Copie anonyme - n°anonymat : 249033

Z5-00090 249033 Mat Appli

Code épreuve : 298 | Nombre de pages : 32 | Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques appliquées EDHEC

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Exercice 1 :

1) def suite $v(a,n)$:

```
    v = a
    for k in range (1, n+1):
        v = a**2 - a + 1
    return(v)
```

2) On suppose que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, donc il existe un réel ℓ tel que :

$\lim_{n\to+\infty} U_n = \ell$ mais aussi

$\lim_{n\to+\infty} U_{n+1} = \ell$.

On a donc $\ell = \ell^2 - \ell + 1$

~~donc $-\ell^2 + 2\ell = 1$~~

~~donc $\ell(2-\ell) = 1$~~

donc $\ell^2 - 2\ell + 1 = 0$

donc $(\ell - 1)^2 = 0$

prepaindex.fr

Finalement on a $\ell = 1$

Donc si $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 1$

3)a) On étudie la monotonie de la suite U_n

On a :

$$\begin{aligned} U_{n+1} - U_n &= U_n^2 - U_n + 1 - U_n \\ &= U_n^2 - 2U_n + 1 \\ &= (U_n - 1)^2 \end{aligned}$$

Or un nombre au carré est positif.

Donc on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} - U_n \geq 0$.

Donc $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante

3)b) On sait que $U_0 = a$ et que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. (3a)

Donc par définition de la croissance,

On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \geq a$

prepaindex.fr

3)c) On sait que la suite U_n est croissante et que $U_n \geq a$ pour tout entier n.

De plus on a : $a > 1$.

Et on a montré que si U_n convergait sa limite était 1.

Or $a > 1$

Donc ce n'est pas possible.

Finalement, d'après le théorème de la limite monotone, U_n croissante non majorée

$(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$

4) On a $U_{n+1} = U_n^2 - U_n + 1$

On sait qu'un polynôme est équivalent à son monôme de plus haut degré en $+\infty$.

Donc $U_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} U_n^2$

5)a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \geq a$ avec $a > 1$

donc $U_n - 1 > 0$ et $U_{n+1} > 0$

donc le dénominateur n'est jamais nul

et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{U_n - 1} - \dfrac{1}{U_{n+1} - 1}$ existe

prepaindex.fr

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{u_n - 1} - \dfrac{1}{u_{n+1} - 1} = \dfrac{u_{n+1} - 1 - u_{n+1}}{(u_n - 1)(u_{n+1} - 1)}$

$$= \frac{u_n^2 - u_n + 1 - 1 - u_n + 1}{(u_n - 1)(u_{n+1} - 1)}$$

$$= \frac{u_n^2 - 2u_n + 1}{(u_n - 1)(u_n^2 - u_n + 1 - 1)}$$

$$= \frac{u_n^2 - 2u_n + 1}{u_n^3 - u_n^2 - u_n^2 + u_n}$$

$$= \frac{u_n^2 - 2u_n + 1}{u_n(u_n^2 - 2u_n + 1)}$$

$$= \frac{1}{u_n}$$

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \dfrac{1}{u_n - 1} - \dfrac{1}{u_{n+1} - 1} = \dfrac{1}{n}}$

b) On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_{k-1}} - \frac{1}{u_{k+1} - 1}$ (5)a)

On reconnait une somme télescopique ($u_{k+1} = -\dfrac{1}{u_{k+1} - 1}$)

On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k} = -\frac{1}{u_{n+1} - 1} + \frac{1}{u_0}$$

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k} = -\frac{1}{u_{n+1} - 1} + \frac{1}{a}}$

prepaindex.fr

IMPRIMERIE NATIONALE – 2025-12-1003094

Copie anonyme - n°anonymat : 249033

Emplacement QR Code

Code épreuve : 298 | Nombre de pages : 32 | Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques appliquées EDHEC

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

5)c) Soit On a : $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k} = -\frac{1}{u_{n+1}-1} + \frac{1}{a}$

D'après le cours, la série de terme général $\frac{1}{u_n}$ converge si $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k} = l$ avec l un réel.

