Copie anonyme - n°anonymat : 367901

N5-00077
367901
Mat Appro

Code épreuve : 295	Nombre de pages : 27	Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques Approfondies en Lyon

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Problème 1 :

Partie 1 :

1. A est symétrique réelle donc diagonalisable dans une base orthonormée (Théorème spectral)

on
$\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

Donc $2 \in Sp(A)$ et $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \in E_2(A)$

et $0 \in Sp(A)$ car A n'est pas ~~bijective~~ inversible (de rang 1)
$\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \in E_0(A)$

Donc on note $B = \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$

On a alors $A = P_{CB}\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}P_{BC}$ avec C la base canonique de $\mathbb{R}^2$
P_{BC} est orthogonale et notée Q

$A = Q\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}{}^tQ$

2.a. Soit $\varphi : \begin{cases}\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\} \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) A \begin{pmatrix}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{pmatrix}\end{cases}$

prepaindex.fr

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$\varphi(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{x^2+xy}{x^2+y^2} + \frac{xy+y^2}{x^2+y^2}$$

$$= \frac{x^2+2xy+y^2}{x^2+y^2}$$

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $\varphi(x,y) = 1 + \frac{2xy}{x^2+y^2}$

- $(x,y) \mapsto 2xy \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$
  $(x,y) \mapsto x^2+y^2 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \mathbb{R}_+^*)$

Donc par théorèmes généraux.

$\varphi \in \mathcal{C}^2(\underbrace{\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}}_{\text{noté } E \text{ dans la suite}})$

prepaindex.fr

2.b. $\varphi \in \mathcal{C}^2(\mathcal{E})$

$\forall (x,y) \in \mathcal{E}$, $\nabla\varphi(x,y) = \left(\dfrac{2y(x^2+y^2) - 2xy\,2x}{(x^2+y^2)^2} , \dfrac{2x(x^2+y^2) - 2xy\,2y}{(x^2+y^2)^2} \right)$

$= \left(\dfrac{2y^3 - 2x^2y}{(x^2+y^2)^2} , \dfrac{2x^3 - 2xy^2}{(x^2+y^2)^2} \right)$

Soit $(x,y) \in \mathcal{E}$

$\nabla\varphi(x,y) = 0 \iff \begin{cases} \dfrac{2y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} = 0 \\ \dfrac{2x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} y(y^2-x^2) = 0 \\ x(x^2-y^2) = 0 \end{cases}$

Si $y = 0$: $x(x^2-0) = 0$ et $x = 0$ exclu

Si $y^2 - x^2 = 0$ alors $y^2 = x^2$ et $(x,y) \in \mathcal{E} \cap \mathcal{C}$

et réciproquement

Donc l'ensemble des points critiques de φ est $\{(x,y) \in \mathcal{E},\ y^2 = x^2\}$ qui est infini.

2.c. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $(x,y) \in \mathcal{E}$

$\varphi(\alpha x, \alpha y) = 1 + \dfrac{2\alpha^2 xy}{\alpha^2 x^2 + \alpha^2 y^2} = 1 + \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$

$\forall \alpha \in \mathbb{R}^*, \forall (x,y) \in \mathcal{E},\ \varphi(\alpha x, \alpha y) = \varphi(x,y)$

prepaindex.fr

2.d.

Partie 2

3. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

3.a. $\forall {}^tBB \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $B\,{}^tB \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad [{}^tBB]_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} {}^tB_{ik} B_{kj}$$

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad [{}^tBB]_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} B_{ki} B_{kj}$$

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad [B\,{}^tB]_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} B_{ik} {}^tB_{kj}$$

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad [B\,{}^tB]_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} B_{ik} B_{jk}$$

