Copie anonyme - n°anonymat : 816636

E2-00112 816636 Mat Appli

Code épreuve : 296 | Nombre de pages : 31 | Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques appliquées

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Exercice II

Partie A

1) Soient $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et λ un réel.

$$tr(\lambda M + N) = tr\begin{pmatrix} \lambda a + a' & \lambda b + b' \\ \lambda c + c' & \lambda d + d' \end{pmatrix}$$

$$= \lambda a + a' + \lambda d + d'$$

$$= \lambda(a + d) + (a' + d')$$

$$= \lambda\, tr(M) + tr(N)$$

~~Comme $\lambda tr(M) + tr(N) \in \mathbb{R}$.~~

Donc : tr est linéaire

prepaindex.fr

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

(2) a. Soient M et N deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et λ un réel,

$$\varphi(\lambda M + N) = (\lambda \operatorname{tr}(M) + \operatorname{tr}(N))\underline{I} - (\lambda M + N)$$

$$= \lambda(\operatorname{tr}(M)I - M) + (\operatorname{tr}(N)I - N)$$

$$= \lambda\varphi(M) + \varphi(N).$$

Donc φ est linéaire

Comme $\operatorname{tr}(M) \in \mathbb{R}$, $\operatorname{tr}(M) I_2 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

La différence de deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est encore une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Donc φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

b. $\varphi(I) = 2I - I$ car $\operatorname{tr}(I) = 2$

$= I$

prepaindex.fr

On a bien $\varphi(I) = I$

c. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} tr(\varphi(M)) &= tr(tr(M)I - M) \\ &= tr((a+d)I - M) \\ &= tr\left(\begin{pmatrix} a+d & 0 \\ 0 & a+d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) \\ &= tr\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \\ &= tr(M) \end{aligned}$$

Donc $tr(\varphi(M)) = tr(M)$

③ a.

$$\begin{aligned} \varphi(E_1) &= tr(E_1)I - E_1 \\ &= I - E_1 \\ &= E_4 \end{aligned}$$

$$\varphi(E_2) = tr(E_2)I - E_2 = -E_2$$

prepaindex.fr

$f(\epsilon_3) = tr(\epsilon_3)\, I - \epsilon_3 = -\epsilon_3$

$f(\epsilon_4) = tr(\epsilon_4)\, I - \epsilon_4$

$= -\epsilon_1$

On obtient ainsi :

$f(\epsilon_1)\ f(\epsilon_2)\ f(\epsilon_3)\ f(\epsilon_4)$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \end{matrix}$$

b.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a $A^2 = I$ ce qui s'écrit $AA = I$

On en déduit que A est inversible, d'inverse $A^{-1} = A$.

prepaindex.fr

IMPRIMERIE NATIONALE – 2023-02-PF 018 751

Copie anonyme - n°anonymat : 816636

Emplacement QR Code

Code épreuve : 296 | Nombre de pages : 31 | Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques appliquées

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

c. De ce qui précède, on en déduit que $X^2 = 1$ est un polynôme annulateur de A.

$\Leftrightarrow X^2 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow X = 1$ ou $X = -1$

Donc $Sp(A) \subset \{-1, 1\}$

Pour $\lambda = -1$. Soit $X \in \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$

$-1 \in Sp(A) \Leftrightarrow (A + I)$ n'est pas inversible

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} \lambda & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

prepaindex.fr

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$-1 \in Sp(A) \Leftrightarrow \begin{cases} a = -d \\ b = b \\ c = c \\ d = d \end{cases}, (c,b,d) \in \mathbb{R}^3$

$\Leftrightarrow c\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, (c,b,d) \in \mathbb{R}^3$

Donc $E_{-1}(A) = Vect\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

Vérifions la liberté de la famille.

Soient $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$a\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Donc la famille est libre.

prepaindex.fr

Conclusion : $\left(\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$ est une base de $E_{-1}(A)$

Pour $\lambda = 1$ Soit $X = \begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}$

$1 \in Sp(A) \iff (A - I)$ n'est pas inversible.

$$\iff \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ \boxed{1} & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\iff \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ \boxed{1} & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\iff \begin{cases} a = d \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = d \end{cases}, \quad d \in \mathbb{R}$$

On en déduit que $E_1(A) = Vect\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$

Comme $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} \neq \vec{0}$, la famille est libre.