Or on a $u_{n+1} \sim u_n^2$

et $u_{n+1} - 1 \sim u_n^2$

et $\frac{1}{u_{n+1}-1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{u_n^2}$

On sait que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

donc $\lim_{n\to+\infty} u_n^2 = +\infty$

donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n^2} = 0$

Donc par comparaison des séries à termes positifs

prepaingex.fr

par équivalence, la série de terme général $\frac{1}{U_n}$ converge (équivalent à une série de Riemann convergente) et sa somme vaut :

$$\lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{U_{n+1}-1} + \frac{1}{a} = \frac{1}{a}$$

Donc, la série de terme général $\frac{1}{U_n}$ converge et $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{U_n} = \frac{1}{a}$

6)a) On pose X la variable aléatoire suivante :

$X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $P(X=n) = \frac{1}{U_n}$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{U_n}$ existe donc l'univers image ~~existe~~ est bien représenté.

On vérifie maintenant que $\sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n) = 1$

On a $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{U_n} = \frac{1}{a} = \frac{1}{2}$

J'ai dû faire une erreur sur le calcul de $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{U_n}$

prepaindex.fr

6)b) $\forall n \geq 2$, $2^n(2^n-1)+1$

$= 2^{2n} - 2^n + 1$

On pose P_n :

$$2^n(2^n-1)+1 \geq 2^{n+1}$$

Pour $n=2$, on a

$$2^2(2^2-1)+1 = 13$$
$$2^3 = 8$$

Donc $2^n(2^n-1)+1 \geq 2^{n+1}$ pour $n=2$

Donc P_2 est vraie.

On suppose pour un certain entier $n \geq 2$, P_n vraie, montrons que P_{n+1} est vraie également.

$$2^n(2^n-1)+1 \geq 2^{n+1}$$

↓ car $2>0$

donc $2^{n+1}(2^n-1)+2 \geq 2^{n+2}$

↓ car $2>0$

et $2^{n+1}(2^{n+1}-1)+4 \geq 2^{n+1}(2^n-1)+2 \geq 2^{n+2}$

prepaindex.fr

Donc $2^{n+1}(2^{n+1}-1)+1 \geq 2^{n+2}$

donc la propositin P_n est vraie au rang n+1.

On a donc montré par récurrence que :

$$\forall n \geq 2, \quad 2^n(2^n-1)+1 \geq 2^{n+1}$$

6)c) On a $u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1$

donc $u_{n+1} = u_n$

prepaindex.fr

Pour $n=0$, $u_0 = 2 \geq 2^0 = 1$

$n=1$, $u_1 = 2^2 - 2 + 1 = 3 > 2$

Donc 1' inégalité $u_n \geq 2^n$ reste vraie pour $n=0$ et $n=1$.

IMPRIMERIE NATIONALE – 2025-12-1003094

Copie anonyme - n°anonymat : 249033

Emplacement QR Code

Code épreuve : 298 | Nombre de pages : 32 | Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques appliquées ESH&EC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

6)d)

X admet une espérance si la série de terme général $n \times P(X=n)$ converge absolument.

Il s'agit ici de la convergence simple car $n \geq 0$ et $P(X=n) \geq 0$.

On a $P(X=n) = \frac{1}{U_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$,

et $U_n \geq 2^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$,

donc $\frac{1}{U_n} \leq \frac{1}{2^n}$

donc $\sum_{n \geq 0} n \times \frac{1}{U_n} \leq \sum_{n \geq 0} \left(\frac{n}{2^n}\right)$

donc $\sum_{n \geq 0} n \times \frac{1}{U_n} \leq \sum_{n \geq 0} n \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Or la série $\frac{1}{2} \sum_{n \geq 0} n \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ converge, c'est une série géométrique dérivée de raison $q = \frac{1}{2} \in]-1,1[$

Donc par comparaison des séries à termes positifs

prepaindex.fr

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

par inégalité, la série $\sum_{n\geq 0} n \times \frac{1}{u_n}$ converge également.