3.b $\mathrm{Tr}({}^tBB) = \sum_{i=1}^{n} [{}^tBB]_{i,i}$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} B_{ki} B_{ki}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} B_{ki} B_{ki}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} [B\,{}^tB]_{kk}$$

$$= \mathrm{Tr}(B\,{}^tB)$$

$$\mathrm{Tr}(B\,{}^tB) = \mathrm{Tr}({}^tBB)$$

prepaindex.fr

IMPRIMERIE NATIONALE – 2025-12-1003094

Copie anonyme - n°anonymat : 367901

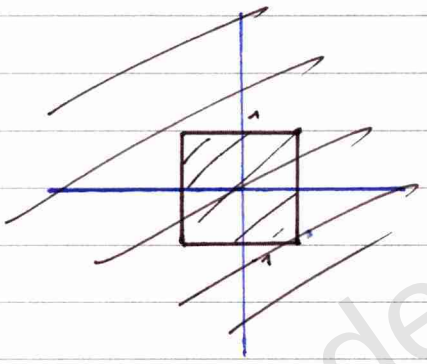
Emplacement QR Code

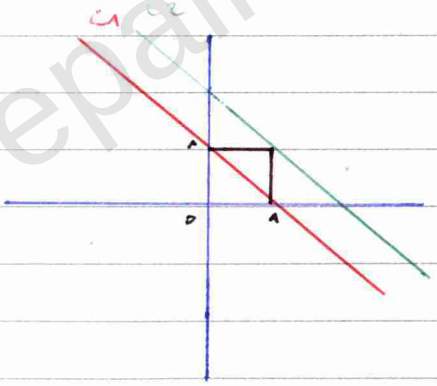
Code épreuve : 295 | **Nombre de pages :** 27 | **Session :** 2026

Épreuve de : Mathématiques approfondies en lyon

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

4.





$C_1 = \{(x,y),\ x+y=1\}$
$= \{(x,y) : y = 1-x\}$

$C_2 = \{(x,y),\ x+y=2\}$
$= \{(x,y),\ y = 2-x\}$

5. Soit $k \in \Pi_1 \cap D$. Supposons $\lambda \notin \mathrm{Vect}((1,1,\dots,1))$

Soit $\alpha = (x_1, \dots, x_n) \in \dot{D}$ avec $\dot{D}$ ~~l'intérieur~~ l'intérieur de D

α est un point critique sous la contrainte C_k

ssi $\begin{cases} \alpha \in C_k \\ \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \nabla f_\lambda(\alpha) = \lambda \nabla V(\alpha) \end{cases}$

avec $V : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i$

V et f_λ sont C^1 sur $\mathbb{R}^n$

prepaindex.fr

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

4.

$\Leftrightarrow$

$\begin{cases} x_1 + \dots + x_n = k \\ \exists \lambda \in \mathbb{R}, \ (k_1, \dots, k_n) = \lambda (1, \dots, 1) \end{cases}$

or $K \notin \text{Vect}((1, \dots, 1))$

Donc Impossible

Si le sujet voulait que $\Lambda \in \text{Vect}((1, \dots, 1))$
on aurait eu un point critique en $(k, 0, \dots, 0)$ et

Donc f_Λ n'a pas de point critique à l'intérieur de D.
Regardons la frontière

Si $x = 0$ et $y \in [0, 1]$:

$D \cap C$ est fermé borné, $f_\Lambda \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$
Donc f_Λ admet un maximum global sur $D \cap C$

6. Soit π une projection de $\mathbb{R}^n$.
On note $F = \ker \pi$ et $G = \text{Im } \pi$
On a $F \oplus G = \mathbb{R}^n$.
On prend alors B une base de $\mathbb{R}^n$ qui est la concaténation d'une base de F et d'une base de G
Soit C la base canonique de $\mathbb{R}$
On trouve

$$\text{Mat}_B(\pi) = \begin{pmatrix} F & G \\ 0 & \\ & \ddots \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

prepaindex.fr

Ainsi : $P = Mat_{\mathcal{C}}(\pi) = P_{\mathcal{C}\mathcal{B}}\, Mat_{\mathcal{B}}(\pi)\, P_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$

Donc P et $Mat_{\mathcal{B}}(\pi)$ sont semblables,

Donc $Tr(P) = Tr(Mat_{\mathcal{B}}(\pi)) = \dim \mathrm{Im}\,\pi$

$= rg(\pi)$

rang

$= rg(P)$

Donc $rg(P) = Tr(P)$

6.b. Supposons π orthogonale

Soit $x \in \mathbb{R}^n$

$x = \underbrace{\pi(x)}_{\in \mathrm{Im}\,\pi} + \underbrace{x - \pi(x)}_{\in \ker \pi}$

$\|x\|^2 = \|\pi(x) + x - \pi(x)\|^2$

Selon Pythagore car $\mathrm{Im}\,\pi \perp \ker \pi$

$= \|\pi(x)\|^2 + \underbrace{\|x - \pi(x)\|^2}_{\geq 0}$

$\geq \|\pi(x)\|^2$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \|x\| \geq \|\pi(x)\|$

6.c. Supposons π orthogonale.

