em lyon business school

Sujet 0, Option mathématiques approfondies

Commentaires généraux

Le sujet de l'option mathématiques approfondies sera constitué de deux ou trois exercices (qui pourront être de longueurs inégales) et d'un problème, permettant de couvrir une large partie des programmes des deux années. Il incorporera systématiquement des questions portant sur le langage Python, de manière modérée pour l'année 2023.

Les parties du programme concernant l'algèbre linéaire ainsi que l'analyse (séries et intégrales impropres), pourront faire l'objet d'un exercice ou d'un problème (comme c'est le cas dans ce sujet 0). Cependant les questions d'analyse seront de préférence reliées à des probabilités, sans s'interdire un exercice (comme c'est le cas ici) avec uniquement ces notions. Le sujet pourra comporter des probabilités et de l'estimation (au travers d'un exercice ou d'un problème), mais ne sera pas majoritairement consacré à ces thèmes.

Les parties du programme non abordées dans ce sujet 0 (par exemple les extrema des fonctions de plusieurs variables, l'estimation et les intervalles de confiance), pourront faire l'objet d'un exercice ou d'un problème pour la session 2023 et les suivantes.

En ce qui concerne la rédaction, quelques points sont précisés dans les attendus après l'énoncé du sujet. Mais il est rappelé que l'usage des quantificateurs et des symboles mathématiques comme abréviation sera sanctionné. De manière plus générale, l'usage d'abréviations (e.g. TCL, IPP, SCE ...) est à proscrire. Il est enfin rappelé qu'il est demandé de vérifier que les hypothèses d'un théorème sont satisfaites avant de l'utiliser.

Sujet 0 Emlyon, Option mathématiques approfondies

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

*La **présentation** de la copie doit être correcte, les résultats mis en valeur et les feuilles numérotées. Les étapes des éventuels calculs doivent apparaître sur la copie. La clarté, la précision et la concision de la rédaction entrent dans une part importante de l'évaluation.*

Si un candidat croit voir une erreur dans le sujet, il l'indiquera sur sa copie et continuera à composer.

Exercice 1

Une variable à densité

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour x réel, par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x\sqrt{x}} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. a) Étudier la fonction f et tracer l'allure de son graphe (on précisera les demi-tangentes au point d'abscisse 1).
   b) Démontrer que f est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

2. Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ dont une densité est f.
   a) Déterminer la fonction de répartition F de X. Tracer son graphe (on précisera les demi-tangentes au point d'abscisse 1).
   b) Démontrer que F réalise une bijection de $]1, +\infty[$ sur $]0, 1[$ et déterminer la bijection réciproque G.

3. On conserve les notations introduites à la question précédente. Soit U une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de loi uniforme sur $]0, 1[$.
   a) On admet que $Y = G(U)$ est une variable aléatoire. Déterminer sa loi.
   b) **Informatique.** Expliquez le but des deux fonctions Python suivantes :

```
def G(x):
    return 1/((1-x)**2)


def varX(n):
    from numpy.random import random
    X=[]
    for i in range(n):
        X.append(G(random()))
    return X
```

c) **Informatique.** On considère la fonction Python suivante, qui utilise la fonction `varX` précédente :

```
def moyX(n):
from numpy import mean
    return mean(varX(n))
```

Cinq appels `moyX(1000)` donnent successivement comme résultats (arrondis à l'unité) :

1422 3812326 11468 2447 1827

Que conjecturez-vous ?
Démontrer votre conjecture.

4. On considère maintenant une suite (X_k) de variables aléatoires indépendantes de même loi que la variable X de la question 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$Z_n = \inf(X_1, \ldots, X_n)$$

a) Soit $n \geqslant 1$ entier. Expliquer pourquoi, pour tout x réel, $[Z_n \leqslant x]$ est bien un événement.