Donc X admet une espérance.

X admet une variance si la série $\sum_{n\geq 0} n^2 \times \frac{1}{u_n}$ converge.

De la même manière, on a

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n \geq 2^n$

donc $\quad \frac{1}{u_n} \leq \frac{1}{2^n}$

donc $\quad \frac{n^2}{u_n} \leq \frac{n^2}{2^n}$

et $\quad \sum_{n\geq 0} n^2 \times \frac{1}{u_n} \leq \sum_{n\geq 0} n^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

donc $\quad \sum_{n\geq 0} n^2 \times \frac{1}{u_n} \leq \frac{1}{4} \sum_{n\geq 0} [n(n-1)+n]\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$

donc $\quad$ " $\quad \leq \frac{1}{4}\left(\sum_{n\geq 0} n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right) + \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

Les deux séries convergent, car série géométrique dérivée double et simple de raison $q = \frac{1}{2} \in]-1,1[$ et donc par combinaison linéaire la série converge.

prepaindex.fr

Donc par comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geq 0} n^2 \times P(X=n)$ converge. Donc X admet un moment d'ordre 2 et donc une variance.

X admet une espérance et une variance.

Exercice 2 :

1)a) Ce problème possède une unique solution (f,g) car c'est le problème de Cauchy suivant :

$$(S):\begin{cases} f'(x) = f(x) - 2g(x) \\ g'(x) = 2f(x) + 5g(x) \\ f(0) = 1 \\ g(0) = 1 \end{cases}$$

Donc par définition, ce système possède une unique solution

1)b) f et g sont deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

On a $f'(x) = f(x) - 2g(x)$
et $g'(x) = 2f(x) + 5g(x)$.

Donc f' et g' sont des combinaisons linéaires de f et g, des fonctions dérivables.

Donc f' et g' sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

Donc, f et g sont deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$

prepaindex.fr

2)a) On considère f solution de (E) : $y'' - 6y' + 9y = 0$

On aurait donc :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) - 6f'(x) + 9f(x) = 0$

on a $f''(x) - 6f'(x) + 9f(x)$

$= f'(x) - 2g'(x) - 6(f(x) - 2g(x)) + 9f(x)$

$= f(x) - 2g(x) - (4f(x) + 10g(x) - 6f(x) + 12g(x) + 9f(x)$

$= -3f(x) - 12g(x) - 6f(x) + 12g(x) + 9f(x)$

$= 0$

Donc $\boxed{f \text{ est bien solution de } (E).}$

2)b) On a $f'(0) = f(0) - 2g(0)$

$= 1 - 2$

$= -1$

Donc $\boxed{f'(0) = -1}$

prepaindex.fr

IMPRIMERIE NATIONALE – 2025-12-1003094

Copie anonyme - n°anonymat : 249033

Emplacement QR Code

Code épreuve : 298 | Nombre de pages : 32 | Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques appliquées EDHEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

2)c) On cherche l'expression de f par tout réel x.

L'équation (E) admet pour équation caractéristique

$$x^2 - 6x + 9$$

$$\Rightarrow (x-3)^2$$

donc les racines est 3.

Les solutions de (E) sont de la forme,

$$\{f(x) = (\lambda + \mu x)e^{3x},\ x \in \mathbb{R},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

~~En posant $f(0) = 1$ on a~~

~~$f(0) = \lambda e^{3x}$ donc $\lambda = 1$~~

~~On a $f'(0) = -1$~~

~~donc $\mu e^{3x} + (\lambda + \mu x)e^{3x} = f'(x)$~~

~~donc $f'(0) = \mu e^{-3} - \lambda + \mu$~~

prepaindex.fr

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Je n'aboutis pas.