On note $\mathcal{C} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$

Soit $i \in [0, 1]$

$0 \leq \|\pi(e_i)\| \leq 1$

Donc $0 \leq \|\pi(e_i)\|^2 \leq 1$

$0 \leq \left\| \sum_{k=1}^{n} \langle \pi(e_i), e_k \rangle e_k \right\|^2 \leq 1$

Décomposition dans une base orthonormée.

prepaindex.fr

Donc $0 \leq \sum_{k=1}^{n} |\langle \pi(e_i), e_k \rangle| \|e_k\|^2 \leq 1$ Pythagore

Donc $0 \leq \sum_{k=1}^{n} |\langle \pi(e_i), e_k \rangle| \leq 1$

~~Donc $0 \leq$ [illegible]~~

Donc $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $0 \leq |\langle \pi(e_i), e_k \rangle| \leq 1$

Donc $0 \leq |p_{ii}| \leq 1$ car $p_{ij} = \langle \pi(e_j), e_i \rangle$

Donc $\forall i \in [\![1, n]\!]$ $|p_{ii}| \in [0, 1]$

7. A est symétrique réelle donc diagonalisable dans une base orthonormée (Théorème spectral)

Ainsi: $\exists Q \in O_n(\mathbb{R})$, $\exists D \in D_n(\mathbb{R})$ / D diagonale et $A = Q D {}^t Q$

On réarrange la base $\mathcal{B}$ au besoin.

prepaindex.fr

IMPRIMERIE NATIONALE – 2025-12-1003094

Copie anonyme - n°anonymat : 367901

Emplacement QR Code

Code épreuve : 495 | Nombre de pages : 27 | Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques Approfondies ens lyon

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

8. Soit $(i,j) \in [\![1,k]\!]^2$

$$[{}^tMM]_{i,j} = \sum_{p=1}^{n} ({}^tM)_{i,p} M_{p,j}$$

$$= \sum_{p=1}^{n} M_{p,i} M_{p,j}$$

$$= \langle C_i, C_j \rangle \quad \text{avec } \langle \cdot,\cdot \rangle \text{ le produit scalaire usuel de } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ confondu à } \mathbb{R}^n \text{ dans le reste de la copie}$$

$$= \delta_{i,j}$$

Donc ${}^tMM = I_k$

9. Supposons que $\forall i \in [\![1,n]\!],\ \lambda_i = \lambda_1$ ie $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_1\}$

$$\mathrm{Tr}({}^tMAM) = \mathrm{Tr}({}^tMQ\,I_n\,{}^tQM) \quad \text{car } D = (\lambda_1 \vec{e}_1 | \dots | \lambda_1 \vec{e}_n) = I_n$$

$$= \mathrm{Tr}({}^tMQ\,{}^tQM)$$

$$= \mathrm{Tr}({}^tMM) \quad \text{car } Q\,{}^tQ = I$$

$$= \mathrm{Tr}(I_k)$$

$\mathrm{Tr}({}^tMAM) = k$

prepaindex.fr

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

10. Supposons que A admet au moins deux valeurs propres distinctes.
Soit $X = {}^t a_1 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $P = X\,{}^t X$

10. a. $P^2 = (X\,{}^t X)(X\,{}^t X)$
$= {}^t a_1 ({}^t(a_1)\,a_1\,{}^t(a_1))$
$= {}^t a_1 (a_1\,{}^t a_1)(a_1\,{}^t a_1)$
$= {}^t a_1 (1)(1)\,a_1$
$= {}^t a_1 a_1$
$= 1$
$= P$