Conclusion : $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $E_1(A)$

prepandex.fr

Partie B

(4) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$$\varphi(M) = \text{tr}(M)\, I - M$$

$$= (a+d) I - M$$

$$= \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$M\varphi(M) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ad-bc & ba-ba \\ cd-dc & da-cb \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & da-cb \end{pmatrix}$$

$$= \det(M)\, I$$

D'où $M\varphi(M) = \det(M)\, I$

prepaindex.fr

IMPRIMERIE NATIONALE – 2023-02-PF 018 751

Copie anonyme - n°anonymat : 816636

Emplacement QR Code

Code épreuve : 256	Nombre de pages : 31	Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques appliquées

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

(5) a.

M est inversible $\iff$ rg(M) = 2

Comme $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,

M est de rang deux si et seulement si :

- M possède deux pivots non nuls
- M possède deux colonnes non proportionnelles

ce qui se traduit par : - a et d non nuls ou b et c non nuls
- $ad \neq bc$

donc : $ad - bc \neq 0$

On en déduit que M est inversible $\iff$ $\det(M) \neq 0$

prepaindex.fr

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$M\,\mathcal{C}(M) = \det(M)\,I$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\det(M)}\,M\,\mathcal{C}(M) = I$ si $\det(M) \neq 0$

Donc si et seulement si $\det(M) \neq 0$, M est inversible, d'inverse :

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)}\,\mathcal{C}(M)$$

b. Soient M et N deux matrices de $M_2(\mathbb{R})$ telles que $(M+N)$ est inversible. ~~On a par linéarité de $\mathcal{C}$:~~

$$(M+N)\,\mathcal{C}(M+N) = \det(M+N)\,I$$

Comme $M+N$ est inversible, $\det(M+N) \neq 0$.

Donc $(M+N)\frac{1}{\det(M+N)}\,\mathcal{C}(M+N) = I$

prepaindex.fr

On a donc

$$(M+N)^{-1} = \frac{\mathcal{C}(M+N)}{\det(M+N)}$$

$$= \frac{\mathcal{C}(M)}{\det(M+N)} + \frac{\mathcal{C}(N)}{\det(M+N)}$$ par linéarité de $\mathcal{C}$

$$= \frac{\det(M)\frac{1}{\det(M)}\mathcal{C}(M)}{\det(M+N)} + \frac{\det(N)\frac{1}{\det(N)}\mathcal{C}(N)}{\det(M+N)}$$

$$= \frac{\det(M)}{\det(M+N)} M^{-1} + \frac{\det(N)}{\det(M+N)} N^{-1}$$

On a donc

$$(M+N)^{-1} = \frac{\det(M)}{\det(M+N)} M^{-1} + \frac{\det(N)}{\det(M+N)} N^{-1}$$

Partie C

(6) a. $P_2(x) = xP_1(x) - P_0(x) = x^2$

prepaindex.fr

$P_3(x) = xP_2(x) - P_1(x) = x - 1$

b. Posons $P(n)$: " $\deg(P_n) = n-1$ ".

Montrons que $P(n)$ est vraie par récurrence $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

[I] pour $n=1$, $\deg(P_1) = 0$

donc $P(1)$ est vraie

[H] Supposons $P(n)$ vraie pour un n fixé, quelconque dans $\mathbb{N}^*$.

$\deg(P_n) = n-1$

donc $\deg(xP_n) = n$

donc $\deg(xP_n - P_{n-1}) = n$

donc $\deg(P_{n+1}) = n$

Donc $P(n)$ est héréditaire

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\deg(P_n) = n-1$

(7) a. D'après (4), on a :

$M\,C(M) = \det(M)\,I$

donc $M\,C(M) = I$ car $\det(M) = 1$

prepaindex.fr

IMPRIMERIE NATIONALE – 2023-02-PF 018 751

Code épreuve : 296 **Nombre de pages :** 31 **Session :** 2026

Épreuve de : Mathématiques appliquées

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

donc $M(\mathrm{tr}(M) I - M) = I$

donc $M\,\mathrm{tr}(M) - M^2 = I$

donc $M^2 = \mathrm{tr}(M)M - I$ CQFD

b. Posons $P(n)$: " $M^n = -a_{n-1} I + a_n M$ "

Montrons que $P(n)$ est vraie $\forall n \geq 1$ par récurrence.

