Copie anonyme - n°anonymat : 367901

N5-00077 367901 Mat Appro

Code épreuve : 297	Nombre de pages : 34	Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques Approfondies EDHEC

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Exercice 1 :

1. def simul2():
    return rd.random() * rd.random()

2. X_1 et X_2 admettent une espérance et une variance

~~Donc par Transfert et comme $x \mapsto \ln(x) \in C^0(X_1(\Omega)) \cap C^0(X_2(\Omega))$~~
~~$\ln(X_1)$ et~~

X_1 et X_2 sont indépendantes

Donc $Z = X_1 X_2$ admet une espérance et $E(Z) = E(X_1 X_2)$

$= E(X_1) E(X_2)$

$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$

$E(Z) = \frac{1}{4}$

X_1^2 et X_2^2 admettent une espérance et sont indépendantes (Lemme des coalitions)

Donc $Z^2 = X_1^2 X_2^2$ admet une espérance et

$E(Z^2) = E(X_1^2 X_2^2)$

$= E(X_1^2) E(X_2^2)$

$= (V(X_1) + E(X_1)^2)(V(X_2) + E(X_2)^2)$ (Koenig - Huygens)

$= \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4}\right)$

$= \frac{1}{9}$

prepandex.fr

~~$V(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2$~~ (Koenig Huygens)

~~$= \frac{7^2}{49} - \frac{1}{16}$~~

2 admet donc une variance et selon Koenig-Huygens :

$V(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2$

$= \frac{1}{9} - \frac{1}{16}$

$V(Z) = \frac{7}{9 \times 16}$

3. Soit F la fonction de répartition de Y_1 et Y_2

3.a. $Y_1(\Omega) =]-\infty ; 0[= Y_2(\Omega)$ $\quad Y_1 \overset{\mathcal{L}}{=} Y_2$

Soit $x \leq 0$.

$F(x) = P(Y_1 \leq x)$

$= P(\ln(X_1) \leq x)$

$= P(X_1 \leq e^x)$

$= e^x$

Soit $x > 0$, $F(x) = 1$

$$F(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

3.b. Y_1 et Y_2 sont à densité.

Une densité de Y_1 et Y_2 est par exemple $f : x \longmapsto \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

prepaingdex.fr

4.a. Y_1 et Y_2 admettent une densité bornée et continue sur $\mathbb{R}$

Ainsi $Y_1 + Y_2$ est à densité et une densité est h définie par :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, f(x-t)\, dt$

$= \int_{-\infty}^{0} e^t f(x-t)\, dt$

$= \int_{x}^{+\infty} e^{x-u} f(u)\, du$ $\quad u = x - t$

Si $x > 0$, $h(x) = \int_x^{+\infty} e^{x-u} f(u)\, du$

$= \int_x^{+\infty} e^{x-u} \cdot 0 \, du$

$= 0$

Si $x \leq 0$ $h(x) = \int_x^0 e^{x-u} e^u \, du$

$= \int_x^0 e^x \, du$

$= -x e^x$

D'où $h : x \mapsto \begin{cases} -x e^x & \text{si } x \leq 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ est une densité de $Y_1 + Y_2$

4.b. Soit H la fonction de répartition de $Y_1 + Y_2$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $H(x) = \int_{-\infty}^{x} h(t)\, dt$

Si $x \leq 0$: $H(x) = \int_{-\infty}^{x} -t e^t \, dt$

Soit $A \leq x$

$\int_A^x -t e^t \, dt = \left[-t e^t\right]_A^x + \int_A^x e^t \, dt$ (Par intégration par parties car $t \mapsto e^t$ et $t \mapsto -t$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$)

$= -x e^x + A e^A + e^x - e^A$

prepaindex.fr

$H(x) = \lim_{A \to -\infty} \int_A^x -te^t dt$

$= -xe^x + 0 + e^x + 0$ (Croissance comparée)

$= (1-x)e^x$

Si $x > 0$:

$H(x) = \int_{-\infty}^{x} h(t)\,dt$

$= \int_{-\infty}^{0} h(t)\,dt$

$= H(0)$

$= (1-0)e^0$

$= 1$

Donc $H : x \mapsto \begin{cases} (1-x)e^x & \text{si } x \leq 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

4.c. $Z(\Omega) =]0,1]$

$\ln(Z) = \ln(X_1 X_2)$

$= \ln(X_1) + \ln(X_2)$

$= Y_1 + Y_2$

~~Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_Z(x) = P(Z \leq x)$~~

$\forall x \leq 0 \quad F_Z(x) = 0$

$\forall x \in]0,1] \quad F_Z(x) = P(Z \leq x)$

$= P(\ln(Z) \leq \ln(x))$

$= H(\ln(x))$

$= (1-\ln(x))e^{\ln(x)}$

$= x - x\ln(x)$

$\forall x \geq 1, \quad F_Z(x) = 1$

prepaindex.fr

IMPRIMERIE NATIONALE – 2023-12-PF 018 751

Copie anonyme - n°anonymat : 367901

Emplacement QR Code

Code épreuve : 297 | Nombre de pages : 34 | Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques Approfondies EDHEC

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

D'où $f_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x \cdot x\ln(x) & \text{si } x \in]0,1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Une densité f_2 est par exemple $f_2 : x \mapsto \begin{cases} -\ln(x) & \text{si } x \in]0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

5. a. Soit $n \in \mathbb{N}$

* $x \mapsto x^n \ln(x) \in \mathcal{C}^0(]0,1])$
* $x^n \ln(x) \underset{x \to 0}{=} o\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)$ (Croissance comparée)

or $\forall x > 0 \quad x^{-\frac{1}{2}} > 0$

et $\int_0^{1/2} x^{-\frac{1}{2}} dx$ converge donc par comparaison $\int_0^{1/2} x^n \ln(x) dx$ converge

D'où $\int_0^1 x^n \ln(x) dx$ converge

$\int_0^1 x^n \ln(x)\, dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \ln(x)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^n}{n+1} dx$ par Intégration par parties car tout est $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1]$ et on fait tendre vers 0 ensuite.

