Copie anonyme - n°anonymat : 367901

NS-00077
367901
Mat Appro

Code épreuve : 282 | **Nombre de pages :** 27 | **Session :** 2026

Épreuve de : Mathématiques Approfondies ESSEC / HEC

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Partie I :

1. Soient $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et ϕ_σ l'endomorphisme canoniquement associé à P_σ

Soit $j \in [\![1, n]\!]$, $\phi_\sigma(e_j) = \sum_{i=1}^{n} \langle \phi_\sigma(e_j), e_i \rangle e_i$

$= \sum_{i=1}^{n} (P_\sigma)_{i,j} e_i$

$= \sum_{i=1}^{n} \delta_{i,\sigma(j)} e_i$

$= \delta_{j,\sigma(j)} e_{\sigma(j)} + 0$

$= e_{\sigma(j)}$

$\forall j \in [\![1, n]\!]$, $\phi_\sigma(e_j) = e_{\sigma(j)}$

2. Soit $(\sigma, \tau) \in \mathfrak{S}_n^2$

Soit $(i,j) \in [\![1, n]\!]^2$, $(P_\sigma P_\tau)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} (P_\sigma)_{i,k} (P_\tau)_{k,j}$

$= \sum_{k=1}^{n} \delta_{i,\sigma(k)} \delta_{k,\tau(j)}$

$= \delta_{i,\sigma(\tau(j))} \delta_{\tau(j),\tau(j)} + 0$

prepaindex.fr

$P_\sigma P_\tau|_{i,j} = \delta_{i,\sigma\circ\tau(j)}$

$= (P_{\sigma\circ\tau})_{i,j}$

Donc $\forall (\sigma,\tau) \in \mathfrak{S}_n^2$, $P_\sigma P_\tau = P_{\sigma\circ\tau}$

~~Soit~~

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. σ est bijective et

$P_\sigma P_{\sigma^{-1}} = P_{\sigma\circ\sigma^{-1}}$

$= P_{id_{[\![1,n]\!]}}$

$= I_n$

Donc P_σ est inversible et $P_\sigma^{-1} = P_{\sigma^{-1}}$ qui est une matrice de permutation

3. Soit $P \in \mathcal{P}_n$

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ tel que $P = P_\sigma$

~~P^{-1}~~

$P^{-1} = P_\sigma^{-1} = P_{\sigma^{-1}}$

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]$, $(P^{-1})_{i,j} = (P_{\sigma^{-1}})_{i,j}$

$= \delta_{i,\sigma^{-1}(j)}$

$= \delta_{\sigma(i),j}$ par bijectivité $i = \sigma^{-1}(j) \Leftrightarrow \sigma(i) = j$

$= \delta_{j,\sigma(i)}$

$= (P_\sigma)_{j,i}$

$= ({}^tP)_{i,j}$

Donc $P^{-1} = {}^tP$

Donc $\forall P \in \mathcal{P}_n$, $P \in \mathcal{O}_n$

prepaindex.fr

4.

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, Q_n : "$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\exists \sigma \in \mathfrak{S}_n$ / $x_{\sigma(1)} \geq \dots \geq x_{\sigma(n)}$"

Initialisation : $n = 1$ Soit $x_1 \in \mathbb{R}^1$ a pour seul indice et c'est direct Bravo

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que Q_n.

Soit $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}_+^{n+1}$

On note i l'indice du plus petit réel de $(x_1, \dots, x_{n+1})$

Alors $(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^n$

~~Donc $\exists \sigma \in \mathfrak{S}_n$ / $x_{\sigma(1)} \geq \dots \geq x_{\sigma(n)}$~~

On nous assure qu'il y a une bijection α de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, n+1]\!] \setminus \{i\}$

telle que $x_{\alpha(1)} \geq \dots \geq x_{\alpha(n)}$

Soit $\sigma : [\![1, n+1]\!] \to [\![1, n+1]\!]$

$$k \mapsto \begin{cases} i & \text{si } k = n+1 \\ \alpha(k) & \text{sinon} \end{cases}$$

σ est une bijection de $[\![1, n+1]\!]$ dans $[\![1, n+1]\!]$

~~Donc~~ •

et $x_{\sigma(1)} \geq \dots \geq x_{\sigma(n)} \geq x_i$

$x_{\sigma(1)} \geq \dots \geq x_{\sigma(n)} \geq x_{\sigma(n+1)}$. Q_{n+1} vraie