Donc P est la matrice d'une projection

et ${}^t P = {}^t(X\,{}^t X) = X\,{}^t X = P$ donc P symétrique

Donc P est la matrice d'une projection orthogonale

10. b. Soit $Y \in \ker({}^t X)$

$PY = X\,{}^t X Y = X \times 0_{\mathbb{R}} = 0_{n,1}$

Donc $Y \in \ker(P)$

$\ker {}^t X \subset \ker P$

Soit $Y \in \ker P$
$PY = 0$

Donc $X\,{}^t X Y = 0$
Donc ${}^t Y X\,{}^t X Y = 0$

prepaindex.fr

Donc ${}^t(^tXY)\,{}^tXY = 0$

Donc $\| {}^tXY \|^2 = 0$

Donc ${}^tXY = 0$

Donc $Y \in \ker({}^tX)$

Donc $\ker P \subset \ker {}^tX$

Donc $\ker P = \ker {}^tX$

Selon le théorème du rang :

$rg(P) = n - \dim \ker P$

$= n - \dim \ker {}^tX$

$= \dim \operatorname{Im} {}^tX$

~~Soit $Y \in \operatorname{Im} {}^tX$. $\exists Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXZ = Y$~~

~~$X\,{}^tXZ = \ldots$~~

10. c. $Tr({}^tMAM) = Tr({}^tMQD\,{}^tQM)$

$= Tr(({}^tQM)({}^tMQD))$

$= Tr(X\,{}^tXD)$

$= Tr(PD)$

$Tr({}^tMAM) = Tr(PD)$

prepaindex.fr

Problème 2 :

Partie 1 :

1. a. Soit $t \in [0,1]$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq |P(W=n)\, t^n| \leq |P(W=n)|$ car $|t| \leq 1$

$= P(W=n)$

Donc comme $\sum P(W=n)$ converge

Par comparaison : $\sum P(W=n)\, t^n$ converge (absolument)

Donc $G_W(t)$ existe

Donc G_W est bien définie sur $[0,1]$

1.b. Soit $0 \leq a < b \leq 1$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq a^n < b^n \leq 1$ car $x \mapsto x^n$ croit sur $[0,1]$

$\forall n \in \mathbb{N}$ $0 \leq P(W=n)\, a^n < P(W=n)\, b^n \leq P(W=n)$

$$0 \leq \sum_{n=0}^{+\infty} P(W=n)\, a^n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} P(W=n)\, b^n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} P(W=n) = 1$$

Donc $G_W(a) \leq G_W(b)$

Donc G_W croit sur $[0,1)$

1.c. G_W croit sur $[0,1)$ et est bornée sur $[0,1]$

Donc selon le théorème de la limite monotone,

G_W admet une limite finie en 1^-

Donc $\exists\, \ell \in [0,1]$, $\lim\limits_{t \to 1^-} G_W(t) = \ell$

prepaindex.fr

IMPRIMERIE NATIONALE – 2025-12-1003094

Copie anonyme - n°anonymat : 367901

Emplacement QR Code

Code épreuve : 295 | Nombre de pages : 27 | Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques approfondies en lyon

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

1.d. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $t \in [0,1[$

$$\sum_{k=0}^{n} p(w=k)\, t^k \leq \sum_{k=0}^{n} p(w=k)\, t^k + \underbrace{\sum_{k=n+1}^{+\infty} p(w=k)\, t^k}_{\geq 0}$$

$$\sum_{k=0}^{n} p(w=k)\, t^k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} p(w=k)\, t^k$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0,1[, \ \sum_{k=0}^{n} p(w=k)\, t^k \leq G_w(t) \leq G_w(1)$ (car croissante sur $[0,1]$)

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^{n} p(w=k) = \lim_{t \to 1^-}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

Par passage à la limite

$$\lim_{t \to 1^-} \sum_{k=0}^{n} p(w=k)\, t^k \leq \lim_{t \to 1^-} G_w(t) \leq G_w(1)$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\sum_{k=0}^{n} p(w=k) \leq 1 \leq G_w(1)$

1.e. Par passage à la limite

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} p(w=k)\, 1^k \leq 1 \leq G_w(1)$$

$$G_w(1) \leq 1 \leq G_w(1)$$

Donc $G_w(1) = 1$

prepaindex.fr

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Donc $\lim_{t \to 1^-} G_W(t) = G_W(1)$

Donc G_W est continue à gauche en 1.