$= 0 - 0 - \int_0^1 \frac{x^n}{n+1} dx$

$= -\frac{1}{(n+1)^2}$.

prepaindex.fr

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Soit $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 x^n \ln(x)\,dx = \frac{-1}{(n+1)^2}$

5.b. $E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_Z(x)\,dx$

$= -\int_0^1 x \ln(x)\,dx$

$E(Z) = \frac{1}{4}$

$V(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2$ (Koenig-Huygens)

$= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx - \frac{1}{16}$ (Transfert)

$= -\int_0^1 x^2 \ln(x)\,dx - \frac{1}{16}$

$= -\left(-\frac{1}{9}\right) - \frac{1}{16}$

$= \frac{1}{9} - \frac{1}{16}$

$V(Z) = \frac{7}{9 \cdot 16}$

prepaindex.fr

Exercice 2 :

1. Montrons par récurrence que P_n : "u_n et v_n sont bien définis $\begin{cases} u_n \in]0,1] \\ v_n > 0 \end{cases}$" est vraie pour tout $n \geq 2$

i) $n=2$ $u_2 = \sqrt{\frac{1+u_1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{2}} = 1 > 0$ et $u_2 \leq 1$ et $v_2 = \frac{v_1}{u_2} = \frac{2}{\sqrt{\frac{2}{2}}} = 2\sqrt{2} > 0$ P_2 vraie

ii) Soit $n \geq 2$ tel que P_n

$u_n > 0$ donc $\frac{1+u_n}{2} > 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}}$ est défini et strictement positif

$u_n \leq 1$ donc $u_{n+1} \leq \frac{1+1}{2} = 1$

$v_{n+1} = \frac{v_n}{u_{n+1}}$ est donc également défini. P_{n+1} vraie

Selon le principe de récurrence, (u_n) et (v_n) sont parfaitement définies

2. def suite_v(n):
    u = 0
    v = 2
    for k in range(2, n+1):
        u = np.sqrt((1+u)/2)
        v = v/u
    return v

3.a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$u_n \in [0,1]$ selon la question 1.

~~Donc~~

~~De plus cos est f.~~

Cos est dérivable et continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

$\forall t \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\cos'(t) = -\sin(t) < 0$ et $\cos'(0) = 0$

Donc cos est décroissante strictement sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

Donc selon le théorème de la bijection, cos réalise

prepaindex.fr

une bijection de $[0, \frac{\pi}{2}[$ dans $[\cos(\frac{\pi}{2}), \cos(0)] = [0, 1]$

or $u_n \in [0, 1[$

Donc $\exists!\ \alpha_n \in [0, \frac{\pi}{2}]$ tel que $u_n = \cos(\alpha_n)$

Or on a donc défini une unique suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ dont les éléments sont dans $[0, \frac{\pi}{2}[$ et telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\cos(\alpha_n) = u_n$

3.b. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, ~~une arccos(...)~~

$$u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}}$$

$$\cos(\alpha_{n+1}) = \sqrt{\frac{1+\cos(\alpha_n)}{2}}$$

$$\cos(\alpha_{n+1})^2 = \frac{1+\cos(\alpha_n)}{2}$$

$$2\cos(\alpha_{n+1})^2 - 1 = \cos(\alpha_n)$$

$$\cos(2\alpha_{n+1}) = \cos(\alpha_n)$$

$$2\alpha_{n+1} = \alpha_n \quad \text{par bijectivité de cos sur } [-, \tfrac{\pi}{2}]$$

$$\alpha_{n+1} = \frac{\alpha_n}{2}$$

Or $\cos(\alpha_1) = u_1 = 0$

Donc $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$

Donc $\alpha_n = \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{2^{n-1}}$ (suite géométrique)

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\alpha_n = \frac{\pi}{2^n}$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*$, ~~$u_n = \cos(\frac{\pi}{2^n})$~~

3.c. $v_0 = 2 = 2^1 \sin(\frac{\pi}{2^1})$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $v_n = 2^n \sin(\frac{\pi}{2^n})$

prepaindex.fr

IMPRIMERIE NATIONALE – 2023-12-PF 018 751

Copie anonyme - n°anonymat : 367901

Emplacement QR Code

Code épreuve : 2 97 | **Nombre de pages :** 34 | **Session :** 2026

Épreuve de : Mathématiques Approfondies EDHEC

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

3.c

$$v_{n+1} = \frac{v_n}{u_{n+1}} = \frac{2^n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}{\cos(u_{n+1})}$$

$$= \frac{2^n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}$$

$$= \frac{2^n \sin\left(2\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}$$

$$= 2^{n+1} \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$$

$$= 2^{n+1} \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$$

Une récurrence montre donc que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = 2^n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$