D'où la récurrence

prepaindex.fr

5. Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(\alpha, \beta) \in \mathfrak{S}_n^2$ tels que $x_{\alpha(1)} \geq \dots \geq x_{\alpha(n)}$
et $x_{\beta(1)} \geq \dots \geq x_{\beta(n)}$

Il n'y a qu'une seule manière de ranger les $(x_1, \dots, x_n)$ par ordre décroissant donc il y a une unique permutation qui fait cela

Donc $\forall i \in [\![1, n]\!], x_{\alpha(i)} = x_{\beta(i)}$

6.
```
def permutevecteur(x):
    n = len(x)
    alpha = np.arange(0, n, 1)
    Y = x.copy()
    for i in range(n):
        imax = i
        for k in range(i, n):
            if Y[k] > Y[imax]
                imax = k
        if imax > i:
            Y[i], Y[imax] = Y[imax], Y[i]
            alpha[i], alpha[imax] = alpha[imax], alpha[i]
    return Y, alpha
```

prepaindex.fr

IMPRIMERIE NATIONALE – 2025-12-1003094

Copie anonyme - n°anonymat : 367901

Emplacement QR Code

Code épreuve : 282 | Nombre de pages : 27 | Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques Approfondies ESSEC/HEC

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

prepaindex.fr

Partie 2

7.a. Soit S une matrice orthostochastique.

Soit $Q \in O_n$ telle que $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad S_{i,j} = (Q_{i,j})^2$

- $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad S_{i,j} = (Q_{i,j})^2 \geq 0$
- $\forall i \in [\![1,n]\!], \quad \sum_{j=1}^{n} S_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} (Q_{i,j})^2$

$= \|L_i\|^2$ avec L_i la ligne i de Q

$= 1$

car Q est orthonormale donc ${}^tQ$ l'est également donc la famille des colonnes de ${}^tQ$ est orthonormée. Donc la famille des lignes de Q aussi. Donc L_i est unitaire

- $\forall j \in [\![1,n]\!], \quad \sum_{i=1}^{n} S_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} Q_{i,j}^2$

$= \|C_j\|^2$ avec C_j la colonne j de Q

$= 1$ car $Q \in O_n$

Donc toute matrice orthostochastique est bistochastique

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Soit $P \in \mathcal{P}_n$

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $P_{i,j} = \delta_{i,\sigma(j)} \geq 0$

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{j=1}^{n} P_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} \delta_{i,\sigma(j)}$

$= \delta_{i,\sigma(\sigma^{-1}(i))}$ car σ bijective

$= 1$

$\forall j \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{i=1}^{n} P_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} \delta_{i,\sigma(j)}$

$= \delta_{\sigma(j),\sigma(j)}$ car σ injective

$= 1$

Donc soit $P \in \mathcal{P}_n$, P est bistochastique

Q 7.b.

prepaindex.fr

8. $n=2$

8.a. Toutes les permutations de $[\![1,2]\!]$ sont :

$$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \mapsto \begin{matrix}2\\1\end{matrix}$$

Donc les matrices de permutations de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ sont :

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

$(\Rightarrow)$

8.b. Soit $S \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice bistochastique.

Alors en notant $S = \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$

On a $\begin{cases}a+b=1\\c+d=1\\a+c=1\\b+d=1\end{cases}$ et $(a,b,c,d) \in [\![0,1]\!]^4$

Donc $\begin{cases}b=1-a\\d=1-c\\a=1-c=d\\b=1-d=c=1-a\end{cases}$ et $0 \leq a = 1-c \leq 1$

Donc $S = \begin{pmatrix}a&1-a\\1-a&a\end{pmatrix}$

$$S = a\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} + (1-a)\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

$$S = \underbrace{a}_{\in [0,1]} I_2 + (1-a)\underbrace{\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}}_{\text{matrice de permutation}}$$

$(\Leftarrow)$ Soit $S \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Supposons qu'il existe $\alpha \in [0,1]$ et P une matrice de permutation de taille telle que

$$S = \alpha I_2 + (1-\alpha)P$$

prepaindex.fr

Si $P = I_2$:

$S = \alpha I_2 + (1-\alpha) I_2$

$= I_2$

S est bistochastique

Si $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$:

$S = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (1-\alpha) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ 1-\alpha & \alpha \end{pmatrix}$

* $\alpha \geq 0$

$1-\alpha \geq 0$

* $\alpha + 1 - \alpha = 1$

Donc S est bistochastique.