[I] $n=1$, $M = -a_0 I + a_1 M$

$= -P_0(\mathrm{tr}(M)) I + P_1(\mathrm{tr}(M))M$

$= 0 I + (a+d) M$

Je n'aboutis pas

⑧ a.

```
def P(n, x):
    P0 = 0
    P1 = 1
    for k in range(1, n+1):
        temp = P1
        P1 = x*P1 - P0
        P0 = temp
    return(P0)
```

b.

```
def Puissance(n, M):
    a = P(n, x)
    b = P(n-1, x)
    Mn = -b * np.eye(n) + a*M
    return(Mn)
```

prepandex.fr

Exercice I

Partie A

① a. $\forall (x,y) \in \mathcal{D}$,

$$\partial_1 f(x,y) = 1 + \frac{y}{1+xy}$$

$$\partial_2 f(x,y) = \frac{x}{1+xy}$$

Donc $\forall (x,y) \in \mathcal{D}$, $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{y}{1+xy} \\ \frac{x}{1+xy} \end{pmatrix}$

b. On cherche à résoudre, $\forall (x,y) \in \mathcal{D}$,

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \frac{y}{1+xy} = 0 \\ \frac{x}{1+xy} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y+1+xy}{1+xy} = 0 \\ \frac{x}{1+xy} = 0 \end{cases}$$

prepaindex.fr

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y + 1 + xy = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad \text{car } 1 + xy > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = 0 \end{cases}$$

Conclusion : f admet un unique point critique $(0, -1)$ dans D

c. $\forall (x,y) \in D$, on a

$$\partial^2_{1,1} f(x,y) = -\frac{y^2}{(1+xy)^2}$$

$$\partial^2_{2,1} f(x,y) = \frac{1 + xy - yx}{(1+xy)^2}$$

$$\partial^2_{1,2} f(x,y) = \frac{1 + xy - yx}{(1+xy)^2}$$

$$\partial^2_{2,2} f(x,y) = -\frac{x^2}{(1+xy)^2}$$

prepaindex.fr

IMPRIMERIE NATIONALE – 2023-02-PF 018 751

Copie anonyme - n°anonymat : 816636

Emplacement QR Code

Code épreuve : 296 | Nombre de pages : 31 | Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques appliquées

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

On obtient donc au point $(0,-1)$:

$$\nabla^2 f(0,-1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A$$

Déterminons les valeurs propres de A. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\lambda \in Sp(A) \iff A - \lambda I$ n'est pas inversible

$$\iff \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff -\lambda(-1-\lambda) - 1 = 0$$

$$\iff \lambda^2 + \lambda - 1 = 0$$

On a $\Delta = 5$ donc $\lambda_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $\lambda_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

prepaindex.fr

① On, $\sqrt{5} > \sqrt{1}$ donc $\sqrt{5} > 1$

Les valeurs propres de A sont donc de signes opposés

Donc le point critique $(0,-1)$ est un point col

② Soit $k \in \mathbb{R}$, soit $(x,y) \in D$ et $x \neq 0$.

$$f(x,y) = k \iff x + \ln(1+xy) = k$$

$$\iff \ln(1+xy) = k - x$$

$$\iff 1 + xy = e^{k-x}$$

$$\iff xy = e^{k-x} - 1$$

$$\iff y = \frac{e^{k-x} - 1}{x}$$ CQFD.

prepaindex.fr

b.

$l_5 : M = [(np.exp(k*x) - 1) / x \text{ for } x \text{ in } X]$

La ligne apparaît pour k allant de $\frac{0,6}{5}$ à $\frac{7,6}{5}$.

Partie B

1) $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $e^{-x} - 1 > 0$

$\Leftrightarrow e^{-x} > 1$

$\Leftrightarrow -x > 0$

$\Leftrightarrow x < 0$

prepaindex.fr

④ On a $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$

donc $e^{-x} - 1 \underset{0}{\sim} -x$

donc $\dfrac{e^{-x} - 1}{x} \underset{0}{\sim} -1$

Donc $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = -1$.

g admet un prolongement continue en 0.