$\lim_{n \to +\infty} \frac{\pi}{2^n} = 0$

Donc $v_n \underset{n \to +\infty}{=} 2^n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$

$$\underset{n \to +\infty}{=} 2^n \left(\frac{\pi}{2^n} - \frac{\pi^3}{2^{3n} \times 6} + o\left(\frac{\pi^3}{2^{3n}}\right)\right)$$

$$\underset{n \to +\infty}{=} \pi - \frac{\pi^3}{}$$

prepaindex.fr

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$\sin(x) \underset{x \to 0}{\sim} x$

Donc $\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2^n}$

$2^n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \pi$

Donc $\lim_{n \to +\infty} v_n = \pi$

4. $v_n \underset{n \to +\infty}{=} 2^n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$

$\underset{n \to +\infty}{=} 2^n \left(\frac{\pi}{2^n} - \frac{\pi^3}{2^{3n} \times 6} + \frac{\pi^5}{2^{5n} \times 120} + o\left(\frac{\pi^5}{2^{5n}}\right) \right)$

$\underset{n \to +\infty}{=} \pi - \frac{\pi^3}{6} \times \frac{1}{2^{2n}} + \frac{\pi^5}{120} \times \frac{1}{2^{4n}} + o\left(\frac{1}{2^{4n}}\right)$

$v_n \underset{n \to +\infty}{=} \pi + \frac{\left(-\frac{\pi^3}{6}\right)}{4^n} + \frac{\frac{\pi^5}{120}}{4^{2n}} + o\left(\frac{1}{4^{2n}}\right)$

5. a. def suite_w(n)

return (4 * suite_v(n+1) - suite_v(n)) / 3

5 b. $\lim_{n \to +\infty} v_n = \pi$ $\lim_{n \to +\infty} v_{n+1} = \pi$

$\lim_{n \to +\infty} w_n = \frac{4\pi - \pi}{3} = \pi$

$w_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \pi$

prepaindex.fr

$$w_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{4v_{n+1} - v_n}{3}$$

$$\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{3}\left(4\left(\pi - \frac{\pi^3}{6}\times\frac{1}{4^{n+1}} + \frac{\pi^5}{120}\times\frac{1}{4^{2n+2}} + o\left(\frac{1}{4^{2n+2}}\right)\right) - \left(\pi - \frac{\pi^3}{6}\times\frac{1}{4^n} + \frac{\pi^5}{120}\times\frac{1}{4^{2n}} + o\left(\frac{1}{4^{2n}}\right)\right)\right)$$

$$\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{3}\left(3\pi - \frac{\pi^3}{6}\times\frac{1}{4^n} + \frac{\pi^5}{120}\times\frac{1}{4^{2n+1}} + o\left(\frac{1}{4^{2n+1}}\right) + \frac{\pi^3}{6}\times\frac{1}{4^n} - \frac{\pi^5}{120}\times\frac{1}{4^{2n}} + o\left(\frac{1}{4^{2n}}\right)\right)$$

$$\underset{n\to+\infty}{=} \pi + \frac{1}{3}\frac{\pi^5}{120}\left(\frac{1}{4} - 1\right)\times\frac{1}{4^{2n}} + o\left(\frac{1}{4^{2n}}\right)$$

$$w_n \underset{n\to+\infty}{=} \pi - \frac{\pi^5}{4\times 120}\times\frac{1}{4^{2n}} + o\left(\frac{1}{4^{2n}}\right)$$

$$w_n \underset{n\to+\infty}{=} \pi - \frac{\pi^5}{480\times 4^{2n}} + o\left(\frac{1}{4^{2n}}\right)$$

$$\frac{w_n - \pi}{v_n - \pi} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{-\frac{\pi^5}{480\times 4^{2n}} + o\left(\frac{1}{4^{2n}}\right)}{-\frac{\pi^3}{6}\times\frac{1}{4^n} + \frac{\pi^5}{120}\frac{1}{4^{2n}} + o\left(\frac{1}{4^{2n}}\right)}$$

$$\underset{n\to+\infty}{=} \frac{-\frac{\pi^5}{480\times 4^{2n}} + o\left(\frac{1}{4^{2n}}\right)}{-\frac{\pi^3}{6}\times\frac{1}{4^n} + o\left(\frac{1}{4^n}\right)}$$

$$\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-\frac{\pi^5}{480\times 4^{2n}}}{-\frac{\pi^3}{6}\times\frac{1}{4^n}}$$

$$\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi^2\times 6}{480\times 4^n}$$

$$\frac{w_n - \pi}{v_n - \pi} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{80\times 4^n}$$

---

prepaindex.fr

d. $\frac{w_n - \pi}{v_n - \pi}$ tend très rapidement vers 0

Donc $w_n - \pi \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n - \pi)$

or $v_n - \pi$ tend vers 0

Donc c'est la plus efficace pour approcher 0

6. Si on pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $y_n = \frac{x_{n+1} - q x_n}{1-q}$ on a :

$y_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{a+bq^{n+1}+cr^{n+1}+o(r^{n+1}) - aq - bq^{n+1} - cqr^n + o(r^n)}{1-q}$