Donc $\forall S \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, S bistochastique ssi Il existe $\alpha \in [0,1]$ et P une matrice de permutation tel que $S = \alpha I_2 + (1-\alpha) P$

---

9. Soit $S \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice bistochastique

g.a. Il y a :

$\sigma_1 : \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 : \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$\sigma_3 : \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\sigma_5 : \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\sigma_2 : \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\sigma_4 : \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

prepaindex.fr

IMPRIMERIE NATIONALE – 2025-12-1003094

Copie anonyme - n°anonymat : 367901

Emplacement QR Code

Code épreuve : 282 | Nombre de pages : 27 | Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques Approfondies ESSEC IMEC

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

9.a C'est à dire 6.

Plus généralement il y a $n!$ permutations de $[\![1,n]\!]$

9.b. En reprenant les notations de la question précédente

$P_1 = P_{\sigma 1}$

$P_2 = P_{\sigma 2}$

$P_3 = P_{\sigma 3}$

$P_4 = P_{\sigma 4}$

$P_5 = P_{\sigma 5}$

9.c. S est bistochastique

Donc $S_{1,1} + S_{1,2} + S_{1,3} = 1$

Donc $S_{1,3} = 1 - S_{1,1} - S_{1,2}$

$S_{2,1} + S_{2,2} + S_{2,3} = 1$

Donc $S_{2,3} = 1 - S_{2,1} - S_{2,2}$

$S_{1,1} + S_{2,1} + S_{3,1} = 1$

Donc $S_{3,1} = 1 - S_{1,1} - S_{2,1}$

$S_{1,2} + S_{2,2} + S_{3,2} = 1$

$S_{3,2} = 1 - S_{1,2} - S_{2,2}$

prepaindex.fr

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Donc $S = \begin{pmatrix} s_{1,1} & s_{1,2} & 1-s_{1,1}-s_{1,2} \\ s_{2,1} & s_{2,2} & 1-s_{2,1}-s_{2,2} \\ 1-s_{1,1}-s_{2,1} & 1-s_{1,2}-s_{2,2} & s_{3,3} \end{pmatrix}$

On a $\forall (i,j) \in [\![1,3]\!]^2,\ s_{i,j} \geq 0$

$s_{3,3} = 1 - (1-s_{1,1}-s_{1,2}) - (1-s_{2,1}-s_{2,2})$ (somme de la 3e colonne)

