EDHEC 1997 voie Eco

Exercice 1

Pour tout entier naturel n non nul, on note f_n la fonction définie par: $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f_n(x) = x - n.\ln(x)$.

1. a) Etudier cette fonction et dresser son tableau de variations.
   b) En déduire, lorsque n est supérieur ou égal à 3, l'existence de deux réels $u_n$et $v_n$solutions de l'équation $f_n(x) = 0$ et vérifiants $0 < u_n < n < v_n$.

2. Etude de la suite $(u_n)_{n\geq 3}$.

   a) Montrer que $\forall n \geq 3, 1 < u_n < e$.
   b) Montrer que $f_n(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$, puis en conclure que (u_n) est décroissante.
   c) En déduire que $(u_n)_{n\geq 3}$ converge et montrer, en encadrant $\ln(u_n)$, que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.
   d) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(u_n)}{u_n - 1} = 1$; en déduire que $u_n - 1 \sim \frac{1}{n}$.

3. Etude de la suite $(v_n)_{n\geq 3}$

   a) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.
   b) Calculer $f_n(n \cdot \ln(n))$ puis montrer que $\forall n \geq 3$, $n.\ln(n) < v_n$.
   c) Soit g la fonction définie par: $\forall x \in \mathbb{R}^*, g(x) = x - 2\ln(x)$.
   Etudier g et donner son signe. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, n > 2\ln(n)$.
   d) En déduire le signe de $f_n(2n.\ln(n))$, puis établir que : $n\ln(n) < v_n < 2n.\ln(n)$
   e) Montrer enfin que: $\ln(v_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} n \cdot \ln(n)$

Exercice 2

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $u_n = 1/\binom{n+p}{n}$,où p désigne un entier naturel fixé.

1. Montrer que si $p = 0$ ou si $p = 1$ la série de terme général $u_n$diverge.

On suppose dans toute la suite que p est supérieur ou égal à 2 et on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$

2. a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, (n + p + 2)\, u_{n+2} = (n + 2)\, u_{n+1}$.
   b) En déduire par récurrence sur n que $S_n = \frac{1}{p-1}(1 - (n + p + 1)\, u_{n+1})$

3. a) On pose $v_n = (n + p)u_n$. Montrer que la suite (v_n) est décroissante.
   b) En déduire que la suite (v_n) converge et que sa limite ℓ est positive ou nulle.
   c) Utiliser le résultat pprécédent pour montrer que la série de terme général $u_n$converge et donner sa somme en fonction de p et de ℓ.

4. On suppose dans cette question seulement que $\ell \neq 0$.

   a) Montrer qu'au voisinage de $+\infty$, $u_n \sim \dfrac{\ell}{n}$
   b) En déduire une contradiction avec la troisième question.

5. Donner la valeur de ℓ et en déduire en fonction de p,la somme de la série de terme général u_n

Exercice 3

I désigne la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et M une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ pour laquelle il existe un entier p supérieur ou égal à 2 tel que $M^p = 0$ et $M^{p-1} \neq 0$
On définit alors les matrices suivantes :

- $\exp(M) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{k!} M^k$, avec la convention $M^0 = I$
- $\ln(I+M) = \sum_{k=1}^{p-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} M^k$

On considère l'enemble E des matrices triangulaires supérieures de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont tous les éléments diagonaux sont nuls.

1. a) Montrer que E est un espace vatoriel de sur $\mathbb{R}$ et donner sa dimension.
   b) Montrer que les matrices de E ne sont pas inversibles.
   c) Montrer que toute matrice non nulle de E n'est pas diagonalisable.

   Dans la suite, A désigne une matrice quelconque de E.

2. a) calculer pour tout k de $\mathbb{N}$.
   b) Exprimer A^k $\exp(A)$ et $\ln(I+A)$ en fonction de I et de A.