3)a) Soit $h = f+g$ sur $\mathbb{R}$

h est dérivable comme combinaison linéaire de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

et $\forall x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = f'(x) + g'(x)$

$= f(x) - 2g(x) + 2f(x) + 5g(x)$

$= 3f(x) + 3g(x)$

$= 3h(x)$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$ $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = f(x) - 2g(x) \\ h'(x) = 3h(x) \end{cases}$

3)b) On a $h(0) = f(0) + g(0)$

$= 2$

Soit l'équation différentielle (E') : $h' = 3h$

prepaindex.fr

Soit $(E') : h' - 3h = 0$

les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions :

$$S = \{ x \in \mathbb{R},\ C \in \mathbb{R},\ h(x) = Ce^{3x} \}$$

Et puisque on a $h(0) = 2$, on a donc

$$Ce^{3\times 0} = 2$$

$$\Leftrightarrow \quad C = 2$$

Donc, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = 2e^{3x}}$

c) On a

$$(S) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \begin{cases} f'(x) = f(x) - 2g(x) \\ h'(x) = 3h(x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} f'(x) = -2(f(x) + g(x)) + 3f(x) \\ h(x) = 2e^{3x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} f'(x) = 3f(x) - 2h(x) \\ h(x) = 2e^{3x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} f'(x) = 3f(x) - 4e^{3x} \\ (f+g)(x) = 2e^{3x} \end{cases}$$

prepaindex.fr

Donc $(S) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} f'(x) = 3f(x) - 4e^{3x} \\ (f+g)(x) = 2e^{3x} \end{cases}$

4)a) Soit (ED) : $\forall x \in \mathbb{R}$, $y' = 3y - 4e^{3x}$

On a (ED) : $y' - 3y = -4e^{3x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

f_a est solution particulière de (ED) si f_a solution de

$y' - 3y = -4e^{3x}$

On a $f_a(x) = axe^{3x}$

et $y' - 3y = f'_a(x) - 3f(ax)$

$= ae^{3x} + 3axe^{3x} - 3axe^{3x}$

$= ae^{3x}$

On veut $ae^{3x} = -4e^{3x}$

$\Rightarrow a = -4$

Donc $f_{-4}(x) = -4xe^{3x}$ est solution particulière de (ED)

4)b) L'ensemble des solutions de ED sont la somme d'une solution particulière et d'une solution homogène de ED.

On a $x \mapsto -4e^{3x}$ une solution homogène de (ED)

prepainaex.fr

IMPRIMERIE NATIONALE – 2025-12-1003094

Copie anonyme - n°anonymat : 249033

Emplacement QR Code

Code épreuve : 298 | Nombre de pages : 32 | Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques appliquées EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

L'ensemble des solutions de (E) est donc

$\mathcal{S} = \{ x \in \mathbb{R},\ f(x) = -4xe^{3x} - 4e^{3x} \}$

Finalement, $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = -4xe^{3x} - 4e^{3x}$

4c) On a $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = -4xe^{3x} - 4e^{3x}$

et $2g(x) = f(x) - f'(x)$

donc $2g(x) = -4xe^{3x} - 4e^{3x} - (-4e^{3x} - 12xe^{3x}) - 12e^{3x}$

$= -4xe^{3x} - 4e^{3x} + 4e^{3x} + 12xe^{3x} + 12e^{3x}$

$= 12xe^{3x} + 8e^{3x}$

donc $g(x) = 6xe^{3x} + 4e^{3x}$

prepaindex.fr

$f'(x) - f(x) = -2g(x)$

donc $-4e^{3x} - 12xe^{3x} - 12e^{3x} - (-4xe^{3x} - 4e^{3x}) = -2g(x)$

donc $-12xe^{3x} - 16e^{3x} + 4xe^{3x} + 4e^{3x} = -2g(x)$

donc $-8xe^{3x} - 12e^{3x} = -2g(x)$

donc $g(x) = 4xe^{3x} + 6e^{3x}$

et $f(x) = -4xe^{3x} - 4e^{3x}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -4xe^{3x} - 4e^{3x}$
$g(x) = 4xe^{3x} + 6e^{3x}$

