Copie anonyme - n°anonymat : 367901

N5-00077 367901 Mat2 Appro

Code épreuve : 283 | Nombre de pages : 31 | Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques 2 Approfondies ESCP BS / HEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Préliminaires

Soit $]a,b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$ avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$

1. Soit $g \in \mathcal{F}_{]a,b[}$

On note g_1 la restriction de g à $]a,b[$

- g est strictement croissante sur $]a,b[$ donc g_1 également
- g est continue sur $\mathbb{R}$ donc g_1 est continue sur $]a,b[$

Ainsi selon le théorème de la bijection, g_1 est bijective

De plus $g(]a,b[) = g(]a,b[) \subset [0,1]$

Or $\lim_{1} g_1 = b$ et $\lim_{a} g_1 = a$

La stricte croissance de g_1 sur $]a,b[$ nous permet d'affirmer que g_1 réalise une bijection de $]a,b[$ dans $]0,1[$

2. Soit X une variable aléatoire de densité f une fonction continue et strictement positive sur $]a,b[$ et nulle en dehors de $]a,b[$

prepaindex.fr

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$F_X : x \mapsto \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

$\forall x \leq a,\ F_X(x) = 0$

$\forall x \in]a,b[,\ F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt$

$\forall x \geq b,\ F_X(x) = \int_a^b f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$

F_X est strictement croissante sur $]a,b[$ car primitive de f strictement positive sur $]a,b[$ selon le Théorème fondamental de l'analyse.

F_X est donc croissante sur $\mathbb{R}$ et strictement croissante sur $]a,b[$

f_X est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{a,b\}$

$\lim_{x \to a^-} F_X(x) = 0$ $\quad \lim_{x \to a^+} F_X(x) = \lim_{x \to a^+} \int_a^x f(t)\,dt = 0$ car f continue sur $]a,b[$

Donc F_X est continue en a, de même en b. $\lim_{x \to b} F_X(x) = 1$

Donc $F_X \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$

F_X est $\mathcal{C}^1$ sur $]a,b[$ en tant que primitive de f une fonction continue sur $]a,b[$

La croissance de F_X et $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$ nous assurent que F_X est à valeur dans $]0,1[$

Donc $F_X \in \mathcal{E}_{]a,b[}$

prepaindex.fr

Partie I :

Soit (X, Y) un couple aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

3. Soit $t \in \mathbb{R}$, on a $F_{(X,Y)}(t, y) = p([X \leq t] \cap [Y \leq y])$

$\leq p([X \leq t])$ car $[X \leq t] \cap [Y \leq y] \subset [X \leq t]$ puis par croissance de la probabilité.

$= F_X(t)$

Or $\lim_{t \to -\infty} F_X(t) = 0$

Donc par encadrement $\lim_{t \to -\infty} F_{(X,Y)}(t, y) = 0$

Soit $t \in \mathbb{R}$, on a $F_{(X,Y)}(x, t) = p([X \leq x] \cap [Y \leq t])$

$\leq p(Y \leq t]$ pour la même raison

$= F_Y(t)$

Or $\lim_{t \to -\infty} F_Y(t) = 0$ donc par encadrement $\lim_{t \to -\infty} F_{(X,Y)}(x, t) = 0$

4.a. ~~$F_X(x) = p($~~

Soit $\omega \in \Omega$

$Y(\omega) \in \mathbb{R}$ donc

Donc $\exists n \in \mathbb{N}^*$, $Y(\omega) \leq n$

Donc $\omega \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} [Y \leq n]$

~~Donc~~ Donc $\Omega \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} [Y \leq n]$

Réciproque $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} [Y \leq n] \subset \Omega$

Donc $\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} [Y \leq n]$

Ai

prepaindex.fr

Ainsi $F_X(x) = P(X \leq x)$

$= P([X \leq x] \cap \Omega)$

$= P([X \leq x] \cap (\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} [Y \leq n]))$

$F_X(x) = P(\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} [X \leq x] \cap [Y \leq n])$

4.b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$([X \leq x] \cap [Y \leq n]) \subset ([X \leq x] \cap [Y \leq n+1])$

Donc $([Y \leq x] \cap [Y \leq n])$ croît

Donc selon le théorème de la limite monotone

$F_X(x) = P(\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} [X \leq x] \cap [Y \leq n])$

$= \lim_{n \to +\infty} P([X \leq x] \cap [Y \leq n])$

$= \lim_{n \to +\infty} F_{(X,Y)}(x, n)$

Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$

~~$F_{(X,Y)}([X, \lfloor r \rfloor]) \leq$~~

$([X \leq x] \cap [Y \leq \lfloor r \rfloor]) \subset ([X \leq x] \cap [Y \leq r]) \subset [X \leq x] \cap [Y \leq \lfloor r \rfloor + 1]$

Donc par croissance

$F_{(X,Y)}(x, \lfloor r \rfloor) \leq F_{(X,Y)}(x, r) \leq F_{(X,Y)}(x, \lfloor r \rfloor + 1)$

or $\lim_{r \to +\infty} F_{(X,Y)}(x, \lfloor r \rfloor) = \lim_{n \to +\infty} F_{(X,Y)}(x, n) = F_X(x)$

$\lim_{r \to +\infty} F_{(X,Y)}(x, \lfloor r \rfloor + 1) = \lim_{n \to +\infty} F_{(X,Y)}(x, n+1) = \lim_{n \to +\infty} F_{(X,Y)}(x, n) = F_X(x)$

Donc par encadrement :

$F_X(x) = \lim_{r \to +\infty} F_{(X,Y)}(x, r)$

prepaindex.fr

IMPRIMERIE NATIONALE – 2023-12-PF 018751

Copie anonyme - n°anonymat : 367901

Emplacement QR Code

Code épreuve : 283 | Nombre de pages : 31 | Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques 2 Approfondies CSCP BS / HEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