1. f. Soit $t \in [0,1[$

$\forall n \geq 1$ on a $n\,p(W=n)\,t^{n-1} \leq n t^{n-1}$

or $\sum n t^{n-1}$ converge (série géométrique dérivée)

Donc $\sum n\,p(W=n)\,t^{n-1}$ converge par comparaison pour tout $t \in [0,1[$

2. Soit $(A_n)_{n \geq 1}$ une suite d'événements mutuellement indépendants.

2. a. $\exp \in C^\infty(\mathbb{R})$

$\forall x \in \mathbb{R}$. $\exp''(x) = \exp(x) > 0$

Donc $\exp$ est convexe sur $\mathbb{R}$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) \geq \exp'(0)(x-0) + \exp(0)$

$e^x \geq x + 1$

Donc en particulier

$\forall x \in \mathbb{R}$ $e^{-x} \geq 1 - x$

2. b Soit $1 \leq n \leq m$ des entiers.

$1 - \exp\left[-\sum_{k=n}^{m} p(A_k)\right] \leq \sum_{k=n}^{m} p(A_k)$

Boole ne fonctionne pas en suite

prepaindex.fr

2.c. Supposons que ~~$p(\bigcup_{k\geq n} A_k) = 1$~~ $\sum p(A_n)$ diverge

Soit $n \geq 1$ $\forall m \geq n$

$$1 \geqslant p\left(\bigcup_{k=n}^{m} A_k\right) \geqslant 1 - \exp\left(-\sum_{k=n}^{m} p(A_k)\right)$$

or $\left(\sum_{k=n}^{m} p(A_k)\right)_{m \geq n}$ est une suite ~~croissante~~ croissante qui diverge

Donc $\lim_{m \to +\infty} \sum_{k=n}^{m} p(A_k) = +\infty$

Donc par passage à la limite $1 \geqslant \lim_{m \to +\infty} p\left(\bigcup_{k=n}^{m} A_k\right) \geqslant 1 - 0$

Donc $p\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k\right) = 1$

$\bigcup_{k=n+1}^{+\infty} A_k \subset \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k$

Donc $\left(\bigcup_{k \geq n} A_k\right)$ décroit

Donc $p\left(\bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{k \geq n} A_k\right) = \lim_{n \to +\infty} p\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n \to +\infty} 1 = 1$

prepaindex.fr

Donc $p\left(\bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{k\geq n} A_k\right) = 1$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$
Soit $k \in \mathbb{N}^*$
Soit $(j_1, \dots, j_n) \in \mathbb{N}^n$

$$p(U_n = (j_1, \dots, j_n)) = p((w_1, w_1+w_2, \dots, \sum_{i=1}^{n} w_i) = (j_1, \dots, j_n))$$

or $w_1 \overset{\mathcal{L}}{=} w_k$
$w_1 + w_2 \overset{\mathcal{L}}{=} w_k + w_{k+1}$
$\vdots$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i \overset{\mathcal{L}}{=} \sum_{i=k}^{n-1+k} w_i$$

Donc il vient $p(U_n = (j_1, \dots, j_n)) = p(V_{n,k} = (j_1, \dots, j_n))$

4. $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=0}^{n} b_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{n} a_i b_j$

$$= \sum_{k=0}^{2n}\sum_{i=1}^{k} a_i b_{k-i}$$ (Produit de Cauchy)

$$= \sum_{k=0}^{2n} c_k$$

$$\sum_{k=0}^{n} c_k \leq \sum_{k=0}^{2n} c_k$$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\sum_{k=0}^{n} c_k \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=0}^{n} b_j\right) \leq \sum_{k=0}^{2n} c_k$

prepaindex.fr

IMPRIMERIE NATIONALE – 2025-12-1003094

Copie anonyme - n°anonymat : 367901

Emplacement QR Code

Code épreuve : 295 | Nombre de pages : 27 | Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques Approfondies emlyon

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

4.b $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge et $\sum_{n\geq 0} b_n$ converge

Donc $\left(\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| \left|\sum_{j=0}^{n} b_j\right|\right)_{n\geq 0}$ converge donc est majorée

$\forall k \in \mathbb{N}^*$ $c_k \geq 0$

Donc $\left(\sum_{k=1}^{n} c_k\right)_{n\geq 0}$ est croissante et majorée donc converge

Donc $\sum c_k$ converge

U_n en cadrement nous donne $\sum_{k=1}^{+\infty} c_k = \left(\sum_{i=1}^{+\infty} a_i\right)\left(\sum_{j=0}^{+\infty} b_j\right)$

Partie 2.