Cela permet de justifier que Z_n est bien une variable aléatoire et de considérer la fonction de répartition G_n de la variable Z_n.

b) Démontrer que pour tout x réel on a : $G_n(x) = 1 - \big(1 - F(x)\big)^n$.

c) Soit $n \geqslant 1$ entier. La variable aléatoire Z_n est-elle à densité ?

d) **Informatique.** Écrire un script Python, utilisant la fonction `varX` de la question 3b permettant de simuler la variable aléatoire Z_n.
On rappelle qu'avec la bibliothèque `numpy`, importée sous l'alias `np`, l'appel `np.min(L)` donne le minimum d'une liste de nombres `L`.

e) La figure 1 présente des histogrammes représentant la répartition de 1000 valeurs prises respectivement par des simulations des variables aléatoires Z_{10}, Z_{100}, Z_{1000}.

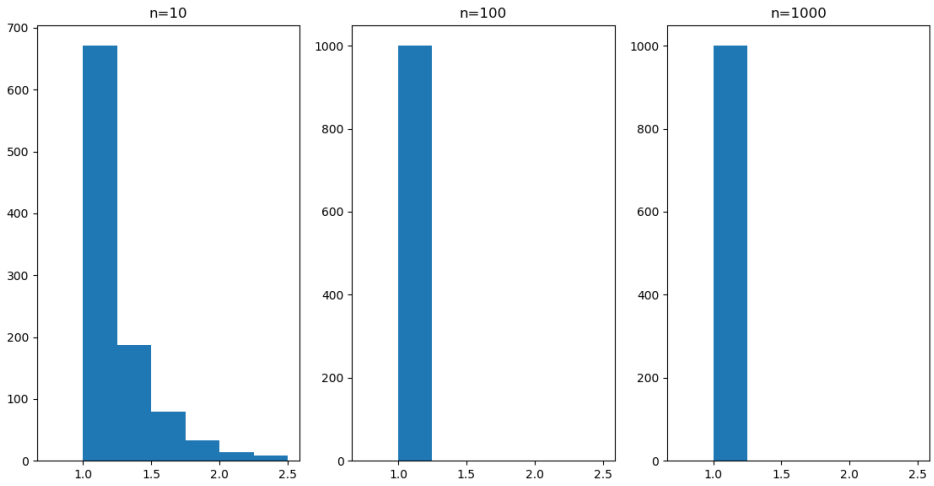


FIGURE 1 – Répartition des valeurs prises par Z_n.

Que laissent suggérer ces graphiques ?

f) Etudier la convergence en loi de la suite de variable aléatoires $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 2

Dans tout l'exercice, α est un nombre réel.

1. Démontrer que pour tout $x \in]-1,1[$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n^\alpha}$ est convergente.

Dans la suite de l'exercice, pour tout $x \in]-1,1[$, *on pose :* $f_\alpha(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^\alpha}$.

2. Expliciter les fonctions f_0 et f_{-1}

Dans la suite de l'exercice, on suppose que α *appartient à l'intervalle* $]0,1[$.

3. La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est-elle convergente ?

4. Justifier que, pour tout $x \in]0,1[$, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Dans la suite de l'exercice, pour tout $x \in]0,1[$, *on pose :*

$$I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t.$$

5. On rappelle que la fonction Γ d'Euler est définie correctement sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall s \in \mathbb{R}_+^*,\ \Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

   Soit $x \in]0,1[$. Démontrer que :

$$I(x) = (-\ln x)^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha).$$

6. Soit $x \in]0,1[$. On considère la fonction $u_{x,\alpha}$ définie pour $t > 0$ par : $u_{x,\alpha}(t) = \dfrac{x^t}{t^\alpha}$.

   a) Démontrer que la fonction $u_{x,\alpha}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

   b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Justifier que :

$$u_{x,\alpha}(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} u_{x,\alpha}(t)\,\mathrm{d}t \leqslant u_{x,\alpha}(k)$$

   et en déduire l'encadrement : $f_\alpha(x) - x \leqslant \displaystyle\int_1^{+\infty} u_{x,\alpha}(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f_\alpha(x)$.

   c) Démontrer l'encadrement : $I(x) - \displaystyle\int_0^1 \frac{x^t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \leqslant f_\alpha(x) \leqslant I(x)$.