5) a
```
def f(x):
    return(-4*x*np.exp(3*x) - 4*np.exp(3*x))

def g(x):
    return(4*x*np.exp(3*x) + 6*np.exp(3*x))
```

prepaindex.fr

5)b) `z = np.linspace(-1/2, 1/2, 50)`
`plt.xlim(f(x), z)`
`plt.ylim(g(x), z)`
`plt.plot()`

Exercice 3:

1)a) Soit X soit une loi uniforme sur $[0, \theta]$,

on a alors $F(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ \frac{x}{\theta} \text{ si } x \in [0, \theta] \\ 1 \text{ si } x > \theta \end{cases}$

1)b)

$\mathbb{E}(X) = \frac{\theta}{2}$

et $V(X) = \frac{(\theta+1)^2}{12}$

Donc $\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{\theta}{2} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{(\theta+1)^2}{12}}$

2) On pose $Y_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$

On cherche la fonction de répartition de Y_n.

On a $[Y_n \leq x] = \left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i \leq x]\right)$, Y_n admet

x pour maximum si toutes les variables aléatoires X_i sont simultanément plus petites que x.

prepaindex.fr

Donc par indépendance des variables aléatoires X_i suivant toute la loi uniforme sur $[0,\theta]$, on a

$$P(Y_n \leq x) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leq x)$$

$$= (F_X(x))^n .$$

Si $x<0$ alors $P(Y_n \leq x) = 0$ car $F_X(x)=0$ si $x<0$

Si $x>\theta$ alors $P(Y_n \leq x) = 1$ car $F_X(x)=1$ si $x\geq\theta$

Si $x\in[0,\theta]$ alors $P(Y_n \leq x) = \left(\frac{x}{\theta}\right)^n$

Donc
$$f_{Y_n}(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x<0 \\ \left(\frac{x}{\theta}\right)^n \text{ si } x\in[0,\theta] \\ 1 \text{ si } x>\theta \end{cases}$$

de classe $\mathcal{C}^1$

2b) $\forall x \in]-\infty,0[$, $F_{Y_n}(x)$ est continue et ~~dérivable~~ sur cet intervalle.

$\forall x\in[0,\theta]$, $F_{Y_n}(x)$ est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ sur cet intervalle car $\theta\in[5,7]$.

$\forall x\in]\theta,+\infty[$, $F_{Y_n}(x)$ est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ sur cet intervalle.

Donc $F_{Y_n}(x)$ est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ sauf potentiellement en 0 et en θ.

De plus $F_{Y_n}(x)$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

prepaindex.fr

IMPRIMERIE NATIONALE – 2025-12-1003094

Copie anonyme - n°anonymat : 249033

Emplacement QR Code

Code épreuve : 298 | Nombre de pages : 32 | Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques appliquées EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

et $\lim_{x \to -\infty} F_{Y_n}(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} F_{Y_n}(x) = 1$

Donc Y_n est bien une variable aléatoire à densité.

On dérive F_{Y_n} sur $\mathbb{R}$ pour en obtenir une densité f_{Y_n}.

On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{Y_n}(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in]-\infty, 0[\cup]\theta, +\infty[\\ \frac{n}{\theta}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{n-1} \text{ si } x \in [0, \theta]. \end{cases}$$

3)a) Soit $U \hookrightarrow \mathcal{U}[0,1]$

donc $U(\Omega) = [0,1]$ et $\theta U(\Omega) = \theta^* U(\Omega) = [0, \theta]$

On cherche $P(\theta U \leq x) = P\left(U \leq \frac{x}{\theta}\right)$

$= F_U\left(\frac{x}{\theta}\right)$

prepaindex.fr

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Si $x<0$, alors $F_U\left(\frac{x}{\theta}\right)=0$

Si $x>1$, alors $F_U\left(\frac{x}{\theta}\right)=1$

Si $x\in[0,1]$, alors $F_U\left(\frac{x}{\theta}\right)=\frac{x}{\theta}$.