5.a. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ $E(X_k) = 1 \times \frac{1}{2} - 1 \times \frac{1}{2} = 0$

$V(X_k) = E(X_k^2) - E(X_k)^2$ (Koenig-Huygens)

$= 1 - 0$

$\forall k \in \mathbb{N}^*$ $V(X_k) = 1$

5.b. Soit $n \geq 1$

$E(S_n) = E\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k) = \sum_{k=1}^{n} 0 = 0$ (linéarité)

$V(S_n) = V\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k) = \sum_{k=1}^{n} 1 = n$ (Indépendance mutuelle)

prepaindex.fr

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

6.

$(X_k)_{k\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi admettant une variance.

On note $\overline{X_n} = \frac{S_n}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Le Théorème central limite nous assure que :

$$\frac{\overline{X_n} - E(\overline{X_n})}{\sqrt{V(\overline{X_n})}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

$$\overline{X_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Soit $\varepsilon > 0$:

$$\text{or } p\left(\left|\frac{S_n}{n} - 0\right| > \varepsilon\right) = p\left(\left|\frac{S_n}{n} - E\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| > \varepsilon\right)$$

$$\leq \frac{V\left(\frac{S_n}{n}\right)}{\varepsilon^2} \quad \text{Selon Bienaymé Tchebychev}$$

$$= \frac{\frac{1}{n^2} V(S_n)}{\varepsilon^2}$$

$$= \frac{\frac{n}{n^2}}{\varepsilon^2}$$

$$= \frac{1}{n\varepsilon^2}$$

Donc $\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n\to+\infty} p\left(\left|\frac{S_n}{n} - 0\right| > \varepsilon\right) = 0$

Donc $\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{P} 0$

prepaindex.fr

7.a.
```
def simul_x():
    if rd.random() < 1/2:
        return(1)
    else:
        return(-1)
```

7.b.
```
def simul_S(n):
    S = 0
    for i in range(n):
        S = S + simul_x()
    return S
```

8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (x_{k+1} - 1)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (x_{k+1}) - n$$

$$= 2\sum_{k=1}^{n} \frac{x_{k+1}}{2} - n$$

Par convention $\sum_{k=1}^{0} = 0$ la somme vaut 0 et $2 \times 0 - 0 = 0 = S_0$

Donc formule valable en 0

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $S_n = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{x_{k+1}}{2} - n$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$

$\left(\frac{x_{k+1}}{2}\right)(\Omega) = \{0, 1\}$

$P\left(\frac{x_{k+1}}{2} = 0\right) = P(x_{k+1} = 0) = P(x_k = -1) = \frac{1}{2}$

$P\left(\frac{x_{k+1}}{2} = 1\right) = P(x_k = 1) = \frac{1}{2}$

Donc $\frac{x_{k+1}}{2} \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$ $\forall k \in \mathbb{N}^*$

prepaindex.fr

9. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $i \in [\![-n, n]\!]$

9.a. Supposons que i et n n'aient pas la même parité

$$p(S_n = i) = p\left(2\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k + 1}{2} = n + i\right)$$

Or $n+i$ est impair et $\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k+1}{2} \in \mathbb{N}$ donc $2\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k+1}{2}$ est pair

Donc $p(S_n = i) = 0$

9.b. Supposons que i a la même parité que n.

$$p(S_n = i) = p\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k+1}{2} = \frac{n+i}{2}\right)$$

Or $\frac{x_k+1}{2} \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$ et $\left(\frac{x_k+1}{2}\right)_{k \in [\![1,n]\!]}$ sont mutuellement indépendantes

Donc $\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k+1}{2} \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$

Donc $p(S_n = i) = \binom{n}{\frac{n+i}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^n$

10.a. ~~$p(S_{2n}=0)$~~ Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$p(S_{2n} = 0) = \binom{2n}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$$

$$= \frac{(2n)!}{n!n!} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$$

$$\underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{4\pi n} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{2\pi n \left(\frac{n}{e}\right)^{2n}} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$p(S_{2n} = 0) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

prepaindex.fr

IMPRIMERIE NATIONALE – 2025-12-1003094

Copie anonyme - n°anonymat : 367901

Emplacement QR Code

Code épreuve : 295 | Nombre de pages : 17 | Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques Approfondies emlyon