7. Déterminer un équivalent de $f_\alpha(x)$ quand x tend vers 1, à l'aide de la fonction Γ.

Problème

Des polynômes orthogonaux

Notations.

- $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{R}$ celui des nombres réels. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note $[\![0, n]\!]$ l'ensemble $\{p \in \mathbb{N} / \ 0 \leqslant p \leqslant n\}$.
- On note $\mathbb{R}[x]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.
- Pour tout entier naturel n, $\mathbb{R}_n[x]$ est l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n.
- Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[x]$, on note encore P la fonction polynomiale associée définie sur $\mathbb{R}$.
- Lorsque $P \in \mathbb{R}[x]$, P' et P'' désignent respectivement les fonctions dérivées première et seconde de P.
- On pose pour tout le problème $A(x) = x^2 - 1$ et $B(x) = 2x$.
- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $P_k(x) = x^k$, de sorte que si $n \in \mathbb{N}$, $\beta = (P_0, \ldots, P_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$.
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients réels.

Objectifs.

Dans une première partie, on introduit une famille de polynômes (P_k) vecteurs propres d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$. L'objet de la seconde partie est l'étude, dans un cas particulier, d'une famille de polynômes orthogonaux de $\mathbb{R}_n[x]$. La troisième partie généralise l'exemple de la seconde partie.

Partie I - Étude d'un endomorphisme

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[x]$, on pose : $\Phi(P) = AP'' + BP'$.

1. a) Démontrer que si $P \in \mathbb{R}_n[x]$ alors $\Phi(P) \in \mathbb{R}_n[x]$.
   b) Démontrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.
2. a) Calculer $\Phi(P_0)$ et $\Phi(P_1)$.
   b) Pour tout $k \in \{2, \ldots, n\}$ calculer $\Phi(P_k)$.
   c) Déterminer la matrice M de Φ dans la base canonique $\beta = (P_0, P_1, \ldots, P_n)$ de $\mathbb{R}_n[x]$.
   d) En déduire le spectre de Φ.
3. L'endomorphisme Φ est-il bijectif ?
4. Déterminez le noyau de Φ.
5. L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable ?

Partie II - Un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[x]$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dès que P et Q sont des polynômes dans $\mathbb{R}_n[x]$ on pose :

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$$

6. Démontrer que l'application $(P, Q) \mapsto \langle P, Q \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[x]$.

Dans la suite de cette partie, on munit $\mathbb{R}_n[x]$ de ce produit scalaire.

7. **Une base orthogonale de vecteurs propres de Φ.** Dans cette question Φ désigne l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$ introduit dans la partie I.
   a) Soient P et Q dans $\mathbb{R}_n[x]$. On pose $R = (P'Q - PQ')A$.
   Démontrer que $R' = \Phi(P)Q - P\Phi(Q)$.
   b) Démontrer que l'endomorphisme Φ est symétrique.
   c) Montrer qu'il existe une base orthogonale $(Q_0, \ldots, Q_n)$ de $\mathbb{R}_n[x]$ formée de vecteurs propres de Φ, unitaires, tels que $\deg(Q_k) = k$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.
   d) Justifier que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ le polynôme Q_k est dans l'orthogonal de $\mathbb{R}_{k-1}[x]$.

Partie III - Généralisation

Dans toute cette partie $\mathbb{R}[x]$ est muni d'un produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$, cette notation étant indépendante de celle de la partie II.

On appelle *système orthogonal* toute suite de polynômes $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant les propriétés suivantes :
— $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthogonale, c'est-à-dire : $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ i \neq j \Rightarrow \langle Q_i, Q_j\rangle = 0$;
— pour tout $n \in \mathbb{N}$, Q_n est unitaire et de degré n.