5. On procède de la même manière on trouve que :

$$F_r(y) = P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [X\le n]\cap[Y\le y]\right)$$

Puis avec le théorème de la limite monotone que

$$F_r(y) = \lim_{n\to+\infty} P([X\le n]\cap[Y\le y])$$

$$= \lim_{n\to+\infty} F_{(X,Y)}(n,y)$$

Et enfin par encadrement que :

$$\lim_{t\to+\infty} F_{(X,Y)}(t,y) = F_Y(y)$$

6. $$\lim_{t\to+\infty}\left(\lim_{r\to+\infty} F_{(X,Y)}(t,r)\right) = \lim_{t\to+\infty}\left(F_X(t)\right)$$

$$= 1$$

$$= \lim_{r\to+\infty} F_Y(r)$$

$$= \lim_{r\to+\infty}\left(\lim_{t\to+\infty} F_{(X,Y)}(t,r)\right)$$

D'où $$\lim_{t\to+\infty}\left(\lim_{r\to+\infty} F_{(X,Y)}(t,r)\right) = 1 = \lim_{r\to+\infty}\left(\lim_{t\to+\infty} F_{(X,Y)}(t,r)\right)$$

prepaindex.fr

7. Soit $((a_1, a_2), (b_1, b_2)) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a_1 \leq b_1$ et $a_2 \leq b_2$

$[X \leq a_1] \cap [Y \leq b_2] \subset [X \leq b_1] \cap [Y \leq b_2]$

Donc $P([X \leq a_1] \cap [Y \leq b_2]) \leq P([X \leq b_1] \cap [Y \leq b_2])$

Donc $F_{(X,Y)}(a_1, b_2) \leq F_{(X,Y)}(b_1, b_2)$

De même $F_{(X,Y)}(b_1, a_2) \leq F_{(X,Y)}(b_1, b_2)$

$F_{(X,Y)}(b_1, b_2) - F_{(X,Y)}(a_1, b_2) = P([X \leq b_1] \cap [Y \leq b_2]) - P([X \leq a_1] \cap [Y \leq b_2])$

$= P([a_1 \leq X \leq b_1] \cap [Y \leq b_2])$

$F_{(X,Y)}(b_1, a_2) - F_{(X,Y)}(a_1, a_2) = P([X \leq b_1] \cap [Y \leq a_2]) - P([X \leq a_1] \cap [Y \leq a_2])$

$= P([a_1 \leq X \leq b_1] \cap [Y \leq a_2])$

D'où

et $[a_1 \leq X \leq b_1] \cap [Y \leq a_2] \subset [a_1 \leq X \leq b_1] \cap [Y \leq b_2]$

D'où $F_{(X,Y)}(b_1, a_2) - F_{(X,Y)}(a_1, a_2) \leq F_{(X,Y)}(b_1, b_2) - F_{(X,Y)}(a_1, b_2)$

D'où $F_{(X,Y)}(b_1, b_2) - F_{(X,Y)}(a_1, b_2) - F_{(X,Y)}(b_1, a_2) + F_{(X,Y)}(a_1, a_2) \geq 0$

D'où $F_{(X,Y)}$ est 2-croissante

prepaindex.fr

8.a. Soit $r > s$

~~$F_{(x,r)}(x,r) + F_{(x,r)}(x,y) \leq F(x,s) + F(x,y)$~~

$(x \leq x) \cap [r \leq s] \subset (x \leq x) \cap (r \leq r)$

Donc $F_{(x,r)}(x,s) \leq F_{(x,r)}(x,r)$

Donc $r \mapsto F_{(x,r)}(x,r)$ croit sur $\mathbb{R}$

Donc $F_{(x,r)}(x,y) \leq \lim_{r \to +\infty} F_{(x,r)}(x,r)$

Donc $F_{(x,r)}(x,y) \leq F_x(x)$

De même $F_{(x,r)}(x,y) \leq F_r(y)$

D'où $F_{(x,r)}(x,y) \leq \min(F_x(x), F_r(y))$

8.b. $F_{(x,y)}(x,y) \geq 0$

et soit $t \geq x$ et $r \geq y$

$F_{(x,r)}(t,r) - F_{(x,r)}(x,r) - F_{(x,r)}(t,y) + F_{(x,r)}(x,y) \geq 0$

Donc en faisant tendre t vers $+\infty$:

$F_Y(r) - F_{(x,r)}(x,r) - F_Y(y) + F_{(x,r)}(x,y) \geq 0$

En faisant tendre r vers $+\infty$

$1 - F_X(x) - F_Y(y) + F_{(x,r)}(x,y) \geq 0$

D'où $F_{(x,r)}(x,y) \geq F_X(x) + F_Y(y) - 1$

prepaindex.fr

D'où $F_{(X,Y)}(x,y) \geq \max(F_X(x) + F_Y(y) - 1, 0)$

9. Soit $x \in \mathbb{R}$
$\lim_{y \to +\infty} F_2(y) = 1 \geq F_1(x)$

Donc $\exists y_0 \in \mathbb{R}$, $\forall y \geq y_0$, $F_2(y) \geq F_1(x)$

Soit $y \geq y_0$

$F_{(X,Y)}(x,y) = F_1(x)$

D'où $\lim_{y \to +\infty} F_{(X,Y)}(x,y) = F_1(x)$

$F_X(x) = F_1(x)$

D'où $F_X = F_1$

De même Soit $y \in \mathbb{R}$
$\exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \geq x_0$, $F_1(x) \geq F_Y(y)$ car $\lim_{+\infty} F_1 = 1 \geq F_Y(y)$