$\underset{n\to+\infty}{=} \frac{a(1-q) + c(r-q)r^n + o(r^n)}{1-q}$

$\underset{n\to+\infty}{=} q + \frac{c(r-q)}{1-q} r^n + o(r^n)$

$y_n \underset{n\to+\infty}{=} a + d r^n + o(r^n)$ avec $d = \frac{c(r-q)}{1-q}$

6.b. $q > r > 0$

Donc $0 < \frac{r}{q} < 1$

Ainsi $\lim_{n\to+\infty} \frac{r^n}{q^n} = 0$

Donc $r^n = o(q^n)$

D'où $x_n \underset{n\to+\infty}{=} a + bq^n + o(q^n)$

prepaindex.fr

IMPRIMERIE NATIONALE – 2023-12-PF 018 751

Copie anonyme - n°anonymat : 367901

Emplacement QR Code

Code épreuve : 297 | Nombre de pages : 34 | Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques Approfondies EDHEC

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

6. c. $\frac{y_n - a}{z_n - a} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{dr^n + o(r^n)}{bq^n + o(q^n)}$

$\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{dr^n}{bq^n}$

$\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Donc (y_n) tend vers a plus vite que (z_n)

Exercice 3 :

Partie 1

1. $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $x_k \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 0, k \rrbracket)$

1.b. Soit $k \in \mathbb{N}^*$

x_k possède une espérance et une variance et

$E(x_k) = \frac{k}{2}$

$V(x_k) = \frac{k(k+2)}{12}$

prepaindex.fr

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

2.a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$[Y=n] = \left(\bigcap_{k=1}^{n-1} [X_k \neq 0]\right) \cap [X_n = 0]$$

PS : si $n=1$, on considère que $\bigcap_{k=1}^{n-1} [X_k \neq 0] = \Omega$

2.b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$P(Y=n) = P\left(\bigcap_{k=1}^{n-1} [X_k \neq 0] \cap [X_n = 0]\right)$$

$$= \left(\prod_{k=1}^{n-1} P(X_k \neq 0)\right) \times P(X_n = 0)$$ par mutuelle indépendance

$$= \left(\prod_{k=1}^{n-1} 1 - P(X_k = 0)\right) P(X_n = 0)$$

$$= \frac{1}{n+1} \prod_{k=1}^{n-1} 1 - \frac{1}{k+1}$$

$$= \frac{1}{n+1} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{k}{k+1}$$

$$= \frac{1}{n+1} \frac{1}{n}$$ par télescopage

$$= \frac{n+1-n}{n(n+1)}$$

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad P(Y=n) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

prepaindex.fr

2.a Soit $N \geq 1$

$$\sum_{n=1}^{N} p(Y=n) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{N+1}$$

Donc $\sum p(Y=n)$ converge

~~et $\lim_{n \to +\infty} p(Y=n)$~~

et $\sum_{n=1}^{+\infty} p(Y=n) = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{N+1}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} p(Y=n) = 1$$

or $\sum_{n=0}^{+\infty} p(Y=n) = 1$ (Système complet d'événement associé à Y)

Donc $p(Y=0) = 0$

2.d.

Y admet une espérance $\Leftrightarrow \sum_{n \geq 0} n\,p(Y=n)$ converge (absolument)

$\Leftrightarrow \sum_{n \geq 1} n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ converge (absolument)

$\Leftrightarrow \sum_{n \geq 1} n \times \frac{1}{n(n+1)}$ converge (absolument)

$\Leftrightarrow \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n+1}$ converge (absolument)

or $\sum \frac{1}{n+1}$ diverge (série harmonique quasi)

Donc Y n'admet pas d'espérance

prepaindex.fr

Partie 2 :

3. def var_Z(n):
    U = rd.randint(n)
    Z = rd.geometric(1 - U/n)
    return Z

4.a. Soit $i \in \mathbb{N}^*$

$$P(Z_n = i) = \sum_{k=0}^{n-1} P(U_n = k) P_{(U_n = k)}(Z_n = i)$$ (Formule des probabilités totales)

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \times \left(1 - \frac{k}{n}\right)\left(\frac{k}{n}\right)^{i-1}$$

$$P(Z_n = i) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^{i-1} - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^{i}, \forall i \in \mathbb{N}^*$$

4.b. Soit $i \in \mathbb{N}^*$ $\left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^{i-1}\right)_{n \geq 1}$ et $\left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^{i}\right)_{n \geq 1}$ sont des suites de sommes de Riemann à pas constant de respectivement $x \mapsto x^{i-1}$ et $x \mapsto x^i$ sur $[0,1]$

Ainsi, les fonctions étant continues sur $[0,1]$, on a

$$\lim_{n \to +\infty} P(Z_n = i) = \int_0^1 x^{i-1} dx - \int_0^1 x^i dx$$

$$= \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}$$

$$\lim_{n \to +\infty} P(Z_n = i) = P(Y = i)$$

4.c $\lim_{n \to +\infty} P(Z_n = 0) = 0 = P(Y = 0)$

Donc $Z_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} Y$

prepaindex.fr

IMPRIMERIE NATIONALE – 2023-12-PF 018751

Copie anonyme - n°anonymat : 367901

Emplacement QR Code

Code épreuve : 297 | Nombre de pages : 34 | Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques Approfondies EDHEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

5. Soit $n \geq 1$

$\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, la loi de Z_n conditionnellement à $(U_n = k)$ est une géométrique $1 - \frac{k}{n}$

Donc $E(Z_n \mid U_n = k)$ existe

$((U_n = k))_{k \in [\![0, n-1]\!]}$ est finie donc selon la formule de l'espérance totale

$$E(Z_n) = \sum_{k=0}^{n-1} p(U_n = k)\, E(Z_n \mid U_n = k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \frac{1}{1 - \frac{k}{n}}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n-k}$$

$$E(Z_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$ par changement d'indice

prepaindex.fr

6. Soit $k \in \mathbb{N}^*$

$t \mapsto \frac{1}{t}$ est décroissante et continue sur $[k, k+1]$

Donc $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,dt \leq \frac{1}{k}$

Donc $\frac{1}{k+1} \leq [\ln(t)]_k^{k+1} \leq \frac{1}{k}$

D'où $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$

6.b. Soit $n \geq 2$

~~$\forall k \in [\![1, n]\!]$~~

~~$\ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$~~ . . . . . .