8. On suppose qu'il existe un système orthogonal $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la famille $(V_0, V_1, \ldots, V_n)$ est une base orthogonale de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[x]$.
   b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On note F_n l'orthogonal de $\mathbb{R}_n[x]$ dans $\mathbb{R}_{n+1}[x]$.
   Démontrer que $\mathrm{vect}(V_{n+1}) = F_n$.
9. Justifier qu'il existe effectivement un système orthogonal $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   On pourra procéder par récurrence.
10. On suppose que $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un autre système orthogonal.
    Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $W_n = V_n$.

Fin de l'énoncé

Commentaire sur les attendus

Exercice 1

Question 1a)

Pour l'étude de la fonction, il est attendu le tableau de variation et le calcul des limites (l'étude de la convexité serait demandée explicitement)

Question 2b)

La formulation de la question est équivalente à la suivante : « Démontrer que F *induit* une bijection de $]1, +\infty[$ sur $]0, 1[$ et déterminer la bijection réciproque G. »

Question 3a)

Pour tout x dans $\mathbb{R}$, puisque $F(x) \in [0, 1[$, on a :

$$P(G(U) \leqslant x) = P(U \leqslant F(x)) = F(x).$$

Question 3b)

On attend :
— La première est la fonction G.
— La seconde renvoie une liste de n nombres qui simulent la variable aléatoire X.

Question 3c)

On attend
— que le candidat explique, sans justification, que la fonction `moyX` simulerait l'espérance de la variable X, si X en admettait une ;
— que le candidat démontre que X n'admet pas d'espérance.

Question 4a)

$[Z_n \leqslant x]$ est une union d'événements, ou le complémentaire d'une intersection d'événements, puisque les X_i sont des variables aléatoires.

Question 4b)

L'indépendance des variables aléatoires doit être évoquée.

Question 4d)

Une explication rapide du script proposé est demandée.

Exercice 2

Question 2)

L'utilisation de la série dérivée de la série géométrique est attendue.

Question 3)

Citation du critère de convergence pour les séries de Riemann.

Question 4)

Dans l'ordre :
— Continuité de la fonction intégrée ;
— Problèmes en 0 et en $+\infty$.
Dans le cas d'usage d'équivalents en 0, préciser au moins *le signe du dernier équivalent* et citation de : « *les intégrales impropres $*$ et $**$ ont même nature.* »

En $+\infty$, on acceptera : $t^2 f(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ ainsi $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} o(1/t^2)$, donc l'intégrale impropre $\displaystyle\int_*^{+\infty} f$ est absolument convergente, donc convergente.

Question 5)

Le changement de variable doit être justifié : ici on peut se contenter de « *changement de variable affine* ». De manière générale, il conviendra de préciser : « fonction C^1 bijective strictement monotone de l'intervalle (ouvert) $*$ sur l'intervalle (ouvert) $**$ »

Problème

La notation X pour désigner l'indéterminée des polynômes sera bien sûr acceptée.

Question 6a)

Il est attendu, pour le caractère défini :
— Comme $\displaystyle\int_{-1}^{1} P^2 = 0$ et comme P^2 est positive et continue sur $[-1,1]$, P^2 est nul sur $[-1,1]$.
— Ainsi P admet une infinité de racines, c'est le polynôme nul.

Question 9)

On pose $V_0 = 1$ et on suppose $V_0, \dots, V_n$ construits pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors $(V_0, \dots, V_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[x]$. Dans $\mathbb{R}_{n+1}[x]$, l'orthogonal de $\mathbb{R}_n[x]$ est une droite vectorielle : on prend alors V_{n+1} unitaire qui dirige cette droite.

Question 10)

Pour $n \geqslant 1$ entier W_n et V_n dirigent l'orthogonal de $\mathbb{R}_n[x]$ dans $\mathbb{R}_{n+1}[x]$: ils sont colinéaires, donc égaux car unitaires.