Soit $x \geq x_0$

$F_{(X,Y)}(x,y) = F_2(y)$

$\lim_{x \to +\infty} F_{(X,Y)}(x,y) = F_2(y)$

$F_Y(y) = F_2(y)$

$F_Y = F_2$

10. Soit $U = F_1(X)$ et $V = F_2(Y)$

P ~~$X \in [a_1, b_1]$ presque surement~~
~~$Y \in [a_2, b_2]$ pas sur de ça~~

~~$\forall x$ fixé, F_U est = P~~

prepaindex.fr

IMPRIMERIE NATIONALE – 2023-12-PF 018 751

Copie anonyme - n°anonymat : 367901

Emplacement QR Code

Code épreuve : 283 | Nombre de pages : 31 | Session : 2016

Épreuve de : Mathématiques 2 Approfondies ESCP BS IHEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

U et V appartiennent à $]0,1[$ presque sûrement

$\forall x \leq 0, \quad F_U(x) = P(F_1(X) \leq x) = 0$

$\forall x \in]0,1[\quad F_U(x) = P(F_1(X) \leq x)$

$= P(X \leq F_1^{-1}(x))$ car $x \in]0,1[$ et F_1 croissante et bijective de $]a_1, b_1[$ dans $]0,1[$

$= F_X \circ F_1^{-1}(x)$

$= F_1 \circ F_1^{-1}(x)$

$= x$

$\forall x \geq 1, \quad F_U(x) = 1$

Donc $U \hookrightarrow \mathcal{U}(]0,1[)$

$\forall x \leq 0, \quad F_V(x) = 0$

$\forall x \in]0,1[, \quad F_V(x) = P(F_2(Y) \leq x)$

$= P(Y \leq F_2^{-1}(x))$ car $x \in]0,1[$ et F_2 croissante et bijective de $]a_2, b_2[$ dans $]0,1[$

$= F_Y(F_2^{-1}(x))$

$= F_2(F_2^{-1}(x))$

$= x$

$\forall x \geq 1, \quad F_V(x) = 1$

D'où $V \hookrightarrow \mathcal{U}(]0,1[)$

prepaindex.fr

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

10. a. ~~$F_{(U,V)}$~~ :

Soit $x \leq 0$ et $y \in \mathbb{R}$ $F_{(U,V)}(x,y) = 0$

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $y \leq 0$ $F_{(U,V)}(x,y) = 0$

Soit $x \in]0,1[$ et $y \in]0,1[$, $F_{(U,V)}(x,y) = p([U \leq x] \cap [V \leq y])$

$= p([F_1(X) \leq x] \cap [F_2(Y) \leq y])$

$= p([X \leq F_1^{-1}(x)] \cap [Y \leq F_2^{-1}(y)])$

$= \min(F_1(F_1^{-1}(x)), F_2(F_2^{-1}(y))$

$= \min(x,y)$

Soit $x \geq 1$ et $y \in \mathbb{R}$, $F_{(U,V)}(x,y) = p([X \leq x] \cap [Y \leq y])$

$= p(Y \leq y)$

$= F_Y(y)$

Soit $x \in \mathbb{R}$, y

Soit $x \geq 1$ et $y \in]0,1[$ $F_{(U,V)}(x,y) = p([U \leq x] \cap [V \leq y])$

$= p([F_1(X) \leq x] \cap [F_2(Y) \leq y])$

$= p(F_2(Y) \leq y)$

$= y$

Soit $x \geq 1$ et $y \geq 1$ $F_{(U,V)}(x,y) = 1$

Soit $x \in]0,1[$, $y \geq 1$ $F_{(U,V)}(x,y) = x$

Donc $F_{(U,V)}(x,y) = \begin{cases} \min(x,y,0) & \text{si } x \in]0,1[\text{ ou } y \in]0,1[\\ 0 & \text{si } x \leq 0 \text{ ou } y \leq 0 \end{cases}$

prepaindex.fr

$f_{(u,v)}(x,y) = \max(0, \min(x,y,1)) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

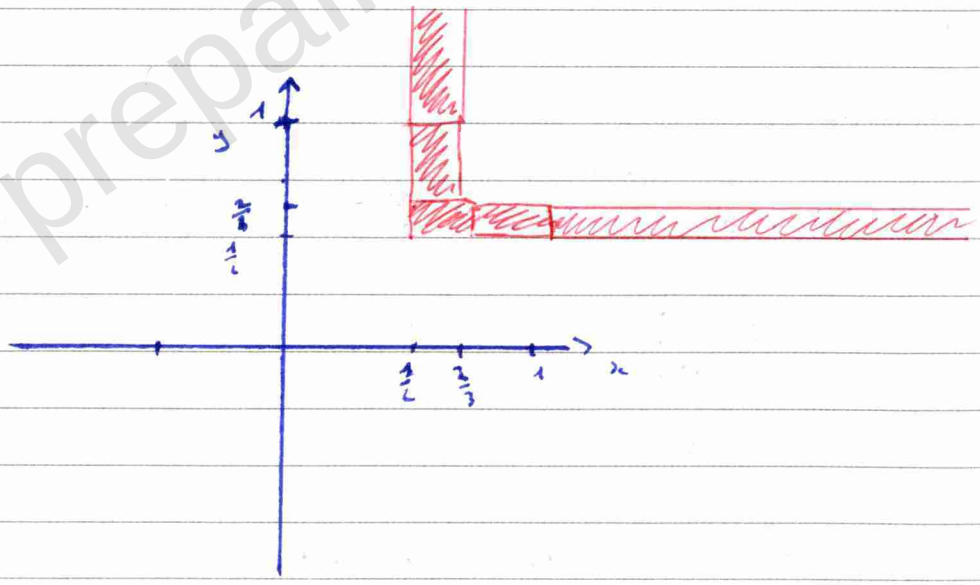
$\frac{1}{2} \leq f_{(u,v)}(x,y) \leq \frac{2}{3} \iff \frac{1}{2} \leq \max(0, \min(x,y,1)) \leq \frac{2}{3}$