$s_{3,3} = s_{1,1} + s_{1,2} + s_{2,1} + s_{2,2} - 1$

Soit $1 \leq i,j \leq 2$

$s_{i,j} \geq 0$

~~$s_{3,3} \geq 0$~~

$s_{1,1} s_{1,2} + s_{1,2} + s_{2,1} - 1 \geq 0$

$s_{1,1} + s_{1,2} + s_{2,1} + s_{2,2} \geq 1$

$s_{2,1} = 1 - s_{1,1} - s_{3,1} \leq 1$

On a trouvé que $\forall (i,j) \in [\![1,3]\!]^2,\ s_{i,j} \in [0,1]$

Ord. Soit $B_0 = \min_{1 \leq i \leq 5}$

Soit $(\beta_1, \ldots, \beta_5) \in \mathbb{R}^5$

~~$B_0 + \beta_1 p_1 + \beta_1 p_2 + \beta_2 p_2 + \beta_4 p_4$~~

prepaindex.fr

$$\beta_0 I_3 + \sum_{i=1}^{5} \beta_i P_i = \begin{pmatrix} \beta_0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \beta_0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \beta_0 \end{pmatrix} + \left(\begin{array}{ccc} \beta_1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \beta_1 \\ \cdot & \beta_1 & \cdot \end{array}\right) + \left(\begin{array}{ccc} \cdot & \cdot & \beta_2 \\ \cdot & \beta_2 & \cdot \\ \beta_2 & \cdot & \cdot \end{array}\right) + \left(\begin{array}{ccc} \cdot & \beta_3 & \cdot \\ \beta_3 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \beta_3 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{ccc} \cdot & \beta_4 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \beta_4 \\ \beta_4 & \cdot & \cdot \end{array}\right) + \left(\begin{array}{ccc} \cdot & \cdot & \beta_5 \\ \beta_5 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \beta_5 & \cdot \end{array}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} \beta_0 + \beta_4 & \beta_3 + \beta_4 & \beta_2 + \beta_5 \\ \beta_3 + \beta_5 & \beta_0 + \beta_2 & \beta_1 + \beta_4 \\ \beta_2 + \beta_4 & \beta_1 + \beta_5 & \beta_0 + \beta_3 \end{pmatrix}$$

Supposons que $\beta_{0,0} = S_{1,1}$ et que $S = \beta_0 I_3 + \sum_{i=1}^{5} \beta_i P_i$

Alors $\begin{cases} \beta_0 + \beta_4 = S_{1,1} \\ \beta_2 + \beta_3 = S_{2,2} \\ \beta_0 + \beta_3 = S_{3,3} \end{cases}$ donc $\begin{cases} \beta_4 = 0 \\ \beta_2 = S_{2,2} - S_{1,1} \\ \beta_3 = S_{3,3} - S_{1,1} \end{cases}$

~~De générale et Réciproque~~

De plus $\begin{cases} \beta_3 + \beta_5 = S_{2,1} \\ \beta_3 + \beta_4 = S_{1,2} \end{cases}$ donc $\begin{cases} \beta_5 = S_{2,1} - S_{3,3} + S_{1,1} \\ \beta_4 = S_{1,2} - S_{3,3} + S_{1,1} \end{cases}$

~~Conclusion~~

~~Conclusion~~

Réciproque calculatoire

On généralise facilement aux cas $\beta_0 = S_{2,2}$ et $\beta_0 = S_{3,3}$

g.e. ~~Cas général~~

Pour $n=2$. Soit $S \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ bistochastique

Alors il existe $k=2$, des matrices de Permutation I_2 et P et des réels positifs α et $1-\alpha$ tel que $1+(1-\alpha)1 = 1$ et $S = \alpha I_2 + (1-\alpha)P$

Donc le théorème de Birkhoff-Von Neumann est prouvé en $n=2$

Pour $n=3$: Idem, il reste à vérifier que $\beta_0 + \beta_4 + \dots + \beta_5 = 1$

C'est le cas pour $\beta_0 = S_{1,1}$, on notera facilement les restes

prepaindex.fr

10. def bistochastique(n, iter):

A2k = r.d.random([n, n])

A2kplus1 = A2k

for k in range(iter):

A2kplus1 = A2k / (np.dot(np.transpose(np.sum(A2k, axis=1)), np.linspace(1,1,n)))

A2k = A2kplus1 / (np.dot(np.transpose(np.linspace(1,1,n)), np.sum(A2kplus1, axis=0)))

return A2k

A la ligne 5 :

On cherche une matrice au dénominateur égale à $\begin{pmatrix} \sum_{l=1}^{n} A_{1l} & \cdots & \sum_{l=1}^{n} A_{1l} \\ \sum_{l=1}^{n} A_{2l} & \cdots & \sum_{l=1}^{n} A_{2l} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{l=1}^{n} A_{nl} & \cdots & \sum_{l=1}^{n} A_{nl} \end{pmatrix}$

pour diviser termes à termes.

Cette matrice est égale à $\begin{pmatrix} \sum_{l=1}^{n} A_{1l} \\ \vdots \\ \sum_{l=1}^{n} A_{nl} \end{pmatrix} (1 \cdots 1)$

Idem pour la ligne 6 mais avec $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (\sum_{l=1}^{n} A_{1l} \cdots \sum_{l=1}^{n} A_{1l}) = \begin{pmatrix} \sum A_{1l} & \cdots & \sum A_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum A_{1l} & \cdots & \sum A_{1l} \end{pmatrix}$

prepaindex.fr

IMPRIMERIE NATIONALE – 2025-12-1003094

Copie anonyme - n°anonymat : 367901

Emplacement QR Code

Code épreuve : 282 | Nombre de pages : 27 | Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques Approfondies ESSEC IMEC

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

prepaindex.fr

Partie 3 :

11. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

~~$P_\sigma X =$~~

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $(P_\sigma X)_{i,1} = \sum_{k=1}^{n} (P_\sigma)_{i,k} X_{k,1}$

$= \sum_{k=1}^{n} \delta_{i,\sigma(k)} x_k$

$= \delta_{i,\sigma(\sigma^{-1}(i))} x_{\sigma^{-1}(i)}$

$= x_{\sigma^{-1}(i)}$

$P_\sigma X = X_{\sigma^{-1}} = \begin{pmatrix} x_{\sigma^{-1}(1)} \\ \vdots \\ x_{\sigma^{-1}(n)} \end{pmatrix}$

12. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

f symétrique $\iff \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \sigma \in \mathfrak{S}_n, f(x) = f(x_\sigma)$

$\iff \forall x \in \mathbb{R}^n \ \forall \sigma \in \mathfrak{S}_n, f(x_{\sigma^{-1}}) = f(x)$

$\iff \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \forall P \in \mathfrak{S}_n, f(X_{\sigma^{-1}}) = f(X)$

f symétrique $\iff \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \forall P \in \mathfrak{S}_n, f(PX) = f(X)$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

13. $\Rightarrow$ Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

f symétrique $\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n,\ \forall \sigma \in \mathfrak{S}_n,\ f(x) = f(x_\sigma)$

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n,\ f(x) = f(x_\alpha)$ avec α la permutation de la question 8

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n,\ f(x) = f(\tilde{x})$ avec $\tilde{x} \in H_n$

On note $\tilde{f}$ la restriction de f à H_n

et ainsi

f symétrique $\Rightarrow \exists \tilde{f} \in \mathbb{R}^{H_n},\ \forall x \in \mathbb{R}^n,\ f(x) = \tilde{f}(\tilde{x})$

$\Leftarrow$ Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}^n}$

Supposons qu'il existe $\tilde{f} \in \mathbb{R}^{H_n}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ f(x) = \tilde{f}(\tilde{x})$

prepaindex.fr

14.

f_1 : OUI

Soit $x=(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$

$$f_1(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} x_{\sigma(k)}$$

Par changement de variable car σ est bijective sur $[\![1, n]\!]$

$$f_1(x) = f_1(x_\sigma)$$

f_2 : NON

Soit $x=(2, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ et $\sigma : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_2, x_n, x_3, \dots, x_n)$ $\in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$\sigma \in \mathfrak{S}_n$

or $f(x) = 2^2 + 0 + \dots + 0 = 4$

$$f(x_\sigma) = f(0, 2, 0, \dots, 0)$$
$$= 0 + 2 + 0 + \dots + 0$$
$$= 2$$

Donc $f(x) \neq f(x_\sigma)$

f_3 : OUI

Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$

$$f(x) = \max_{1 \leq i,j \leq n} |x_i - x_j|$$

Donc $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \ |x_i - x_j| \leq f(x)$

Donc $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \ |x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)}| \leq f(x)$ car $\sigma(i) \in [\![1,n]\!]$, $\sigma(j) \in [\![1,n]\!]$

Donc $f(x_\sigma) \leq f(x)$

prepaindex.fr

Réciproquement $f(x_\sigma) = \max_{1 \le i,j \le n} |x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)}|$

Donc $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $|x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)}| \le f(x_\sigma)$

Donc $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ $|x_{\sigma(\sigma^{-1}(i))} - x_{\sigma(\sigma^{-1}(j))}| \le f(x_\sigma)$ car $\sigma^{-1}(i) \in [\![1,n]\!]$, $\sigma^{-1}(j) \in [\![1,n]\!]$

Donc $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ $|x_i - x_j| \le f(x_\sigma)$

Donc $f(x) \le f(x_\sigma) \le f(x)$

D'où $f(x) = f(x_\sigma)$

15. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ symétrique de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$, $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $x \in \mathbb{R}^n$

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, on définit $g_{i,x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto f(x + te_i)$

Soit $i \in [\![1,n]\!]$

15.a. ~~$g_{i,x}$ est la composée de f et de~~

Par composition $g_{i,x} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$

$\forall t \in \mathbb{R}$ $g_{i,x}'(t) = \langle \nabla f(x + te_i), e_i \rangle$ (Règle de la chaîne)