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

10.b. $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ diverge (Riemann $\frac{1}{2} < 1$)

Donc $\sum_{n\geq 1} p(S_{2n} = 0)$ diverge par comparaison car $\forall n \geq 0 \ \frac{1}{\sqrt{\pi n}} > 0$

Donc $p\left(\bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} A_k\right) = 1$

Donc la marche aléatoire passe une infinité de fois par 0 presque sûrement

11.a. $p(T=1) = p(S_1 > 0)$
$= p(X_1 > 0)$
$= p(X_1 = 1)$
$= \frac{1}{2}$

$p(T=1) = \frac{1}{2}$

11.b. Soit $n \geq 2$ $[T=n] = \left[\bigcap_{j=1}^{n-1} (S_j \leq 0)\right] \cap (S_n > 0)$

$= \left[\bigcap_{j=1}^{n-1} (S_j \leq 0)\right] \cap (S_n = 1)$

Car si $S_n \geq 1$ alors il y a un $S_j \geq 0$ comme la marche n'avance que de 1 en 1.

prepaindex.fr

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

11. c. Soit n un entier naturel pair

$p(S_n = 1) = 0$ selon 9. a

Donc $p(T_n = n) = p\left(\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} [S_i \leq 0]\right) \cap [S_n = 1]\right)$

$\leq p\left(\left(\bigcap_{j=1}^{n-1} [S_j \leq 0]\right)\right)$ · par inclusion et croissance de la probabilité.

$\leq p(S_n = 1)$

$= 0$

Donc $p(T = n) = 0$ si n pair

12. a Soit $k \in \mathbb{N}^*$

R_k est l'événement : le marcheur est strictement du côté gauche de l'axe des ordonnées jusqu'au $k+1$e moment où il revient au milieu.

12. b. $p(R_k) = p(S_1 = -1)\, p_{(S_1 = -1)}\left(\left(\bigcap_{j=2}^{k} [S_j \leq -1]\right) \cap [S_{k+1} = 0]\right)$

$= \frac{1}{2} p_{(S_1 = -1)}\left[\left(\bigcap_{j=2}^{k} \left[-1 + \sum_{i=2}^{j} x_i \leq -1\right]\right) \cap \left[-1 + \sum_{i=2}^{k+1} x_i = 0\right]\right]$

$= \frac{1}{2} p\left(\left(\bigcap_{j=2}^{k} \left(\sum_{i=2}^{j} x_i \leq 0\right)\right) \cap \left[\sum_{i=2}^{k+1} x_i = 1\right]\right)$ (Indépendance de S_1 et $x_2, \ldots, x_{k+1}$)

$= \frac{1}{2} p_1\left(\left(\bigcap_{j=2}^{k} \left[\sum_{i=1}^{j-1} x_i \leq 0\right]\right) \cap \left(\sum_{i=1}^{k} x_i = 1\right)\right)$ (Question 3 bis)

$= \frac{1}{2} p\left(\left(\bigcap_{j=2}^{k} S_{j-1} \leq 0\right) \cap [S_k = 1]\right)$

$= \frac{1}{2} p\left(\left(\bigcap_{j=1}^{k-1} S_j \leq 0\right) \cap (S_k = 1)\right)$

$p(R_k) = \frac{1}{2} p(T = k) \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$

prepaindex.fr

12. c. Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$A = \sum_{h=1}^{n-1} p\left(R_h \cap \left(\bigcap_{j=h+2}^{n} [S_j - S_{h+1} \leq 0] \mid \cap [S_{n+1} - S_{h+1} = 1] \right) \right)$$

$$= \sum_{h=1}^{n-1} p\left([S_1 = -1] \cap \left(\bigcap_{j=2}^{h} [S_j \leq -1] \mid \cap [S_{h+1} = 0] \cap \left(\bigcap_{j=h+2}^{n} [S_j - S_{h+1} \leq 0] \right) \cap [S_{n+1} - S_{h+1} = 1] \right) \right)$$

$$= \sum_{h=1}^{n-1} p\left([S_1 = -1] \cap \left(\bigcap_{j=2}^{h} [S_j \leq -1] \right) \mid \cap [S_{h+1} = 0] \cap \left(\bigcap_{j=h+2}^{n} S_j \leq 0 \right) \mid \cap [S_{n+1} = 1] \right)$$

$$= \sum_{h=1}^{n-1} p\left(G_{h,n} \right)$$

On définit $G_{h,n}$ comme l'événement : "Le marcheur reste à gauche strictement de l'axe des ordonnées jusqu'au $h+1$ e où il est à 0 mais ne dépasse l'axe à droite qu'au $n+1$ e."