~~$\sum_{k=1}^{n-1} \ln(k+1) - \ln(k) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$~~ .

$\ln(n \ldots \ldots \leq E(2n)$

$\ln(n(1+\frac{1}{n})) \leq E(2n)$

$\ln(n) + \ln(1+\frac{1}{n}) \leq E(2n)$

Soit $n \geq 2$

$\forall k \in [\![1, n-1]\!], \quad \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$

$\sum_{k=1}^{n-1} \ln(k+1) - \ln(k) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$

prepaindex.fr

$\ln(n) - \underbrace{\ln(1)}_{=0} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$ (Télescopage

$\ln(n) + \frac{1}{n} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

$\ln(n) + \frac{1}{n} \leq E(2n)$

$\forall k \in [\![2, n]\!] \quad \frac{1}{k} \leq \ln(k) - \ln(k-1)$

$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \sum_{k=2}^{n} \ln(k) - \ln(k-1)$

$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln(n) - \ln(1)$

$E(2n) \leq \ln(n) + 1$

D'où $\forall n \geq 2 \quad \ln(n) + \frac{1}{n} \leq E(2n) \leq \ln(n) + 1$

C.C. $\forall n \geq 2$

$$\frac{\ln(n) + \frac{1}{n}}{\ln(n)} \leq \frac{E(2n)}{\ln(n)} \leq \frac{\ln(n) + 1}{\ln(n)}$$

$\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(n)+1}{\ln(n)} = 1$

$\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(n) + \frac{1}{n}}{\ln(n)} = 1$

Donc par encadrement $\lim_{n \to +\infty} \frac{E(2n)}{\ln(n)} = 1$

$E(2n) \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln(n)$

prepaindex.fr

Problème :

Partie 1 :

Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$

1. Supposons $A \in S_n^+(\mathbb{R})$

A est diagonalisable (théorème spectral)

Soit $\lambda \in Sp(A)$

1. a. $\lambda \in Sp(A)$

Donc $\exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{n,1}\} \;/\; AX = \lambda X$

ie ${}^tXAX = {}^tX\lambda X = \lambda\, {}^tXX$

ie $\lambda = \dfrac{{}^tXAX}{{}^tXX}$ car ${}^tXX = \|X\|^2 \neq 0$ car $X \neq 0$

1. b. $\lambda = \dfrac{{}^tXAX}{\|X\|^2}$

or ${}^tXAX \geq 0$ car $A \in S_n(\mathbb{R})$

$\|X\|^2 > 0$

D'où $\lambda \geq 0$

Supposons que $Sp(A) \subset \mathbb{R}_+$

2. a. A est symétrique réelle donc diagonalisable dans une base orthonormée, c'est à dire qu'il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et D une matrice diagonale telle que (selon le théorème spectral)

$A = PD\,{}^tP$

prepaindex.fr

IMPRIMERIE NATIONALE – 2023-12-PF 018 751

Copie anonyme - n°anonymat : 367901

Emplacement QR Code

Code épreuve : 297 | Nombre de pages : 34 | Session : 2016

Épreuve de : Mathématiques Approfondies EDHEC

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

2.b. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $Y = {}^tPX$

$${}^tXAX = {}^tXPD{}^tPX$$
$$= {}^t(PX)D({}^tPX)$$
$${}^tXAX = {}^tYDY$$

2.c. On a $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ avec $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Donc ${}^tXAX = {}^tY \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} Y$

$$= {}^tY \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1}\sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n}\sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} Y$$

$$= {}^tY \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}}_{\text{noté } D'} \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} Y$$

$$= {}^tYD'D'Y$$

$$= {}^t(D'Y)D'Y$$

$$= \|D'Y\|^2$$

$$\geq 0$$

D'où $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXAX \geq 0$

prepaindex.fr

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

3. Ainsi $\forall A \in S_n(\mathbb{R})$:

$$A \in S_n^+(\mathbb{R}) \iff Sp(A) \subset \mathbb{R}_+$$

Partie 2

Soit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$ et $A = P D {}^tP$

4.a. $A \in S_n^+(\mathbb{R})$ donc $Sp(A) \subset \mathbb{R}_+$

Donc $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\lambda_i \geq 0$ et $\sqrt{\lambda_i}$ existe

Donc $\Delta = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$ est définie

4.b. Soit $B = P \Delta {}^tP$

${}^tB = {}^t(P \Delta {}^tP) = P {}^t\Delta {}^tP = P \Delta {}^tP$

B est diagonalisable et ses valeurs propres sont $\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}$ toutes positives