$\iff \frac{1}{2} \leq \min(x,y,1) \leq \frac{2}{3}$

$\iff \frac{1}{2} \leq \min(x,y) \leq \frac{2}{3}$

$\iff$

$\frac{1}{2} \leq f_{(u,v)}(x,y) \leq \frac{2}{3} \iff \begin{cases} \frac{1}{2} \leq \min(x,y) \leq \frac{2}{3} \text{ et } (x,y) \in]0,1[^2 \\ \text{ou} \quad \frac{1}{2} \leq y \leq \frac{2}{3} \text{ et } x \geq 1 \\ \text{ou} \quad \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{2}{3} \text{ et } y \geq 1 \end{cases}$



prepaindex.fr

l.o.d. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geq 1$

$$P(U-V > \tfrac{1}{n}) = P\left(\bigcup_{k=0}^{n-1} \left[\tfrac{k}{n} < U \leq \tfrac{k+1}{n}\right] \cap [U-V > \tfrac{1}{n}]\right) \quad \text{car } U\left]\tfrac{k}{n}, \tfrac{k+1}{n}\right] \subset \left]0,1\right]$$

$$= P\left(\bigcup_{k=0}^{n-1} \left(\left[\tfrac{k}{n} < U \leq \tfrac{k+1}{n}\right] \cap [V < U - \tfrac{1}{n}]\right)\right)$$

$$\leq P\left(\bigcup_{k=0}^{n-1} \left(\left[\tfrac{k}{n} < U \leq \tfrac{k+1}{n}\right] \cap [V \leq \tfrac{k+1}{n} - \tfrac{1}{n}]\right)\right) \quad \text{(par inclusion)}$$

$$= P\left(\bigcup_{k=0}^{n-1} \left[\tfrac{k}{n} < U \leq \tfrac{k+1}{n}\right]\right)$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n-1} P\left(\left[\tfrac{k}{n} < U \leq \tfrac{k+1}{n}\right] \cap [V < U - \tfrac{1}{n}]\right) \quad \text{sous-Boole}$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n-1} P\left(\left[\tfrac{k}{n} < U \leq \tfrac{k+1}{n}\right] \cap [V \leq \tfrac{k+1}{n} - \tfrac{1}{n}]\right) \quad \text{par inclusion et croissance}$$

$$P(U-V > \tfrac{1}{n}) = \sum_{k=0}^{n-1} P\left(\left[\tfrac{k}{n} < U \leq \tfrac{k+1}{n}\right] \cap [V \leq \tfrac{k}{n}]\right)$$

---

l.o.e.

Soit $n \geq 2$

$$P(U-V > \tfrac{1}{n}) \leq \sum_{k=1}^{n-1} P\left([U \leq \tfrac{k+1}{n}] \cap [V \leq \tfrac{k}{n}]\right) - P\left([U \leq \tfrac{k}{n}] \cap [V \leq \tfrac{k}{n}]\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \tfrac{k}{n} - \tfrac{k}{n}$$

$$= 0$$

Donc $\forall n \geq 2 \quad P(V-U \geq \tfrac{1}{n}) = 1$

Or $P(V-U > 0) = P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} [V-U \geq \tfrac{1}{n}]\right)$

$$= \lim_{n \to +\infty} P(V-U \geq \tfrac{1}{n}) \quad \text{car } n \in \mathbb{N}^*, \left[V-U \geq \tfrac{1}{n}\right] \subset \left[V-U \geq \tfrac{1}{n+1}\right]$$

$$= \lim_{n \to +\infty} 1$$

$$= 1$$

prepaindex.fr

IMPRIMERIE NATIONALE – 2023-12-PF 018 751

Copie anonyme - n°anonymat : 367901

Emplacement QR Code

Code épreuve : 283 | **Nombre de pages :** 31 | **Session :** 2026

Épreuve de : Mathématiques 2 Approfondies ESCP DS / MCC

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

10. f. On suppose $Y(\Omega) \subset]a_2, b_2[$

(*)

$$P(X = F_1^{-1}(F_2(Y))) = P(F_1(X) = F_2(Y))$$
$$= P(U = Y)$$
$$= 1$$

Donc $X = F_1^{-1}(F_2(Y))$ p.s.

(*) possible car $\forall \omega \in \Omega$, $Y(\omega) \in]a_2, b_2[$

Donc $F_2(Y(\omega)) \in]0,1[$

Donc $F_1^{-1}(F_2(Y(\omega)))$ existe et appartient à $]a_1, b_1[$

11. Supposons $X(\Omega) \subset]a_1, b_1[$ et $Y(\Omega) \subset]a_2, b_2[$

avec $g = F_1^{-1} \circ F_2$

on a $X = g(Y)$ ps

et soit $a < b$

$F_2(a) \leq F_2(b)$ car F_2 croissante sur $\mathbb{R}$

$F_1^{-1}(F_2(a)) \leq F_1^{-1}(F_2(b))$ car F_1 croît sur $\mathbb{R}$ donc F_1^{-1} aussi.

avec $h = F_2^{-1} \circ F_1$

h est croissante

et $P(Y = F_2^{-1} \circ F_1(x)) = P(F_2(Y) = F_1(x)) = P(U = x) = 1$

prepaindex.fr

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

12. ~~$X = F_X$~~

$F_1 \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ et $F_2 \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}_+}$

$U = F_1(X)$ donc $X = F_1^{-1}(U)$

$= \phi^{-1}(U)$ avec $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$

$V = F_2(Y)$ donc $Y = F_2^{-1}(V)$ avec $V \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$

~~Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ $F_2(x) = y$~~

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}_+^2$ $F_2(x) = y \iff 1 - e^{-x} = y$

$\iff 1 - y = e^{-x}$

$\iff \ln(1-y) = -x$

$\iff x = -\ln(1-y)$

D'où

~~Soit~~

```
def Nuage1(n):
    plt.plot( sp.matrix(rd.random([1,100])), -np.log(1-rd.random([1,100])),
    linestyle="", marker='x')
    plt.show()
```

PS : il y a 3 lignes sur le programme. J'ai dû aller à la ligne sur la copie.