Donc $\forall h \in [\![1, n-1]\!]$ $G_{h,n} \subset [T = n+1]$

Donc $A = \sum_{h=1}^{n-1} p\left(G_{h,n} \cap [T = n+1] \right)$

Remarquons que $(G_{h,n})_{h \in [\![1,n-1]\!]}$ est une suite d'événement 2 à 2 incompatibles

Et enfin si $T = n+1$, le marcheur doit nécessairement traverser l'axe des ordonnées. Donc les $(G_{h,n})$ forment une partition de $[T = n+1]$

Ainsi : $A = p(T = n+1)$ selon la formule des probabilités totales

D'où le résultat

prepaindex.fr

12. ~~d. $p(T=n+1)$ =~~

13.a. Soit $t \in [0,1]$

$$G_T(t)^2 = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} p(T=n)\, t^n\right)^2$$

$$= \left(\sum_{n=1}^{+\infty} p(T=n)\, t^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} p(T=n)\, t^n\right) \quad \text{car } p(T=0)=0$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} p(T=k)\, t^k\, p(T=n-k)\, t^{n-k}\right)$$

$\forall t \in [0,1]$

$$G_T(t)^2 = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} p(T=k)\, p(T=n-k)\right) t^n$$

13.b. Soit $t \in [0,1]$

$$t\, G_T(t)^2 = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} p(T=k)\, p(T=n-k)\right) t^{n+1}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} 2\, p(T=n+1)\, t^{n+1}$$

$$= \sum_{n=2}^{+\infty} 2\, p(T=n)\, t^n$$

$$= 2\sum_{n=0}^{+\infty} p(T=n)\, t^n - 2\, p(T=1)\, t^1 - 2\, p(T=0)\, t^0$$

$$= 2\, G_T(t) - t$$

$\forall t \in [0,1]$, $G_T(t)^2 = 2\, G_T(t) - t$

prepaindex.fr

IMPRIMERIE NATIONALE – 2025-12-1003094

Copie anonyme - n°anonymat : 367901

Emplacement QR Code

Code épreuve : 295 | Nombre de pages : 27 | Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques approfondies en algo.

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

13.c. En particulier pour $t = 1$

$$|G_T(1)|^2 = 2G_T(1) - 1$$

Donc $G_T(1)^2 = 2G_T(1) - 1$

Donc $G_T(1)^2 - 2G_T(1) + 1 = 0$

Donc $(G_T(1) - 1)^2 = 0$

Donc $G_T(1) = 1$

$$\begin{aligned} P(T = -1) &= 1 - P(\overline{T = -1}) \\ &= 1 - P(T \in \mathbb{N}^*) \\ &= 1 - P\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} (T = k)\right) \\ &= 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} P(T = k) \\ &= 1 - G_T(1) \\ &= 1 - 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$P(T = -1) = 0$

prepaindex.fr

Soit $t \in [0,1[$

$$\frac{G_T(t) - G_T(t)}{t-1} = \frac{G_T(t) - 1}{t-1}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{t + t\,G_T(t)^2 - 1}{t-1}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{t\,(G_T(t)+1)^2 - 2}{t-1}$$

$\forall t \in [0,1[$, $G_T'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\,p(T=n)\,t^{n-1}$

14. a.

```
def simul_T():
    T = -1
    S = 0
    for k in range(10000):
        if S > 0:
            T = k
            return T
        else:
            S = S + simul_X(1)
    return T
```

14. b. mystere(N) retourne la moyenne empirique de N simulations de T.

On voit que les résultats sont très volatiles de 31 à 8181.

Ainsi sur un nombre aussi gros que 1000, on peut conjecturer que T n'a pas d'espérance.

prepaindex.fr

14.c. T admet une espérance $\Leftrightarrow G_T'(1)$ admet une limite finie en 1^-.

FIN.

prepaindex.fr

prepaindex.fr

IMPRIMERIE NATIONALE – 2025-12-1003094