3. Montrer que $\ln[\exp(A)] = A$

4. a) Vérifier que $\ln(I+A)$ appartient à E.
   b) Montrer que $\exp[\ln(I+A)] = I + A$

5. Montrer que $\forall m \in \mathbb{N}$, $\exp(m\,A) = [\exp(A)]^m$

6. Montrer que $\exp(A)$ est inversible et que sont inverse est : $[\exp(A)]^{-1} = \exp(-A)$

7. Quelle condition doivent vérifier deux matrices A et B de E pour que $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$?

Problème

Dans ce problème n désigne un entier supérieur ou égal à 2.

Partie I

On effectue $2n$ tirages au hasard dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n.
Un tirage consiste à extraire une boule de l'urne, la boule tirée étant remise dans l'urne.
On note N la variable aléatoire égale au numéro du tirage au cours duquel, pour la première fois, on a obtenu une boule déjà obtenue auparavant.

1. Montrer que $N(\Omega) = [[2, n+1]]$.

2. Montrer que $\forall k \in [[1,n]],\ p(N > k) = \frac{A_n^k}{n^k}$

Rappel : A_n^k désigne le nombre d'arrangements de k éléments d'un ensemble à n éléments.

3. a) Montrer que : $\forall k \in [[2,n]],\ p(N=k) = p(N > k-1) - p(N > k)$.
   b) Calculer $p(N = n+1)$ puis en déduire la loi de N.

4. Montrer que l'espérance $E(N)$ de la variable aléatoire N est : $E(N) = \sum_{k=0}^{n} \frac{A_n^k}{n^k}$

Partie II

Soit X une variable aléatoire, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, de densité f (nulle sur $\mathbb{R}_-^*$) et de fonction de répartition F. On suppose, de plus, f continue sur $\mathbb{R}^+$.
On pose, pour tout réel x positif, $\varphi(x) = \int_0^x t\, f(t)\, dt$.

1. Montrer, grâce à une intégration par parties, que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \varphi(x) = \int_0^x [1 - F(t)]\, dt - x \cdot P(X > x)$$

2. On suppose, dans cette question, que l'intégrale $\int_0^{+\infty} [1 - F(t)]\, dt$ converge.

   a) Calculer $\varphi'(x)$ et en déduire que la fonction φ est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

   b) Montrer que φ est majorée et en déduire que X a une espérance.

   c) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ 0 \leq x \cdot P(X > x) \leq \int_x^{+\infty} t\, f(t)\, dt$

   d) En utilisant le fait que X a une espérance, montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_x^{+\infty} t\, f(t)\, dt = 0$

   En déduire $\lim\limits_{x \to \infty} x\, P(X > x)$, puis montrer que : $E(X) = \int_0^{+\infty} [1 - F(t)]\, dt$

Partie III

On considère la fonctionF_n définie par : $\begin{cases} F_n(x) = 0 \text{ si } x < 0 \\ F_n(x) = 1 - \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n e^{-x} \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$

1. Montrer que F_n est la fontion de répartition d'une variable aléatoire à densité T_n.

2. a) Montrer que, pour tout entier naturel k, l'intégrale $I_k = \int_0^{+\infty} x^k e^{-x} dx$ converge.

   b) Montrer que $I_{k+1} = (k+1)\, I_k$ puis donner la valeur de I_k.

3. En déduire , en utilisant la partie II, que T_n a une espérance etque $E(T_n) = E(N)$.

Partie VI

On cosidère la déclaration de fonction suivante , rédigée en TurboPascal :

```
function f(p,q:integer):real;
var j:integer; z:real;
begin
     if (p<=0) or (q<0) then write('valeurs incorrectes')
     else
     begin
          z:=1;
          for j:=1 to (q-1) do z:=z*(1-j/p)
          f:=z;
     end;
end;
```

1. Montrer que si p est un entier naturel non nnul et si q est un entier naturel alors $f(p,q) = \dfrac{A_p^q}{p^q}$

2. Utiliser cette déclaration pour écrire un algorithme en TurboPascal donnant la valeur commune de $E(N)$ et $E(T_n)$ lorsque l'utilisateur entre la valeur de n au clavier.