~~Donc $B \in S_n^+(\mathbb{R})$~~

Donc $B \in S_n^+(\mathbb{R})$

$B^2 = P \Delta {}^tP \, P \Delta {}^tP$

$= P \Delta \Delta {}^tP$

$= P \Delta^2 {}^tP$

$= P D {}^tP$

$B^2 = A$

prepaindex.fr

5. On note $Sp(A) = \{\mu_1, \dots, \mu_p\}$ (les p valeurs propres distinctes)

Soit $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$

On pose $L_i : x \mapsto \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{p} \frac{x - \mu_k}{\mu_i - \mu_k}$

$$L_i(\mu_i) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{p} \frac{\mu_i - \mu_k}{\mu_i - \mu_k}$$

$$= \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{p} 1$$

$$L_i(\mu_i) = 1$$

Si $i \neq j$:

$$L_i(\mu_j) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{p} \frac{\mu_j - \mu_k}{\mu_i - \mu_k}$$

$$= \frac{\mu_j - \mu_j}{\mu_i - \mu_j} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i \\ k \neq j}}^{p} \frac{\mu_j - \mu_k}{\mu_i - \mu_k}$$

$$L_i(\mu_j) = 0$$

6. Soit $S = \sum_{i=1}^{p} \sqrt{\mu_i}\, L_i$

6.a. Soit $k \in [\![1,p]\!]$

$$S(\mu_k) = \sum_{i=1}^{p} \sqrt{\mu_k}\, L_i(\mu_k)$$

$$= \sqrt{\mu_k} \times 1$$

$$S(\mu_k) = \sqrt{\mu_k} \quad \forall k \in [\![1,p]\!]$$

prepaindex.fr

Donc comme $\forall i \in [\![1, n]\!]$. $\lambda_i \in \{\mu_1, \dots, \mu_p\}$

$S(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}$ $\forall i \in [\![1, n]\!]$

6.a. si $k=0$ $A^0 = I = P^{-1}P$

$= PD^0P^{-1}P$

si soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $A^k = PD^kP^{-1}$

$A^{k+1} = A A^k$

$= A\, PD^kPPD^kP^{-1}$

$= PDD^kP^{-1}$

$A^{k+1} = PD^{k+1}P^{-1}$

Par récurrence, $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kP^{-1}$

6.c. $\forall i \in [\![1, p]\!]$ $L_i \in \mathbb{R}_p[X]$

Donc $S \in \mathbb{R}_p[X]$

D'où $S(X) = \sum_{i=0}^{p} a_i X^i$ avec $(a_0, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$

Ainsi $S(A) = \sum_{i=0}^{p} a_i A^i$

$= \sum_{i=0}^{p} a_i PD^iP^{-1}$

$= P\left(\sum_{i=0}^{p} a_i D^i\right)P^{-1}$

$S(A) = PS(D)P^{-1}$

$S(A) = P\, S(\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots \lambda_n))P^{-1}$

prepaindex.fr

IMPRIMERIE NATIONALE – 2023-12-PF 018 751

Copie anonyme - n°anonymat : 367901

Emplacement QR Code

Code épreuve : 297 | Nombre de pages : 34 | Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques approfondies ESMOC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Or $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ donc $S(\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)) = \mathrm{diag}(S(\lambda_1), \dots, S(\lambda_n))$

D'où

$$S(A) = P\,\mathrm{diag}(S(\lambda_1), \dots, S(\lambda_n))\,{}^tP$$
$$= P\,\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})\,{}^tP$$
$$= P\Delta\,{}^tP$$

$S(A) = B$

Partie 3

Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$

Supposons qu'il existe $C \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $C^2 = A$

7.a. $AC = C^2C = CC^2 = CA$

7.b. Soit $k \in \mathbb{N}$

$$A^kC = (C^2)^kC = C^{2k}C = CC^{2k} = C(C^2)^k = CA^k$$

$A^kC = CA^k \quad \forall k \in \mathbb{N}$

prepaindex.fr

$B = S(A)$

$= \sum_{i=0}^{p} a_i A^i$

$BC = \left(\sum_{i=0}^{p} a_i A^i\right) C$

$= \sum_{i=0}^{p} a_i A^i C$

$= \sum_{i=0}^{p} a_i C A^i$

$= C \left(\sum_{i=0}^{p} a_i A^i\right)$

$\underline{BC = CB}$

8. a. $BC = CB$

Dans $Mat_{Bc}(b)\, Mat_{Bc}(c) = Mat_{Bc}(c)\, Mat_{Bc}(B)$ avec Bc la base canonique de $\mathbb{R}^n$

$Mat_{Bc}(boc) = Mat_{Bc}(cob)$

$\underline{boc = cob}$

8. b. ~~Soit $x \in E$~~

Soit $i \in [\![1, p]\!]$. Soit $x \in E$.

$(b - \sqrt{\mu_i}\, Id)(c(x)) = b(c(x)) - \sqrt{\mu_i}\, Id(c(x))$

$= c(b(x)) - c(\sqrt{\mu_i}\, Id(x))$

$= c((b - \sqrt{\mu_i}\, Id)(x))$

$= c(0)$

$= 0$

prepaindex.fr

Donc $c(x) \in \bar{E}_i$

Donc $\bar{E}_i$ est stable par c

8.c. Soit c_i l'endomorphisme induit par c sur $\bar{E}_i$.