13. F_X :

Soit $x \in \mathbb{R}$

$F_X(x) = \lim_{y \to +\infty} F_{(X,Y)}(x,y)$

$= \lim_{y \to +\infty} \max(F_1(x) + F_2(y) - 1, 0)$

$= \max(F_1(x) + 1 - 1, 0)$

$= F_1(x)$

$F_X = F_1$

En réalité, il faut faire comme pour le premier exemple mais l'on comprend que c'est pareil.

Soit $y \in \mathbb{R}$

$F_Y(y) = \lim_{x \to +\infty} F_{(X,Y)}(x,y)$

$= \lim_{x \to +\infty} \max(F_1(x) + F_2(y) - 1, 0)$

$= F_2(y)$

$F_Y = F_2$

14.a $U = F_1(X)$

~~Soit $x \leq 0$, $F_U(x) = P(U \leq x)$~~ :

$\forall x \leq 0$, $F_U(x) = P(U \leq x) = P(F_1(X) \leq x) = 0$

$\forall x \in]0,1[$, $F_U(x) = P(U \leq x) = P(F_1(X) \leq x)$

$= P(X \leq F_1^{-1}(x))$

$= F_X(F^{-1}(x))$

$= F_1(F^{-1}(x))$

$= x$

$\forall x \geq 1$, $F_U(x) = 1$

$U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$

prepaindex.fr

de même $V \hookrightarrow \mathcal{U}(]0,1[)$

Donc $1-V \hookrightarrow \mathcal{U}(]0,1[)$

$F_{U,1-U}(x)$ est la même expression que dans l'exemple précédent

14. c. Supposons $Y(\Omega) \subset]a_2, b[$

$$\begin{aligned} P(X = F_1^{-1}(1-F_2(Y))) &= P(F_1(x) = 1-F_2(Y)) \\ &= P(U = 1-V) \\ &= 1 \end{aligned}$$

D'où $X = F_1^{-1}(1-F_2(Y))$ p.s

15. on pose $g = F_1^{-1} \circ (1-F_2)$

Si $a < b$, $F_2(a) \leq F_2(b)$

$1-F_2(a) \geqslant 1-F_2(b)$

$F_1^{-1}(1-F_2(a)) \geqslant F_1^{-1}(1-F_2(b))$

Donc g décroît et $X = g(Y)$

On pose $h = F_2^{-1} \circ (1-F_1)$

h décroît aussi et

$$\begin{aligned} P(Y = h(X)) &= P(Y = F_2^{-1}(1-F_1(X))) \\ &= P(F_2(Y) = 1-F_1(X)) \\ &= P(V = 1-U) \\ &= 1 \end{aligned}$$

prepaindex.fr

IMPRIMERIE NATIONALE – 2023-12-PF 018 751

Copie anonyme - n°anonymat : 367901

Emplacement QR Code

Code épreuve : 283 | **Nombre de pages :** 31 | **Session :** 2026

Épreuve de : Mathématiques 2 Approfondies ESCP BS ITMC

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

16. Soit $(y, x) \in \mathbb{R}^2$ et $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(1,4)$ avec $y \in]0,1[$

$y = F_2(x)$

$\Leftrightarrow y = P(2 \leq x)$

$\Leftrightarrow y = P\left(\frac{Z-1}{2} \leq \frac{x-1}{2}\right)$

$\Leftrightarrow y = \Phi\left(\frac{x-1}{2}\right)$

$\Leftrightarrow \Phi^{-1}(y) = \frac{x-1}{2}$

$\Leftrightarrow x = 2\Phi^{-1}(y) + 1$

Doc

```
def Nuage 2 ():
    plt.plot(sp.ndtri(rd.random([1,100])), 2+sp.ndtri(rd.random([1,100]))+1,
    linestyle='', marker='x')
    plt.show()
```

17. a. Nuage 2

car le nuage semble représenter une fonction qui à x associe un y et cette fonction est décroissante comme l'exemple 2 de h

b. Nuage 1 la fonction représentée croît comme h de l'exemple 1

prepaindex.fr

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

II| Partie A

18. Soit $f_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \max(x,y) \end{cases}$ et $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

18.a. Soit $a \leq b$.

$$f_1(a, y_0) = \max(a, y_0) \leq \max(b, y_0) = f_1(b, y_0)$$

Donc $t \mapsto f_1(t, y_0)$ croît sur $\mathbb{R}$

Soit $a \leq b$. $f_1(x_0, a) = \max(x_0, a) \leq \max(x_0, b) = f_1(x_0, b)$

Donc $t \mapsto f_1(x_0, t)$ croît sur $\mathbb{R}$

18.b. $0 \leq 1$ on note $\begin{cases} a_1 = 0 \\ b_1 = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} a_2 = 0 \\ b_2 = 1 \end{cases}$ $a_1 \leq b_1$ et $a_2 \leq b_2$

$$f_1(a_1, b_2) + f_1(b_1, a_2) = \max(0,1) + \max(1,0)$$
$$= 1 + 1$$
$$= 2$$
$$> 1$$
$$= \max(1,1) + \max(0,0)$$
$$= f_1(b_1, b_2) + f_1(a_1, a_2)$$

