# E.S.C.Paris 1999

**Option Economique**

# MATHEMATIQUES III

## EXERCICE I

Soit $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 muni de sa structure d'espace vectoriel et soit $J$ la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On considère l'application $S$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans lui-même qui associe à tout élément $M$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'élément $S(M) = J\,M\,J$.

**1.** **a)** Montrer que l'application $S$ ainsi définie est un automorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Quel est l'automorphisme réciproque de $S$?

**b)** Montrer que si $M$ et $N$ sont deux éléments quelconques de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on a $S(MN) = S(M)S(N)$

**2.** On considère les éléments

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\ J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\ L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Montrer que $(I, J, K, L)$ forme une base de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

**3.** Montrer que $I$, $J$, $K$, $L$ sont des vecteurs propres de $S$. Déterminer la matrice représentant l'automorphisme $S$ dans la base $(I, J, K, L)$.

**4.** Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des éléments $M$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $S(M) = M$ et soit $\mathcal{G}$ l'ensemble des éléments $M$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$(R) Vérifiant $S(M) = -M$. Montrer que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et que tout élément $M$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ peut s'écrire d'une manière et d'une seule sous la forme $M = M_+ + M_-$ avec $M_+ \in \mathcal{F}$ et $M_- \in \mathcal{G}$ .

A titre d'exemple, déterminer les matrices $A_+$ et $A_-$ lorsque $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

**5.** **a)** Montrer que le produit de deux matrices appartenant à $\mathcal{F}$ appartient aussi à $\mathcal{F}$. Que peut-on dire du produit de deux éléments de $\mathcal{G}$ ?

**b)** Plus précisément, pour deux matrices $M$ et $N$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, exprimer $(MN)_+$ et $(MN)_-$ en fonction de $M_+$, $M_-$, $N_+$ et $N_-$.

## EXERCICE II

Pour tout entier $k$ supérieur ou égal à 2, soit $f_k$ la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f_k(x) = \frac{\ln^k(x)}{x-1} \text{ si } x > 0 \text{ et } x \neq 1 \text{ et } f_k(1) = 0$$

**1.** Etude des fonctions $f_k$.

**a)** Soit $k$ un entier supérieur ou égal à 2.

Justifier la dérivabilité de la fonction $f_k$ sur $]0, 1[ \cup ]1, +\infty[$ et préciser la valeur de la dérivée $f_k'(x)$, pour tout $x$ appartenant à $]0, 1[ \cup ]1, +\infty[$.

Montrer que $f_k$ est dérivable en 1 et donner, selon les valeurs de $k$, la valeur de $f_k'(1)$

**b)** On considère les fonctions auxiliaires $\varphi_k$ définies, pour tout $x > 0$, par

$$\varphi_k(x) = k(x-1) - xln(x).$$

Etudier, pour tout entier $k$ supérieur ou égal à 2, les variations de la fonction $\varphi_k$. Montrer que l'équation $\varphi_k(x) = 0$ admet une racine unique dans l'intervalle $]1, +\infty[$. Dans la suite, on notera $a_k$ cette racine.

**c)** En distinguant les cas $k = 2$, $k$ pair supérieur ou égal à 4, $k$ impair supérieur ou égal à 3, donner le tableau de variation de la fonction $f_k$ (on précisera les limites aux bornes).

**2.** Etude asymptotique de la suite $(a_k)_{k\geq 2}$.

**a)** Montrer que, pour tout entier $k$ supérieur ou égal à 2, $e^{k-1} \leq a_k \leq e^k$

**b)** Pour tout entier $k$ supérieur ou égal à 2, on pose $a_k = e^k(1+\delta_k)$. Montrer que le réel $\delta_k$ vérifie l'équation

$$-ke^{-k} = (1+\delta_k)\ln(1+\delta_k)$$

Justifier l'inégalité : $|\ln(1+\delta_k)| \leq ke^{1-k}$. En déduire que la suite $(\delta_k)_{k\geq 2}$ a une limite nulle et, plus précisément, que $\delta_k$ est équivalent à $-ke^{-k}$ quand $k$ tend vers l'infini.