Donc $$F_{\theta U}=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ \frac{x}{\theta} & \text{si } x\in[0,\theta]\\ 1 & \text{si } x>1\end{cases}$$

On reconnait la fonction de repartition d'une loi uniforme sur le segment $[0,\theta]$.

Si $\boxed{U\hookrightarrow\mathcal{U}[0,1],\text{ alors } \theta.U\hookrightarrow\mathcal{U}[0,\theta]}$

3)b) def var_Y(theta, n):
X = rd.random(n) * theta
Y = ~~max~~ np.max(X)
return(Y)

4)a) Y_n possède une espérance si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x f_{Y_n}(x)\,dx$ converge (absolument)

prepaindex.fr

On a $\int_{-\infty}^{+\infty} x f_{Y_n}(x)\,dx = \int_0^{\theta} x\left(\frac{n}{\theta}\right)\left(\frac{x}{\theta}\right)^{n-1} dx$ car $f_{Y_n}(x)$ nulle sur $]-\infty,0[\cup]\theta,+\infty[$

Cette intégrale est ~~continue sur~~ convergente car $f_{Y_n}(x)$ continue sur $[0,\theta]$. Donc Y_n admet une espérance et on a :

$$E(Y_n) = \left(\frac{n}{\theta}\right)\int_0^{\theta} x\left(\frac{x}{\theta}\right)^{n-1} dx = \frac{n}{\theta}\int_0^{\theta} \frac{x^n}{\theta^{n-1}}\,dx$$

$$= \frac{n}{\theta^n}\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^{\theta}$$

$$= \frac{n \times \theta^{n+1}}{\theta^n \times n+1} = \frac{n\theta}{n+1}$$

Donc $\boxed{E(Y_n) \text{ existe et } E(Y_n) = \frac{n\theta}{n+1}}$

4b) On vérifie si Y_n admet un moment d'ordre 2. On procède de la même manière.

Y_n admet un moment d'ordre 2 si

$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_{Y_n}(x)\,dx$ converge (absolument)

Soit si $\int_0^{\theta} x^2 \left(\frac{x}{\theta}\right)^{n-1}\left(\frac{n}{\theta}\right) dx$ converge.

prepaindex.fr

Or cette fonction est continue sur $[0, \theta]$, donc cette intégrale converge et Y_n admet une variance.

On a :

$$E(Y_n^2) = \int_0^\theta \left(\frac{n}{\theta}\right) \frac{x^{n+1}}{\theta^{n-1}} dx = \frac{n}{\theta^n} \int_0^\theta x^{n+1} dx$$

$$= \frac{n}{\theta^n} \left[\frac{x^{n+2}}{n+2} \right]_0^\theta = \frac{n\theta^{n+2}}{\theta^n (n+2)} = \frac{n\theta^2}{(n+2)}$$

D'après Koenig-Huygens, $V(Y_n) = E(Y_n^2) - E(Y_n)^2$

donc $V(Y_n) = \frac{n\theta^2}{(n+2)} - \frac{(n\theta)^2}{(n+1)^2}$

$$= \frac{n\theta^2(n+1)^2 - n^2\theta^2(n+2)}{(n+2)(n+1)^2}$$

$$= \frac{n^3\theta^2 + 2n^2\theta^2 + n\theta^2 - n^3\theta^2 - 2n^2\theta^2}{(n+2)(n+1)^2}$$

$$= \frac{n\theta^2}{(n+2)(n+1)^2}$$

Donc $V(Y_n)$ existe et $V(Y_n) = \frac{n\theta^2}{(n+1)^2(n+2)}$

prepaindex.fr

IMPRIMERIE NATIONALE - 2025-12-1003094

Copie anonyme - n°anonymat : 249033

Emplacement QR Code

Code épreuve : 298 | Nombre de pages : 32 | Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques appliquées EDHEC