Soit $(x,y) \in \bar{E}_i^2$

$$\begin{aligned} \langle x, c_i(y) \rangle &= \langle x, c(y) \rangle \\ &= \langle c(x), y \rangle \quad \text{car } c \text{ est symétrique} \\ &= \langle c_i(x), y \rangle \quad \text{car } x \in \bar{E}_i \end{aligned}$$

Donc c_i est symétrique

8.d. c_i est symétrique donc diagonalisable dans une base orthonormée formée de vecteurs propres (théorème spectral) notée $\mathcal{B}_i$

$\mathcal{B}_i$ est formée de vecteur propre de c_i mais aussi de $\mathcal{B}$.b car $\mathcal{B}_i \subset \bar{E}_i$

8.e. Soit $\mathcal{B}$ la concaténation des bases $(\mathcal{B}_i \mid i \in [\![1,p]\!])$

Comme $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{i=1}^{p} \bar{E}_i$, $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de b et c.

Dans dans $\mathcal{B}$, les matrices de b et c sont diagonales

prepamdex.fr

8 f.

On note $Sp(C) = \{\lambda_{c_1}, \dots, \lambda_{c_n}\}$ (non nécessairement distincts)

et $Sp(B)$

on note $Mat_B(b) = \begin{pmatrix} \lambda_{b_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{b_n} \end{pmatrix}$ et $Mat_B(c) = \begin{pmatrix} \lambda_{c_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{c_n} \end{pmatrix}$

Avec $\lambda_{b_1}, \dots, \lambda_{b_n}$ et $\lambda_{c_1}, \dots, \lambda_{c_n}$ des valeurs propres de b et c

$C = P_{B_c B}\, Mat_B(c)\, P_{B_c B}^{-1}$ $\quad B = P_{B_c B}\, Mat_B(b)\, P_{B_c B}^{-1}$

$P_{B_c B} \begin{pmatrix} \lambda_{c_1}^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{c_n}^2 \end{pmatrix} P_{B_c B}^{-1} = C^2$

$= A$

$= B^2$

$= P_{B_c B} \begin{pmatrix} \lambda_{b_1}^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{b_n}^2 \end{pmatrix} P_{B_c B}^{-1}$

Ainsi : $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \lambda_{c_i}^2 = \lambda_{b_i}^2$

$\lambda_{c_i} = \lambda_{b_i}$ car λ_{c_i} et λ_{b_i} sont positifs

D'où $b = c$

D'où $\underline{B = C}$

prepaindex.fr

IMPRIMERIE NATIONALE – 2025-12-1003094

Copie anonyme - n°anonymat : 367901

Emplacement QR Code

Code épreuve : 297 | Nombre de pages : 34 | Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques Approfondies EDHEC

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Partie 4 :

91 Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. A est diagonalisable

Supposons qu'elle est définie positive :

Soit $\lambda \in Sp(A)$

$\exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{n,1}\}$, $AX = \lambda X$

$${}^tXAX = {}^tX\lambda X$$

$${}^tXAX = \lambda \|X\|^2$$

or $\|X\|^2 > 0$ car $X \neq 0_{n,1}$ et ${}^tXAX > 0$

Donc $\lambda > 0$

Donc $Sp(A) \subset \mathbb{R}_+^*$

Supposons que $Sp(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subset \mathbb{R}_+^*$

Alors $A = PD{}^tP$ (écriture diagonale) $\quad D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nulle, $Y = {}^tPX$

${}^tXAX = {}^tYDY$

$= {}^tYD'^2Y$ avec $D' = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$

$= \|D'Y\|^2$

> 0 car $Y \neq 0_{n,1}$ et D' inversible car $\forall i, \sqrt{\lambda_i} > 0$

prepaindex.fr

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

D'où $A \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \iff Sp(A) \subset \mathbb{R}_+^*$

10. Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$
Soit $N = A - I_n$

10.a. ${}^tN = {}^t(A - I_n)$
$= {}^tA - {}^tI_n$
$= A - I_n$ $\quad A \in S_n(\mathbb{R})$
$= N$

Donc $N \in S_n(\mathbb{R})$

Supposons $N \in S_n^+(\mathbb{R})$

10.b. $\lambda \in Sp(A) \iff A - \lambda I_n$ non inversible
$\iff N + I_n - \lambda I_n$ non inversible
$\iff N - (\lambda - 1) I_n$ non inversible
$\iff \lambda - 1 \in Sp(N)$
$\Rightarrow \lambda - 1 \geq 0$
$\Rightarrow \lambda \geq 1$

D'où $Sp(A) \subset [1, +\infty[$

Donc $0 \notin Sp(A)$
Donc A est inversible

prepaindex.fr

$${}^t(I_n - A^{-1}) = {}^tI_n - {}^t(A^{-1})$$
$$= I_n - ({}^tA)^{-1}$$
$$= I_n - A^{-1}$$

Donc $I_n - A^{-1} \in S_n(\mathbb{R})$

~~$A \in S_n$!!~~
A est symétrique donc diagonalisable.