Donc f_1 n'est pas 2-croissante

prepaindex.fr

19. Soit $f_2 : \overline{\mathbb{R}}^2 \to \mathbb{R}$
$(x,y) \mapsto xy$

19.a. Soit $((a_1,a_2),(b_1,b_2)) \in (\overline{\mathbb{R}}^2)^2$ tel que $a_1 \leq b_1$ et $a_2 \leq b_2$

$f_2(b_1,b_2) - f_2(a_1,b_2) - f_2(b_1,a_2) + f_2(a_1,a_2) = b_1b_2 - a_1b_2 - b_1a_2 + a_1a_2$
$= b_2(b_1 - a_1) - a_2(b_1 - a_1)$
$= \underbrace{(b_2 - a_2)}_{\geq 0}\underbrace{(b_1 - a_1)}_{\geq 0}$
≥ 0

Donc f_2 est 2-croissante

19.b. Si on prend $y = -1$
$\forall t \in \overline{\mathbb{R}}$
$f_2(t,-1) = -t$

~~Donc f_2 décroît sur $\overline{\mathbb{R}}$~~

Donc $t \mapsto f_2(t,-1)$ décroît sur $\overline{\mathbb{R}}$

20. ~~Oui~~
Il n'y a pas équivalence entre la croissance d'une fonction f de $\overline{\mathbb{R}}^2$ et la croissance d'une fonction $t \mapsto f(x,t)$ ou $t \mapsto f(t,y)$ pour tout $x \in \overline{\mathbb{R}}$

prepaindex.fr

Soit F une fonction de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ 2-croissante sur $I \times J$ deux intervalles ouverts

21. a. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

soit $t > 0$, soit $h > 0$

$$\Delta_{(t,h)} F = \frac{F(x+h, y+t) - F(x+h, y) - F(x, y+t) + F(x,y)}{ht}$$

$$= \frac{\varphi(y+t) - \varphi(y)}{t}$$

avec $\varphi : y \mapsto \dfrac{F(x+h, y) - F(x, y)}{h}$

φ est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ car F est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$

$$\lim_{t \to 0} \frac{\varphi(y+t) - \varphi(y)}{t} = \varphi'(y)$$

$$= \frac{\partial_2 F(x+h, y) - \partial_2 F(x,y)}{h}$$

$$= \frac{\partial_2 F(x+h, y+t) - \partial_2 F(x,y)}{h}$$

$$= \frac{\psi(x+h) - \psi(x)}{h}$$

avec $\psi : x \mapsto \partial_2 F(x,y)$

or ψ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ car F est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ donc $\partial_2 F$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

D'où $\lim_{h \to 0} \dfrac{\psi(x+h) - \psi(x)}{h} = \psi'(x)$

$$= \partial_{2,1}^2 F(x,y)$$

$$= \partial_{2,2}^2 F(x,y)$$

(Théorème de Schwartz car $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$)

prepaindex.fr

IMPRIMERIE NATIONALE – 2023-12-PF 018 751

Copie anonyme - n°anonymat : 367901

Emplacement QR Code

Code épreuve : 283 | **Nombre de pages :** 31 | **Session :** 2016

Épreuve de : Mathématiques 2 Approfondie ESCP/EM LYON/HEC

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Donc $\partial^2_{1,2} F(x,y) = \lim_{h\to 0}\left(\lim_{t\to 0} \frac{F(x+h,y+t) - F(x+h,y) - F(x,y+t) + F(x,y)}{ht}\right)$

21.b. Soit $h>0$ et $t>0$ tel que $x+h \geqslant x$ et $y+t \geqslant y$

On F est 2-croissante

Soit $(x,y) \in I\times J$.

I et J sont des ouverts.

Donc soit $h>0$ et $t>0$ tels que $x+h \in I$ et $y+t \in J$

$x+h \geqslant x$ et $y+t \geqslant y$

On F est 2 croissante sur $I\times J$ donc

$F(x+h,y+t) - F(x+h,y) - F(x,y+t) + F(x,y) \geqslant 0$

Donc en divisant par ht aussi.

En faisant tendre h et t vers 0 également

D'où $\partial^2_{1,2} F(x,y) \geqslant 0 \quad \forall (x,y) \in I\times J$

prepaindex.fr

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

22. a. Soit I et J deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ et F une fonction de $C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$

Soit $((a_1, a_2), (b_1, b_2)) \in (I \times J)^2$ tel que $a_1 \leq b_1$ et $a_2 \leq b_2$

$A = F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2) - F(b_1, a_2) + F(a_1, a_2)$

$= [F(b_1, y) - F(a_1, y)]_{a_2}^{b_2}$

$= \int_{a_2}^{b_2} \partial_2 F(b_1, y) - \partial_2 F(a_1, y)\, dy$

$= \int_{a_2}^{b_2} [\partial_2 F(x, y)]_{a_1}^{b_1} dy$

$= \int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} \partial_{2,1}^2 F(x, y)\, dx \right) dy$

$= \int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} \{ \partial_{1,2}^2 F(x, y)\, dx \right) dy$ car $F \in C^2(\mathbb{R}^2)$ (Schwartz)

D'où

$F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2) - F(b_1, a_2) + F(a_1, a_2) = \int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} \partial_{1,2}^2 F(x, y)\, dx \right) dy$

22 b. Soit $((a_1, a_2), (b_1, b_2)) \in (I \times J)^2$ tel que $a_1 \leq b_1$ et $a_2 \leq b_2$

$\forall (x, y) \in I \times J,\ \partial_{x^2}^2 F(x, y) \geq 0$

Alors $\forall y \in J,\ \int_{a_1}^{b_1} \partial_{1^2}^2 F(x, y)\, dx \geq 0$ car positivité de l'intégrale

car $\partial_{1^2}^2 F$ est continue sur $[a_1, b_1]$, par positivité et car $\partial_{x^2}^2 F$

Alors $\int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} \partial_{1^2}^2 F(x, y)\, dx \right) dy \geq 0$

prepaindex.fr

Donc $\forall ([a_1,b_1],[a_2,b_2]) \in (I \times J)^2$

$F(b_1,b_2) - F(a_1,b_2) - F(b_1,a_2) + F(a_1,a_2) \geq 0$

Donc F est 2-croissante

La réciproque a été faite à la question 21.

