(f)(x, y)}{\partial_2(f)(x, y)}$ (*taux marginal de substitution technique*) et g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall t > 0$, $g(t) = \dfrac{c}{1-c}t^{-1+\theta}$.

(a) Pour tout $(x,y) \in \mathcal{D}$, exprimer $G(x,y)$ en fonction de $g(z)$.

(b) Pour tout $t > 0$, on pose $s(t) = -\dfrac{g(t)}{tg'(t)}$. Calculer $s(z)$ (*élasticité de substitution*). Conclusion.

4. Soit w et U les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall t > 0$, $w(t) = f(t,1)$ et $U(t) = w(t) - tw'(t)$.

(a) Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathcal{D}$, on a : $f(x,y) = yw(z)$.

(b) En distinguant les deux cas $0 < \theta < 1$ et $\theta < 0$, dresser le tableau de variation de U sur $\mathbb{R}_+^*$.
Préciser $\lim\limits_{t\to 0^+} U(t)$, $\lim\limits_{t\to+\infty} U(t)$ ainsi que la convexité de U sur $\mathbb{R}_+^*$.

Partie II. Caractérisation des fonctions de production à élasticité de substitution constante.

Dans toute cette partie, on note Ψ une fonction définie et de classe C^2 sur $\mathcal{D}$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, vérifiant la condition $\Psi(1,1) = 1$ et pour tout réel $\lambda > 0$, la relation : $\Psi(\lambda x, \lambda y) = \lambda\Psi(x,y)$.
De plus, on suppose que pour tout $y > 0$ fixé, la fonction $x \mapsto \partial_1(\Psi)(x,y)$ est strictement positive et strictement décroissante et que pour tout $x > 0$ fixé, la fonction $y \mapsto \partial_2(\Psi)(x,y)$ est également strictement positive et strictement décroissante.

5. Soit v la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall t > 0$, $v(t) = \Psi(t,1)$.

(a) Justifier que la fonction v est de classe C^2, strictement croissante et concave sur $\mathbb{R}_+^*$.

(b) Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall t > 0$, $\varphi(t) = v(t) - tv'(t)$. On suppose l'existence de la limite de $\varphi(t)$ lorsque t tend vers 0 par valeurs supérieures et que $\lim\limits_{t\to 0^+} \varphi(t) = \mu$, avec $\mu \geq 0$.
Déterminer pour tout $t > 0$, le signe de $\varphi(t)$ et montrer que $\mu \leq 1$.

(c) Montrer que : $\forall (x,y) \in \mathcal{D}$, $\Psi(x,y) = yv(z)$.

6. (a) Pour tout $t > 0$, on pose : $h(t) = \dfrac{v'(t)}{\varphi(t)}$. Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathcal{D}$, on a : $\dfrac{\partial_1(\Psi)(x,y)}{\partial_2(\Psi)(x,y)} = h(z)$.

(b) Pour tout $t > 0$, on pose : $\sigma(t) = -\dfrac{h(t)}{th'(t)}$. Déterminer pour tout $t > 0$, le signe de $\sigma(t)$.

7. Les fonctions σ et h sont celles qui ont été définies dans la question **??**. On suppose que la fonction σ est constante sur $\mathbb{R}_+^*$; on note σ_0 cette constante et on suppose $\sigma_0 \neq 1$. On pose : $r = 1 - \dfrac{1}{\sigma_0}$.

(a) Pour tout $t > 0$, on pose $\ell(t) = t^{1-r}h(t)$. Calculer $\ell'(t)$ et en déduire que : $\forall t > 0$, $h(t) = h(1)t^{r-1}$.

(b) Par une méthode analogue à celle de la question **??**, établir la relation : $\forall t > 0$, $v(t) = \left(\dfrac{1 + h(1)t^r}{1 + h(1)}\right)^{\frac{1}{r}}$.

(c) En déduire l'existence d'une constante $a \in]0,1[$ telle que : $\forall (x,y) \in \mathcal{D}$, $\Psi(x,y) = (ax^r + (1-a)y^r)^{\frac{1}{r}}$.

(d) Quelle conclusion peut-on tirer des résultats des questions **??** et **??** ?

8. Soit $a \in]0,1[$. Pour tout $t > 0$, soit S_t la fonction définie sur $]-\infty, 1[\backslash\{0\}$ par : $S_t(r) = (at^r + 1 - a))^{\frac{1}{r}}$.

(a) On pose $H_t(r) = \ln S_t(r)$. Calculer la limite de $S_t(r)$ lorsque r tend vers 0.

(b) Pour tout couple $(x,y) \in \mathcal{D}$ fixé, on pose : $N_{(x,y)}(r) = yS_z(r)$ et $F(x,y) = \lim\limits_{r\to 0} N_{(x,y)}(r)$.
Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathcal{D}$, on a $F(x,y) = x^a y^{1-a}$ (*fonction de production de Cobb-Douglas*).

Partie III. Estimation des paramètres d'une fonction de production de Cobb-Douglas.