$\forall t \in \mathbb{R}$ $g_{i,x}'(t) = \partial_i f(x + te_i)$

15.b ~~$g_{i,x_\sigma} =$~~

~~Soit $t \in \mathbb{R}$, $g_{i,x_\sigma}(t) = f(x_\sigma + te_i)$~~

$=$

prepaindex.fr

IMPRIMERIE NATIONALE – 2025-12-1003094

Copie anonyme - n°anonymat : 367901

Emplacement QR Code

Code épreuve : 292 | Nombre de pages : 27 | Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques Approfondies ESSEC / HEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

15.c. $g_{i,x\tau} = g_{\tau(i),x}$

Donc $g_{i,x\sigma'} = g_{\tau(i),x'}$

Donc $\forall t \in \mathbb{R}$

$$\partial_i f(x_\tau + t e_i) = \partial_{\tau(i)} f(x + t e_{\tau(i)})$$

En particulier pour $t = 0$

$$\partial_i f(x_\tau) = \partial_{\tau(i)} f(x)$$

16. Soit f une fonction S-convexe de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$
Soit $x \in D_{n,1}(\mathbb{R})$ et $P \in P_n$

$f(Px) \leq f(x)$ car P est bistochastique (7.a)

Et $f(P^{-1}Px) \leq f(Px)$ car P^{-1} est une matrice de permutation (2.1 et donc bistochastique (7.a)

Donc $f(x) \leq f(Px)$ $Px \in D_{n,1}(\mathbb{R})$

D'où $\forall x \in D_{n,1}(\mathbb{R}) \ \forall P \in P_n, \ f(x) = f(Px)$
Donc f symétrique
Donc toute fonction S-convexe est symétrique

prepaindex.fr

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

18. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ symétrique et convexe.

Soit $x \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{B}_n(\mathbb{R})$ une matrice bistochastique

~~$f(Bx)$~~

Selon le Théorème de Birkhoff-Von Neumann, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ $P_1, \dots, P_k \in \mathcal{P}_n^k$ et $(a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{R}^k$ tel que $a_1 + \dots + a_k = 1$ et $B = a_1 P_1 + \dots + a_k P_k$

$$f(Bx) = f\left(\left(\sum_{i=1}^{k} a_i P_i\right) x\right)$$

$$= f\left(\sum_{i=1}^{k} a_i P_i x\right)$$

$$\leq \sum_{i=1}^{k} a_i f(P_i x) \quad \text{par convexité}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{k} a_i f(x) \quad \text{par symétrie}$$

$$= 1 \times f(x) \quad \text{car } \sum_{i=1}^{k} a_i = 1$$

D'où ~~$\forall x \in \mathbb{R}^n$~~ $f(Bx) \leq f(x)$

Donc une ~~red~~ fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ symétrique et convexe est S-convexe

19. $n = 2$. Soit f une fonction S-convexe de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1

Soit $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto f((1-t)x_1 + t x_2, (1-t)x_2 + t x_1)$

19a. Par composition $g \in C^1(\mathbb{R})$

Selon la règle de la chaîne.

prepaindex.fr

$\forall t \in \mathbb{R}$, $g'(t) = \langle \nabla f(1-t)x_1 + tx_2, (1-t)x_2 + tx_1), (x_2 - x_1, x_1 - x_2) \rangle$

$= (x_2 - x_1)\left[\partial_1 f((1-t)x_1 + tx_2, (1-t)x_2 + tx_1) - \partial_2 f((1-t)x_1 + tx_2, tx_1 + (1-t)x_2)\right]$

Soit $t \in (0,1)$

19. b. $g(t) = f\begin{pmatrix} (1-t)x_1 + tx_2 \\ (1-t)x_2 + tx_1 \end{pmatrix}$

$= f\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1-t & t \\ t & 1-t \end{pmatrix}}_{\text{bistochastique}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right)$

$\leq f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$= f((1-0)x_1 + 0x_2, (1-0)x_2 + x_1)$

$= g(0)$

Donc $\forall t \in [0,1)$, $g(t) \leq g(0)$

Ainsi : $\forall t \in]0,1)$, $\dfrac{g(t) - g(0)}{t - 0} \leq 0$

Donc $\lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{g(t) - g(0)}{t - 0} \leq 0$

Or g est C^1 sur $\mathbb{R}$ donc $g'(0) \leq 0$ car $g'(0) = \lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{g(t) - g(0)}{t - 0}$

19. c. ~~Ainsi selon 19. a~~. Soit $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

$g'(0) \leq 0$ donc selon 19. a.