Donc F est 2-croissante sur $I \times J$ ssi $\forall (x,y) \in I \times J$, $\partial_{12} F(x,y) \geq 0$

23. Soit F une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ 2-croissante telle que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\lim_{t \to -\infty} F(t,y) = \lim_{t \to -\infty} F(x,t) = 0$

Soit $f_x : t \mapsto F(t,y)$

f_x est

prepaindex.fr

Partie B :

24. Soit C une copule et (U,V) un couple associé à C.

$(U,V) \in [0,1]^2$ p.s.

$\forall x < 0, \quad F_U(x) = 0$

$\forall x \in [0,1], \quad F_U(x) = P(U \leq x)$

$= P([U \leq x] \cap [V \leq 1])$

$= F_{(U,V)}(x, 1)$

$= C(x, 1)$

$= x$

$\forall x > 1 \quad F_U(x) = 1$

Donc $U \hookrightarrow U([0,1])$

Il en va de même pour $V \hookrightarrow U([0,1])$

25. Soit C^* : $[0,1]^2 \to \mathbb{R}$

$(u,v) \longmapsto u + v - 1 + C(1-u, 1-v)$

* C^* est une fonction à valeur réelle définie sur $[0,1]^2$ car $\forall (u,v) \in [0,1]^2$; $(1-u, 1-v) \in [0,1]^2$ et $C(1-u, 1-v)$ est défini.

* $\forall x \in [0,1]$, $C^*(0,x) = 0 + x - 1 + C(1, 1-x)$

$= x - 1 + 1 - x$

$= 0$

$C^*(x,0) = x + 0 - 1 + C(1-x, 1)$

$= x - 1 + 1 - x$

$= 0$

$C^*(1,x) = 1 + x - 1 + C(0, 1-x)$

$= 1 + x - 1 + 0$

$= x$

$C^*(x,1) = x + 1 - 1 + C(1-x, 0)$

$= x$

prepaindex.fr

IMPRIMERIE NATIONALE – 2023-12-PF 018 751

Copie anonyme - n°anonymat : 367901

Emplacement QR Code

Code épreuve : 283 | Nombre de pages : 31 | Session : 2016

Épreuve de : Mathématiques 2 Approfondies

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Soit $((a_1,a_2),(b_1,b_2)) \in [0,1]^2$ tel que $a_1 \leq b_1$ et $a_2 \leq b_2$

$A = C^*(b_1,b_2) - C^*(a_1,b_2) - C^*(b_1,a_2) + C^*(a_1,a_2)$

$= b_1 + b_2 - 1 + C(1-b_1, 1-b_2) - b_1 - b_2 + 1 - C(1-a_1, 1-b_2) - b_1 - a_2 + 1 - C(1-b_1, 1-a_2)$
$+ a_1 + a_2 - 1 + C(1-a_1, 1-a_2)$

$= C(1-b_1, 1-b_2) - C(1-a_1, 1-b_2) - C(1-b_1, 1-a_2) + C(1-a_1, 1-a_2)$

$= C(1-a_1, 1-a_2) - C(1-b_1, 1-a_2) - C(1-a_1, 1-b_2) + C(1-b_1, 1-b_2)$

≥ 0

car $1-a_1 \geq 1-b_1$
$1-a_2 \geq 1-b_2$
et C 2-croissante

Donc C^* est 2-croissante

Donc C^* est une copule

26. Soit C une copule

26.a. Soit $v \in [0,1]$ et $u_1, u_2 \in [0,1]$, tel que $u_1 \leq u_2$

$0 \leq v \leq 1$ et $u_1 \leq u_2$ donc comme C est 2-croissante

$C(u_2, v) - C(u_2, 0) - C(u_1, v) + C(u_1, 0) \geq 0$

ie $C(u_2, v) - 0 - C(u_1, v) + 0 \geq 0$

ie $C(u_2, v) - C(u_1, v) \geq 0$

prepaindex.fr

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$v \leq 1$ et $u_1 \leq u_2$ donc selon la 2 - croissance de C :

$C(u_2, 1) - C(u_1, 1) - C(u_2, v) + C(u_1, v) \geq 0$

ie $u_2 - u_1 - C(u_2, v) + C(u_1, v) \geq 0$

D'où $u_2 - u_1 \geq C(u_2, v) - C(u_1, v) \geq 0$

On procède de même pour l'implication suivante qui se trouve de la même manière

26.b. Soit $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in [0,1]^2$

$|C(u_2, v_2) - C(u_1, v_1)| \leq |u_2 - u_1|$ selon la 1e implication

$|C(u_2, v_2) - C(u_1, v_1)| \leq |v_2 - v_1|$ selon la 2e implication

Donc :

$|C(u_2, v_2) - C(u_1, v_1)| \leq \min(|u_2 - u_1|, |v_2 - v_1|)$

$|C(u_2, v_2) - C(u_1, v_1)| \leq |u_2 - u_1| + |v_2 - v_1|$

26.c. Soit $(x_0, y_0) \in [0,1]^2$

$\forall (x, y) \in [0,1]^2, \ |C(x, y) - C(x_0, y_0)| \leq |x - x_0| + |y - y_0|$