Soit a un réel vérifiant $0 < a < 1$ et B un réel strictement positif.
On suppose que la production totale Q présente une composante déterministe et une composante aléatoire.
• La *composante déterministe* est une fonction de production de type Cobb-Douglas, c'est-à-dire telle que :

$$\forall (x,y) \in \mathcal{D}, \quad f(x,y) = Bx^a y^{1-a}.$$

• La *composante aléatoire* est une variable aléatoire de la forme $exp(R)$ où R est une variable aléatoire suivant la loi normale centrée, de variance $\sigma^2 > 0$.
• La *production totale* Q est une variable aléatoire à valeurs strictement positives telle que :

$$Q = Bx^a y^{1-a} exp(R).$$

On suppose que les variables aléatoires Q et R sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
On pose : $b = \ln B$, $u = \ln x - \ln y$ et $T = \ln Q - \ln y$. On a donc : $T = au + b + R$.
On sélectionne n entreprises ($n \geq 1$) qui produisent le bien considéré à l'époque donnée.
On mesure pour chaque entreprise i ($i \in [\![1,n]\!]$) la quantité de travail x_i et la quantité de capital y_i utilisées ainsi que la quantité produite Q_i^*. On suppose que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on a $x_i > 0$, $y_i > 0$ et $Q_i^* > 0$.
Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, la production totale de l'entreprise i est alors une variable aléatoire Q_i telle que $Q_i = Bx_i^a y_i^{1-a} exp(R_i)$, où $R_1, R_2, ..., R_n$ sont des variables aléatoires supposées indépendantes et de même loi que R et le réel strictement positif Q_i^*

est une réalisation de la variable aléatoire Q_i.
On pose tout $i \in [\![1,n]\!]$: $u_i = \ln x_i - \ln y_i$, $T_i = \ln Q_i - \ln y_i$ et $t_i = \ln Q_i^* - \ln y_i$.
Ainsi, pour chaque entreprise $i \in [\![1,n]\!]$, on a $T_i = au_i + b + R_i$ et le réel t_i est une réalisation de la variable aléatoire T_i.
On rappelle les définitions et résultats suivants :

- Si $(v_i)_{1\leq i\leq n}$ est une série statistique, la moyenne et la variance empiriques, notées respectivement $\overline{v}$ et s_v^2, sont données par : $\overline{v} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} v_i$ et $s_v^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(v_i - \overline{v})^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} v_i^2 - \overline{v}^2$.
- Si $(v_i)_{1\leq i\leq n}$ et $(w_i)_{1\leq i\leq n}$ sont deux séries statistiques, la covariance empirique de la série double $(v_i, w_i)_{1\leq i\leq n}$, notée $\mathrm{Cov}(v,w)$, est donnée par : $\mathrm{Cov}(v,w) = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(v_i - \overline{v})(w_i - \overline{w}) = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} v_i w_i - \overline{vw} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(v_i - \overline{v})w_i$.

9. (a) Montrer que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, la variable aléatoire T_i suit la loi normale $\mathcal{N}(au_i + b, \sigma^2)$.
   (b) Les variables aléatoires $T_1, T_2, ..., T_n$ sont-elles indépendantes ?

Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, soit φ_i la densité continue sur $\mathbb{R}$ de T_i : $\forall d \in \mathbb{R}, \varphi_i(d) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left(-\dfrac{1}{2\sigma^2}(d - (au_i + b))^2\right)$.

Soit $\mathcal{F}$ l'ouvert défini par $\mathcal{F} =]0,1[\times\mathbb{R}$ et M la fonction de $\mathcal{F}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $M(a,b) = \ln\left(\prod_{i=1}^{n} \varphi_i(t_i)\right)$.

On suppose que : $0 < \mathrm{Cov}(u,t) < s_u^2$.