Donc $A = PDP^{-1}$ avec $P \in O_n$ et $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

avec $Sp(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subset [1, +\infty[$

Ainsi $A^{-1} = P D^{-1} P^{-1}$

$D^{-1} = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}\right)$

Donc A^{-1} est diagonalisable, de spectre $\left\{\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}\right\}$

et comme ~~$\forall i$~~ $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i \geq 1$
$\forall i \in [\![1, n]\!]$, $0 \leq \frac{1}{\lambda_i} \leq 1$

$Sp(A^{-1}) \subset]0, 1]$

Donc $\lambda \in Sp(I_n - A^{-1}) \iff I_n - A^{-1} - \lambda I_n$ non inversible
$\iff -A^{-1} - (\lambda - 1) I_n$ non inversible
$\iff A^{-1} - (1 - \lambda) I_n$ non inversible
$\Rightarrow 0 \leq 1 - \lambda \leq 1$
$\Rightarrow 1 \geq \lambda \geq 0$

Donc $Sp(I_n - A^{-1}) \subset \mathbb{R}_+$

Donc $I_n - A^{-1}$ est positive

prepaindex.fr

11. Soit $(S_1, S_2) \in S_n(\mathbb{R})^2$ avec $S_1 \in S_n^{++}(\mathbb{R})$

On admet que $S_2 - S_1$ est symétrique
Supposons $S_2 - S_1$ positive.

11.a. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{n,1}\}$

$${}^tX S_2 X = {}^tX (S_1 + S_2 - S_1) X$$
$$= \underbrace{{}^tX S_1 X}_{>0} + \underbrace{{}^tX (S_2 - S_1) X}_{\geq 0}$$
$$> 0$$

Donc $S_2 \in S_n^{++}(\mathbb{R})$

11.b. On a compris que la racine carrée de S_1 aura pour valeurs propres les racines carrées des valeurs propres de S_1
Or $0 \notin Sp(S_1)$ car S_1 est définie positive
Donc $0 \notin Sp(S_1^{1/2})$

Donc $S_1^{1/2}$ est inversible

$$S_1^{-1/2}(S_2 - S_1) S_1^{-1/2} = S_1^{-1/2} S_2 S_1^{-1/2} - S_1^{-1/2} S_1 S_1^{-1/2}$$
$$= S_1^{-1/2} S_2 S_1^{-1/2} - S_1^{-1/2} S_1^{1/2} S_1^{1/2} S_1^{-1/2}$$

$$S_1^{-1/2}(S_2 - S_1) S_1^{-1/2} = S_1^{-1/2} S_2 S_1^{-1/2} - I_n$$

11.c. Soit $L = S_1^{-1/2} S_2 S_1^{-1/2}$

$${}^tL = {}^t(S_1^{-1/2} S_2 S_1^{-1/2})$$
$$= {}^tS_1^{-1/2} {}^tS_2 {}^tS_1^{-1/2}$$
$$= S_1^{-1/2} S_2 S_1^{-1/2} = L$$

prepaindex.fr

IMPRIMERIE NATIONALE – 2025-12-1003094

Copie anonyme - n°anonymat : 367901

Emplacement QR Code

Code épreuve : 297 | Nombre de pages : 34 | Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques Approfondies EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

11.c. Donc $L \in S_n(\mathbb{R})$

$${}^t(L - I_n) = {}^tL - {}^tI_n$$
$$= L - I_n$$

$L - I_n \in S_n(\mathbb{R})$

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

$${}^tX(L - I_n)X = {}^tX S_1^{-1/2}(S_2 - S_1) S_1^{-1/2} X$$
$$= {}^t(S_1^{-1/2}X)(S_2 - S_1)(S_1^{-1/2}X)$$

$(S_1^{-1/2}X) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

≥ 0 car $S_2 - S_1$ est positive

Donc $L - I_n \in S_n^+(\mathbb{R})$

11.d. Selon la question 10 :

$L - I_n$ est positive donc L est inversible

et $I_n - L^{-1}$ est positive

prepaindex.fr

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

11.e.

$${}^t X S_1^{1/2}(S_1^{-1} - S_2^{-1}) S_1^{1/2} X = {}^t X S_1^{1/2} S_1^{-1} S_1^{1/2} X - {}^t X S_1^{1/2} S_2^{-1} S_1^{1/2} X$$

$$S_1^{1/2}(S_1^{-1} - S_2^{-1}) S_1^{1/2} = S_1^{1/2} S_1^{-1} S_1^{1/2} - S_1^{1/2} S_2^{-1} S_1^{1/2}$$
$$= I_n - L^{-1}$$

Donc $S_1^{1/2}(S_1^{-1} - S_2^{-1}) S_1^{1/2}$ est positive

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

$${}^t X S_1^{1/2}(S_1^{-1} - S_2^{-1}) S_1^{1/2} X$$
$$= {}^t(S_1^{1/2} X)(S_1^{-1} - S_2^{-1})(S_1^{1/2} X)$$
$$\geqslant 0$$ car $S_1^{1/2}(S_1^{-1} - S_2^{-1}) S_1^{1/2}$

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

$${}^t X (S_1^{-1} - S_2^{-1}) X = {}^t X S_1^{-1/2} S_1^{1/2}(S_1^{-1} - S_2^{-1}) S_1^{1/2} S_1^{-1/2} X$$
$$= {}^t(S_1^{-1/2} X) S_1^{1/2}(S_1^{-1} - S_2^{-1}) S_1^{1/2}(S_1^{-1/2} X)$$
$$\geqslant 0$$

car $S_1^{1/2}(S_1^{-1} - S_2^{-1}) S_1^{1/2}$ positive

Donc $S_1^{-1} - S_2^{-1}$ positive

FIN

prepaindex.fr

prepaindex.fr

prepaindex.fr

IMPRIMERIE NATIONALE – 2025-12-1003094