$\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} |x - x_0| + |y - y_0| = 0$

Donc par encadrement $\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} |C(x, y) - C(x_0, y_0)| = 0$

Donc C est continue en (x_0, y_0) donc sur $[0,1]^2$

prepaindex.fr

III | Partie A

27. a. Soit $(x,y) \in [0,1]^2$

$C(x,y) = F_{(X,Y)}(F_X^{-1}(x), F_Y^{-1}(y))$

$= P((X \leq F_X^{-1}(x)) \cap (Y \leq F_Y^{-1}(y)))$

$C(x,y) = P((F_X(X) \leq x) \cap (F_Y(Y) \leq y))$

~~2 Ex. b.~~

Si $x = 1$: Soit $y \in [0,1]$

$P((F_X(X) \leq 1) \cap (F_Y(Y) \leq y)) = P(F_Y(Y) \leq y)$

$= P(Y \leq F_Y^{-1}(y))$

$= F_Y(F_Y^{-1}(y))$

$= y$

$= C(1,y)$

~~Si $y = 1$: Soit $x \in [0,1]$~~

$P((F_X(X) \leq 1) \cap (F_Y(Y) \leq 1)) = 1 = C(1,1)$

~~$P((F_X(X) \leq 1) \cap (F_Y(Y) \leq 0)) = 0 = C(1,0)$~~

Si $y = 1$: Para.

Si x ou $y = 0$ $P((F_X(X) \leq 0) \cap (F_Y(Y) \leq 0)) = 0 = C(x,y)$

Donc valable pour tous $(x,y) \in [0,1]^2$

prepaindex.fr

27. b. Soit $((a_1,a_2),(b_1,b_2)) \in ([0,1]^2)^2$ tel que $a_1 \leq b_1$ et $a_2 \leq b_2$

$A = C(b_1,b_2) - C(a_1,b_2) - C(a_2,b_1) + C(a_1,a_2)$

$= p(F_X(x) \leq \ldots$

Là on a déjà fait cette méthode avant, c'est pareil !
Comme à la question 7 mais sur $[0,1]^2$

27. c. C est 2-croissante, définie sur $[0,1]^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$

$\forall x \in [0,1]$, $C(0,x) = C(x,0) = 0$

$C(1,x) = C(x,1) = x$

Donc C est une copule

28. Ainsi $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$C(F_X(x), F_Y(y)) = p([F_X(x) \leq F_X(x)] \cap [F_Y(Y) \leq F_Y(y)])$

$= p([X \leq x] \cap [Y \leq y])$ car F_X et F_Y croît sur $\mathbb{R}$

$= F_{(X,Y)}(x,y)$

D'où l'existence

Supposons qu'il existe 2 copules C_1 et C_2 vérifiant cette propriété
Soit $(x,y) \in [0,1]^2$

$C_1(x,y) = C_1(F_X(F_X^{-1}(x)), F_Y(F_Y^{-1}(y)))$

$= F_{(X,Y)}(F_X^{-1}(x), F_Y^{-1}(y))$

$= C_2(F_X(F_X^{-1}(x)), F_Y(F_Y^{-1}(y)))$

$= C_2(x,y)$

D'où $C_1 = C_2$

D'où l'unicité

prepaindex.fr

IMPRIMERIE NATIONALE – 2023-12-PF 018 751

Copie anonyme - n°anonymat : 367901

Emplacement QR Code

Code épreuve : 283 | Nombre de pages : 31 | Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques et Approfondies.

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

29. Soit C un copule, F_1, F_2 deux fonctions de répartition de variable aléatoire réelle à densité
Soit F la fonction de répartition du couple (X_1, X_2).

Avec le copu

Partie C ..

Soit $\Theta \geq 0$

32. a. Soit $\Theta \geq 0$

g

32. a. Soit $(u_1, v_1) \in]0,1[^2$

g est dérivable sur $[0,1]$

$\forall \Theta \in [0,1]$, $g'(\Theta) = 2\Theta \ln(u_1)\ln(v_1) - 1 - \ln(u_1) - \ln(v_1)$

$g'(\Theta) \geq 0 \iff \Theta \geq \dfrac{1 + \ln(u_1) + \ln(v_1)}{2\ln(u_1)\ln(v_1)}$ (≥ 0)

$\iff \Theta \geq \Theta_*$

Θ	0		Θ_*	
g		$\searrow$		$\nearrow$

prepaindex.fr

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

32.b.

$$g(\theta^-) = \frac{(1+\ln(u)+\ln(v))^2}{4\ln(u)\ln(v)} - \frac{(1+\ln(u)+\ln(v))^2}{2\ln(u)\ln(v)} + 1$$

$$= -\frac{(1+\ln(u)+\ln(v))^2}{4\ln(u)\ln(v)} + 1$$

$$= \frac{4\ln(u)\ln(v) - (1+\ln(u)+\ln(v))^2}{4\ln(u)\ln(v)}$$

.
.
.
.

> 0 (probablement

et g : $\forall \theta \in [0,1]$, $g(\theta) > g(\theta^-) > 0$

33. Par composition C_θ est C^2 sur $]0,1[^2$

35. C_θ est 2-croissante sur $[0,1]^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$

$\forall \theta \; u \in [0,1]$

$C(u,0) = 0$

$C(0,u) = 0$

$C(u,1) = u e^{-\theta \ln(u)\ln(1)} = u e^{0} = u$

$C(1,u) = u e^{-\theta \ln(1)\ln(u)} = u$

.

prepaindex.fr

Donc C_6 est une capacité

FIN

prepaindex.fr

prepaindex.fr

IMPRIMERIE NATIONALE – 2023-12-PF 018 751