$(x_2 - x_1)(\partial_1 f(x_1, x_2) - \partial_2 f(x_1, x_2)) \leq 0$

D'où $\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ $\quad (x_1 - x_2)(\partial_1 f(x) - \partial_2 f(x)) \geq 0$

prepaindex.fr

20. Soit f une fonction 5-convexe de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^2$ de classe C^1

Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

~~Soit $g : t \mapsto f(t, \dots, t)$~~

21. Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{k=1}^{n} h(x_k)$

~~f est 5-convexe ssi $\forall x \in [a,b]^n$~~

($\Rightarrow$)

Supposons f 5-convexe

Soit $(i,j) \in \{1, \dots, n\}^2$

Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

On a $(x_i - x_j)(\partial_i f(x) - \partial_j f(x)) \geq 0$

ie $(x_i - x_j)(h'(x_i) - h'(x_j)) \geq 0$

En particulier pour $i = 1$ et $j = 2$ et $x = (b, a, \dots, a)$ avec $a < b$

$(b-a)(h'(b) - h'(a)) \geq 0$

prepaindex.fr

IMPRIMERIE NATIONALE – 2025-12-1003094

Copie anonyme - n°anonymat : 367901

Emplacement QR Code

Code épreuve : 282 | Nombre de pages : 27 | Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques Approfondies ESSEC IMEC

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

11. Or $b > a$ donc $b - a \geqslant 0$ donc $h'(b) - h'(a) \geqslant 0$

D'où $h'(b) \geqslant h'(a)$

Donc $a < b \Rightarrow h'(a) \leqslant h'(b)$

Donc h' croît donc h est convexe

Réciproquement :

Supposons h convexe.

~~Alors f est~~

* Remarquons que f est symétrique en suivant la méthode du 14. f_n. En changeant d'indice dans la somme avec la bijection on trouve le résultat voulu.

* Ensuite soit $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$
Soit $t \in [0,1]$

$f(tx + (1-t)y) = f(tx_1 + (1-t)y_1, \dots, tx_n + (1-t)y_n)$

$= \sum_{k=1}^{n} h(tx_k + (1-t)y_k)$

$\leqslant \sum_{k=1}^{n} t h(x_k) + (1-t) h(y_k)$ par convexité de h et par somme.

prepaindex.fr

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

21. $f(tx + (1-t)y) \leq t \sum_{k=1}^{n} h(x_k) + (1-t) \sum_{k=1}^{n} h(y_k)$

$= t f(x) + (1-t) f(y)$

Donc f est convexe

donc f est S- convexe selon 18.

D'où f est S - convexe $\Leftrightarrow$ h convexe

prepaindex.fr

Partie IV :

22. Soit $k \in \mathbb{N}^*$

Soit $F_k : S_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$
$A \mapsto Tr(A^k)$

- $\forall A \in S_n(\mathbb{R})$, $Tr(A^k) \in \mathbb{R}$
- $\forall A \in S_n(\mathbb{R})$, $\forall Q \in O_n$, $F_k({}^tQAQ) = Tr(({}^tQAQ)^k)$

Une récurrence montre facilement que

$$F_k({}^tQAQ) = Tr({}^tQA^kQ)$$
$$= Tr({}^tQQA^k) \quad \text{car } Tr(AB) = Tr(BA)$$
$$= Tr(I_n A^k)$$
$$= Tr(A^k)$$
$$= F_k(A)$$

Donc $\forall A \in S_n(\mathbb{R})$, $\forall Q \in O_n$, $F_k(A) = F_k({}^tQAQ)$

Donc F_k est spectrale

23. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$

Soit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

$$P_\sigma D(x) {}^tP_\sigma = P_\sigma \begin{pmatrix} x_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x_n \end{pmatrix} {}^tP_\sigma$$
$$= P_\sigma \begin{pmatrix} x_1 & & \\ & \ddots & \\ & & x_n \end{pmatrix} P_\sigma^{-1}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} x_k P_\sigma E_{kk} P_\sigma^{-1}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} x_k P_\sigma E_{k\sigma(k)}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} x_k E_{\sigma(k)\sigma(k)}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} x_{\sigma^{-1}(k)} E_{kk}$$

prepaindex.fr

~~$D(X_\sigma \cdot 1)$~~

$P_\sigma D(x) {}^t P_\sigma = D(X_\sigma \cdot 1)$
$= D(P_\sigma x)$

D'où $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ $P_\sigma D(X) {}^t P_\sigma = D(P_\sigma X)$

24. Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$
Le théorème spectrale nous assure qu'elle est diagonalisable dans une base orthonormée.