10. (a) Calculer le gradient $\nabla(M)(a,b)$ de M en tout point $(a,b) \in \mathcal{F}$.
    (b) En déduire que M admet sur $\mathcal{F}$ un unique point critique, noté $(\hat{a}, \hat{b})$.
    (c) Exprimer $\hat{a}$ et $\hat{b}$ en fonction de $\mathrm{Cov}(u,t)$, s_u^2, $\overline{t}$ et $\overline{u}$.
    (*$\hat{a}$ et $\hat{b}$ sont les estimations de a et b par la méthode dite du maximum de vraisemblance*)
11. (a) Soit $\nabla^2(M)(a,b)$ la matrice hessienne de M en $(a,b) \in \mathcal{F}$. Montrer que $\nabla^2(M)(a,b) = -\dfrac{n}{\sigma^2}\begin{pmatrix} s_u^2 + \overline{u}^2 & \overline{u} \\ \overline{u} & 1 \end{pmatrix}$.
    (b) En déduire que M admet en $(\hat{a}, \hat{b})$ un maximum global.
12. Soit (h,k) un couple de réels non nuls. Calculer $M(\hat{a}+h, \hat{b}+k) - M(\hat{a}, \hat{b})$.
    En déduire que M admet en $(\hat{a}, \hat{b})$ un maximum global.
13. On rappelle qu'en `Scilab`, les commandes `variance` et `corr` permettent de calculer respectivement la variance d'une série statistique et la covariance d'une série statistique double.
    Si $(v_i)_{1\leq i\leq n}$ et $(w_i)_{1\leq i\leq n}$ sont deux séries statistiques, alors la variance de $(v_i)_{1\leq i\leq n}$ est calculable par `variance(v)` et la covariance de $(v_i, w_i)_{1\leq i\leq n}$ est calculable par `corr(v,w,1)`.
    On a relevé pour $n = 16$ entreprises qui produisent le bien considéré à l'époque donnée, les deux séries statistiques $(u_i)_{1\leq i\leq n}$ et $(t_i)_{1\leq i\leq n}$ reproduites dans les lignes (1) et (2) du code *Scilab* suivant dont la ligne (5) est incomplète :

```
(1) u=[1.06,0.44,2.25,3.88,0.61,1.97,3.43,2.10,1.50,1.68,2.72,1.35,2.94,2.78,3.43,3.58]

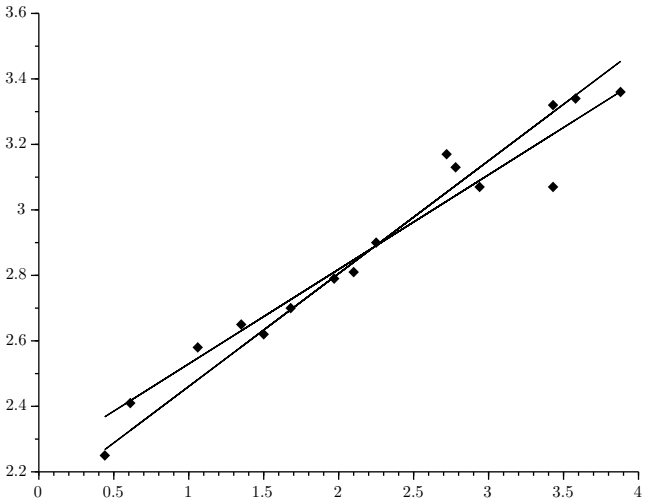
(2) t=[2.58,2.25,2.90,3.36,2.41,2.79,3.32,2.81,2.62,2.70,3.17,2.65,3.07,3.13,3.07,3.34]

(3) plot2d(u,t,-4) // -4 signifie que les points sont représentés par des losanges.

(4) plot2d(u,corr(u,t,1)/variance(u)*u+mean(t)-corr(u,t,1)/variance(u)*mean(u)) // équation de la
droite de régression de t en u.

(5) plot2d(u,.....) // équation de la
droite de régression de u en t.
```

    Le code précédent complété par la ligne (5) donne alors la figure suivante :



(a) Compléter la ligne (5) du code permettant d'obtenir la figure précédente (*on reportera sur sa copie, uniquement la ligne (5) complétée*).

(b) Interpréter le point d'intersection des deux droites de régression.

(c) Estimer graphiquement les moyennes empiriques $\overline{u}$ et $\overline{t}$.

(d) Le coefficient de corrélation empirique de la série statistique double $(u_i, t_i)_{1\leq i\leq 16}$ est-il plus proche de -1, de 1 ou de 0 ?

(e) On reprend les lignes (1) et (2) du code précédent que l'on complète par les instructions (6) à (11) qui suivent et on obtient le graphique ci-dessous :

```
(6) a0=corr(u,t,1)/variance(u)

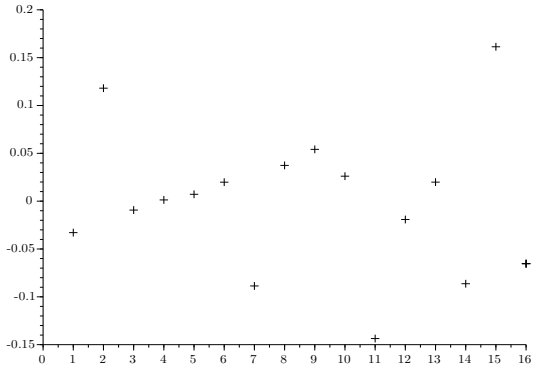
(7) b0=mean(t)-corr(u,t,1)/variance(u)*mean(u)

(8) t0=a0*u+b0

(9) e=t0-t

(10) p=1:16

(11) plot2d(p,e,-1) // -1 signifie que les points
sont représentés par des symboles d'addition.
```



Que représente ce graphique ? Quelle valeur peut-on conjecturer pour la moyenne des ordonnées des 16 points obtenus sur le graphique ? Déterminer mathématiquement la valeur de cette moyenne.

14. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $A_n = \dfrac{1}{ns_u^2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(u_i - \overline{u})T_i$. On suppose que le paramètre σ^2 est connu.

(a) Calculer l'espérance $E(A_n)$ et la variance $V(A_n)$ de la variable aléatoire A_n. Préciser la loi de A_n.

(b) On suppose que a est un paramètre inconnu. Soit α un réel donné vérifiant $0 < \alpha < 1$.
On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et d_α le réel tel que $\Phi(d_\alpha) = 1 - \dfrac{\alpha}{2}$.
Déterminer un intervalle de confiance du paramètre a au niveau de confiance $1 - \alpha$.