**c)** Justifier, en conclusion, la relation

$$a_k = e^k - k + o(k) \quad \text{quand} \quad k \to +\infty$$

**3.** Calcul approché des nombres $a_k$.

Ecrire un programme en Turbo-Pascal donnant une valeur approchée à moins de $10^{-4}$ près du nombre $a_4$.

# EXERCICE III

Une chaîne de fabrication produit des objets dont certains peuvent être défectueux. Pour modéliser ce processus on considère une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes, de paramètre $p$, $(0 < p < 1)$. La variable aléatoire $X_n$ prend la valeur 1 si le $n^{ième}$ objet produit est défectueux et prend la valeur 0 s'il est de bonne qualité.
Pour contrôler la qualité des objets produits, on effectue des prélèvements aléatoires et on considère une suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes, de paramètre $p'$, $(0 < p' < 1)$, telle que $Y_n$ prend la valeur 1 si le $n^{ième}$ objet produit est contrôlé et 0 s'il ne l'est pas.
Toutes les variables aléatoires $X_n$ et $Y_n$ sont définies sur un même espace probabilisé $\Omega$, muni d'une probabilité notée $\mathbf{P}$ et sont supposées toutes indépendantes entre elles.
La probabilité conditionnelle d'un événement $A$ sachant un événement $B$ est notée $\mathbf{P}_B(A)$
Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $Z_n = X_nY_n$. La variable aléatoire $Z_n$ ainsi définie vaut donc 1 si le $n^{ième}$ objet est à la fois défectueux et contrôlé et 0 sinon.
L'objet de l'exercice est d'étudier le nombre d'objets défectueux produits par la chaîne avant qu'un objet défectueux n'ait été détecté.

**1.** Déterminer, pour tout entier $n \geq 1$, la loi de la variable aléatoire $Z_n$ et la covariance des variables $X_n$ et $Z_n$. En déduire que les variables $X_n$ et $Z_n$ ne sont pas indépendantes.

*Par contre, il résulte des hypothèses (et on ne demande pas de le justifier) que, pour tout entier $n$, la variable aléatoire $Z_n$ est indépendante des variables $(X_i, i \neq n)$ et des variables $(Y_i, i \neq n)$, de même que des variables $(Z_i, i \neq n)$.*

**2.** Soit, pour tout entier $n \geq 1$, $A_n$ l'événement : "le $n^{ième}$ objet fabriqué est le premier qui ait été contrôlé et trouvé défectueux".

**a)** Exprimer $A_n$ à l'aide des variables aléatoires $Z_1$, $Z_2, \ldots,$ $Z_n$ et déterminer $p(A_n)$.

**b)** Montrer qu'on finira, presque sûrement, par détecter un objet défectueux.

**3.** Soit un entier $n \geq 2$.

**a)** Pour tout entier $k$ vérifiant $1 \leq k \leq n-1$, calculer la probabilité des événements $(X_k = 1) \cap A_n$ et $(X_k = 1) \cap (Z_k = 0)$.
On note $B_k$ l'événement $(Z_k = 0)$. Montrer l'égalité des probabilités conditionnelles

$$\mathbf{P}_{A_n}(X_k = 1) = \mathbf{P}_{B_k}(X_k = 1) = \frac{p - pp'}{1 - pp'}$$

**b)** Montrer que si $x_1,\ x_2, \ldots,\ x_{n-1}$ est une suite quelconque de nombres égaux à 0 ou à 1, on a

$$\mathbf{P}_{A_n}(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}) = \prod_{i=1}^{n-1} \mathbf{P}_{A_n}(X_i = x_i)$$

**c)** Soit $S_n = \sum_{j=1}^{n-1} X_j$ le nombre d'objets défectueux fabriqués avant le $n^{ième}$ objet et soit un entier $m$ vérifiant $0 \leq m \leq n-1$ . Calculer $\mathbf{P}_{A_n}(S_n = m)$

**d)** Déterminer l'espérance de $S_n$ pour la probabilité conditionnelle sachant $A_n$.