En réarrangeant la base orthonormée des vecteurs propres par valeur propre décroissante, on a bien

Q la matrice de passage de la base canonique à la base obtenue. Elle est orthogonale car matrice de passage d'une base orthonormée à une autre

D'où $\forall A \in S_n(\mathbb{R})$ $\exists Q \in O_n$, $A = Q \Lambda(A) {}^t Q$

$\Lambda(A)$ est la matrice diagonale dans la nouvelle base.

25. Supposons que F est spectrale.
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
$(x_1, \dots, x_n) \mapsto F(D(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}))$

25.a. Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$
Soit $Q \in O_n$ tel que $A = Q \Lambda(A) {}^t Q$ (24.)

$F(A) = F(\underbrace{Q}_{\in O_n} \underbrace{\Lambda(A)}_{\in S_n(\mathbb{R})} {}^t Q) = F(\Lambda(A))$

prepaindex.fr

IMPRIMERIE NATIONALE – 2025-12-1003094

Copie anonyme - n°anonymat : 367901

Emplacement QR Code

Code épreuve : 282 | **Nombre de pages :** 27 | **Session :** 2025

Épreuve de : Mathématiques Approfondies ESSEC/HEC

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

25.b. Soit $X \in \mathrm{dom}(\mathcal{L})$ et $P \in \Pi_n$

$$f(PX) = F(D(PX))$$

$$= F(PD(X)P^{-1}) \quad (23)$$

car $F \in \mathrm{Sp}(\mathcal{L})$

$$= F(D(X))$$

car F est spectrale.

$$= f(X)$$

D'où f symétrique

25.c. Supposons F convexe

Soit $(X, Y) \in \mathrm{dom}(\mathcal{L})$ et $t \in [0,1]$

$$f(tX + (1-t)Y) = F(D(tX + (1-t)Y))$$

$$= F(tD(X) + (1-t)D(Y))$$ assez facilement

$$\leq tF(D(X)) + (1-t)F(D(Y))$$ par convexité de F

$$= tf(X) + (1-t)f(Y)$$

Donc f est convexe si F est convexe

prepaindex.fr

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

26. F spectrale $\Rightarrow$: il existe f symétrique de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$
telle que $\forall A \in S_n(\mathbb{R})$ $F(A) = F(\Lambda(A))$
$= F(D(\hat{\lambda}(A)))$
$= f(\hat{\lambda}(A))$

Selon la question 25.

Réciproquement : Supposons qu'il existe $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ symétrique
telle que $\forall A \in S_n(\mathbb{R})$ $F(A) = f(\hat{\lambda}(A))$

Alors soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ et $Q \in O_n$

$F(QA^tQ) = f(\hat{\lambda}(QA^tQ))$

$= \dots$

27. Supposons F spectrale et f convexe

27.c. Soit $(A, B) \in S_n(\mathbb{R})^2$ et $t \in [0,1]$

$F(tA + (1-t)B) = F(\Lambda(tA + (1-t)B))$

$= F(D(\hat{\lambda}(tA + (1-t)B)))$

$= F(\cancel{D(t S_n \hat{\lambda}(A) + (1-t) S_n \hat{\lambda}(B))})$

$= f(\hat{\lambda}(tA + (1-t)B))$

$= \cancel{f \leq t}$

prepaindex.fr

$$f(tA+(1-t)B) = f(tS_1\hat{\Lambda}(A) + (1-t)S_2\hat{\Lambda}(B))$$

$$\leq t\, f(S_1\hat{\Lambda}(A)) + (1-t) f(S_2\hat{\Lambda}(B))$$

$$= t\, f(\mathrm{diag}(A)) + (1-t) f(\mathrm{diag}(B))$$

FIN

prepaindex.fr

prepaindex.fr

IMPRIMERIE NATIONALE – 2023-12-PF 018 751