⑤

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{e^{-x} - 1}{x} - 1}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{e^{-x} - 1 - x}{x^2}$$

Je n'aboutis pas

⑥ a. $\forall x \in \mathbb{R}$, g est de classe $\mathcal{C}^2$ comme quotient de fonctions telles dont le dénominateur ne s'annule pas.

prepaindex.fr

IMPRIMERIE NATIONALE – 2023-02-PF 018 751

Copie anonyme - n°anonymat : 816636

Emplacement QR Code

Code épreuve : 296 | **Nombre de pages :** 31 | **Session :** 2026

Épreuve de : Mathématiques appliquées

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

$\forall x \in \mathbb{R}^*$, $g'(x) = \dfrac{-xe^{-x} - e^{-x} + 1}{x^2}$

$= \dfrac{-e^{-x}(x+1) + 1}{x^2}$

b. $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $g(x) \geq 0$

$\Leftrightarrow -e^{-x}(x+1) - 1 \geq 0$

$\Leftrightarrow e^{x} \geq x + 1$

La fonction $x \mapsto e^x$ est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^*$ et convexe sur l'intervalle. Donc e^x se situe au dessus de ses tangentes, en particulier en 0 donnée par $y_0 = x + 1$.

prepaindex.fr

Donc, $g'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$.

- $\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ donc $\lim_{x \to +\infty} e^{-x} - 1 = -1$

Par quotient, $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{e^{-x} - 1}{x} = 0$

$\lim_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$ donc $\lim_{x \to -\infty} e^{-x} + 1 = +\infty$

~~Par quotient, $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{e^{-x} + 1}{x} = +\infty$~~

La première analyse conduit à une forme indéterminée.

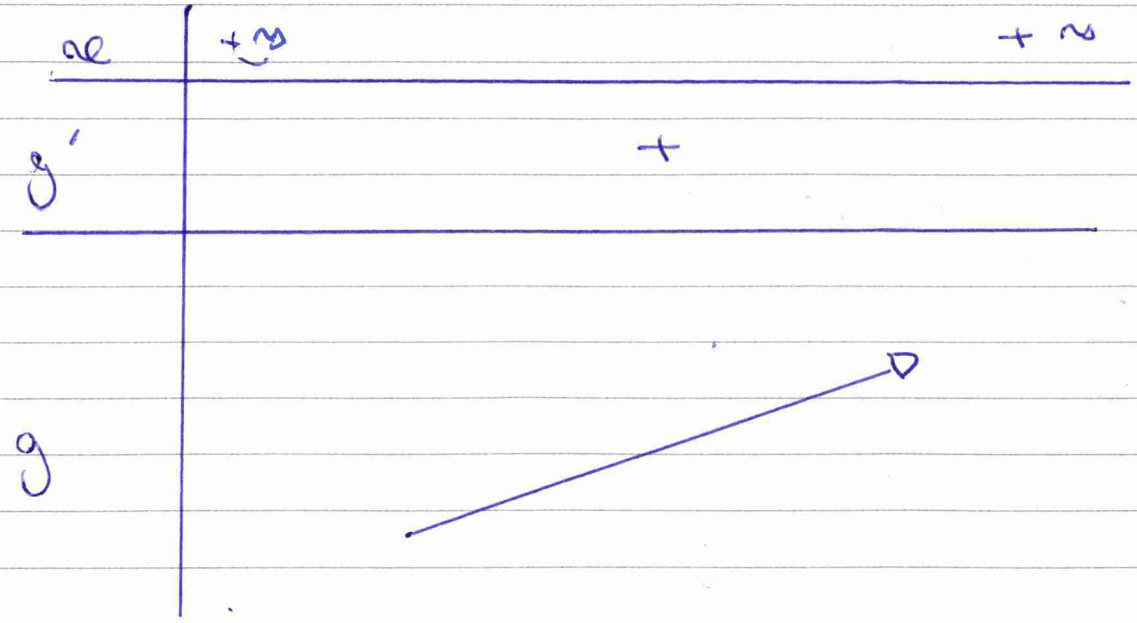
On a $e^{x} - 1 \underset{+\infty}{\sim} e^{x}$

donc $e^{-x} - 1 \underset{-\infty}{\sim} e^{-x}$

Par croissance comparée $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{e^{-x}}{x} = +\infty$

Donc $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{e^{-x} - 1}{x} = +\infty$

prepaindex.fr



Les limites trouvées sont incohérentes. (Comme $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$)

~~on admet que l'intervalle image est $\mathbb{R}$.~~

Partie C

(8)

La fonction g est continue sur $[0, x]$ d'après ce qui précède.

G est l'unique primitive de g qui s'annule en 0.

D'après le théorème fondamental de l'analyse, G est de classe $\mathcal{C}^1$ (donc bien définie) sur $\mathbb{R}$.

On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $G'(x) = g(x)$

$$= \frac{e^{-x} - 1}{-x}$$

prepaindex.fr

(9) $\forall x > 0$, on a

$$G(x) = \int_0^x g(t)\,dt$$

$$= \int_0^1 g(t)\,dt + \int_1^x \frac{e^{-t}-1}{t}\,dt$$

$$= G(1) + \int_1^x \frac{e^{-t}}{t}\,dt - \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$$

$$= G(1) + \int_1^x \frac{e^{-t}}{t}\,dt - \ln(x) \quad \text{CQFD}$$

---

(10) $G(1)$ est une intégrale convergente car sur un segment.

$$\frac{\frac{e^{-t}}{t}}{\frac{1}{t^2}} = te^{-t} = \frac{t}{e^t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$$

Donc par critère de comparaison des intégrales à termes de fonctions positives, $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt$

prepaindex.fr

IMPRIMERIE NATIONALE – 2023-02-PF 018 751

Copie anonyme - n°anonymat : 816636

Emplacement QR Code

Code épreuve : 296 **Nombre de pages :** 31 **Session :** 2026

Épreuve de : Mathématiques appliquées

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

et convergente.

~~Donc $G(1) = o(-\ln$~~

Donc $G(1) + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt - \ln x \xrightarrow[+\infty]{} -\ln x$

D'où $G(x) \underset{+\infty}{\sim} -\ln(x)$

prepaindex.fr

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Exercice III.

Partie A

① a. $N-1$ correspond au rang d'apparition du premier pile lors de la répétition de $n \geq 2$ épreuves indépendantes et identiques avec deux issues possibles : succès de probabilité p et échec de probabilité $1-p$.

Donc $N-1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$

b. ~~$N \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ car il y a deux issues possibles : succès de probabilité p et échec de probabilité $p-1$. On a donc~~

~~$E(N) = p$ et $V(N) = p(1-p)$~~

② a.

prepaindex.fr

b. Comme $N(\Omega) = \mathbb{N}^*$, $\underline{N(\Omega) = [\![2, n]\!]}$

$$P(N=k) = p(1-p)^{k-1} + 1, \quad \forall k \in N(\Omega)$$

On a $E(N) = E(N-1) + 1$ par linéarité.

$$= \frac{1}{p} + 1$$

$$= \frac{p+1}{p}$$

et $V(N) = \frac{1-p}{p^2}$

② a. Sachant que l'on a ~~obtenu~~ effectué n lancers ($n \geq 2$), la probabilité d'obtenir un pile et égale à $P(P_n) = p$.

Donc $P(N=n \cap \delta) = p(1-p)^{n-2} \times p$

$$= p^2 (1-p)^{n-2}$$

b. On applique la formule des probabilités totales sur le système complet d'événement $(N=n)_{n \geq 2}$.

prepaindex.fr

$$P(S) = \sum_{n \geq 2} P(N = n \cap S)$$

$$= \sum_{n \geq 2} p^2 (1-p)^{n-2}$$

$$= p^2 \sum_{n \geq 2} q^{n-2}$$

$$= p^2 \sum_{n \geq 0} q^n$$

On reconnaît une série géométrique convergente car $q \in]0,1[$.

On a donc $P(S) = p^2 \dfrac{1}{p}$

$$= p$$

③ a. On répète de façon indépendante la même épreuve aléatoire à deux issues possibles : succès de probabilité p et échec de probabilité $1-p$.

Donc $R \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$

prepaindex.fr

IMPRIMERIE NATIONALE – 2023-02-PF 018751

Copie anonyme - n°anonymat : 816636

Emplacement QR Code

Code épreuve : 296 | **Nombre de pages :** 31 | **Session :** 2026

Épreuve de : Mathématiques appliquées

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

b. On a $E(X) = np$

Partie B

(5)

```
def Exp_1(p):
    N = 1
    while rd.random() <= p :
        N = N + 1
    if rd.binomial(1,p) == 1
        S = 1
    else:
        S = 0
    return N+1, S
```

(6)

```
def Exp_2(p):
    R = 0
    S = 0
    T = 0
    while S = 0 :
        R = R + 1
        G = Exp_1(p)
        S = E[1]
        T = E[0]
```


prepalindex.fr

```
    return (R, T)
```

(16) a.

```
def freq_T(n,p):
    N = 0
    for i in range(n):
        if rd.random() <= p:
            N = N + 1
```

```
def freq
```

prepaindex.fr

prepaindex.fr

prepaindex.fr

IMPRIMERIE NATIONALE – 2023-02-PF 018 751