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

5)a) Z_n est un estimateur de θ si et

On a $E(Z_n) = E\left(\frac{n+1}{n} Y_n\right)$ ↓ linéarité de l'espérance

$= \frac{n+1}{n} E(Y_n)$

$= \frac{n+1}{n} \times \frac{n\theta}{n+1}$

$= \theta$

Donc $\boxed{E(Z_n) = \theta}$

5)b) On a $V(Z_n) = V\left(\frac{n+1}{n} Z_n\right)$ ↓ linéarité de la variance

$= \frac{(n+1)^2}{n^2} V(Z_n)$

$= \frac{(n+1)^2 \times n\theta^2}{n^2 \times (n+2) \times (n+1)^2} = \frac{\theta^2}{n(n+2)}$

$\boxed{V(Z_n) = \frac{\theta^2}{n(n+2)}}$

prepaindex.fr

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

6)a) On a $\Theta \in [5,7]$

Donc $25 \leq \Theta^2 \leq 49$

donc $\frac{25}{49} \leq \frac{\Theta^2}{49} \leq 1$

et $\frac{\Theta^2}{49} \geq \frac{\Theta^2}{50}$ ....

Donc $\boxed{\forall n \geq 47, \quad \frac{\Theta^2}{n+2} \leq 1}$

6b) Z_n est une variable aléatoire admettant une espérance et une variance, donc $\forall \varepsilon > 0$

$$P(|Z_n - \Theta| \leq \varepsilon) \geq \frac{V(Z_n)}{\varepsilon^2}$$

donc $\forall \varepsilon > 0, \quad P(|Z_n - \Theta| \leq \varepsilon) \geq \frac{\frac{\Theta^2}{n(n+2)}}{\varepsilon^2}$

donc $\forall \varepsilon > 0, \quad P(|Z_n - \Theta| \leq \varepsilon) \geq \frac{\Theta^2}{n(n+2)\varepsilon^2}$

or $\forall n \geq 47, \frac{\Theta^2}{n+2} \leq 1$, ainsi

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P(|Z_n - \Theta| \leq \varepsilon) \geq \frac{\Theta^2}{(n+2)} \times \frac{1}{n\varepsilon^2}$$

prepaindex.fr

et finalement, $\forall \varepsilon > 0,\ P(|Z_n - \theta| \leq \varepsilon) \geq 1 - \frac{1}{n\varepsilon^2},\ \forall n \geq 47$

prepaindex.fr

Problème :

1) a) Soit $J_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

et le polynôme annulateur $P(x) = x^2 - nx$

On a donc $J_n^2 = \begin{pmatrix} n & \cdots & n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ n & \cdots & n \end{pmatrix}$

donc $J_n^2 - n \cdot J_n = 0$

Donc $P(x)$ est bien un polynôme annulateur de J_n

b) J_n est une matrice diagonalisable car c'est une matrice symétrique réelle.

On suppose que J_n n'est pas diagonalisable.

On sait que $P(x) = x^2 - nx$ est un polynôme annulateur de J_n.

prepaindex.fr

IMPRIMERIE NATIONALE – 2025-12-1003094

Copie anonyme - n°anonymat : 249033

Emplacement QR Code

Code épreuve : 291 | Nombre de pages : 32 | Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques appliquées EDHEC

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Les valeurs propres possible de J_n figurent parmi les racines de $P(x)$.

On a $P(x) = 0 \iff x^2 - nx = 0$

$\iff x(x-n) = 0$

$\iff x = 0$ ou $x = n$

Donc $Sp(J_n) \subset \{0, n\}$.

~~Puisque $P(x)$ est un polynôme annulateur, la matrice~~

Or la matrice J_n n'est pas inversible donc 0 est bien valeur propre de J_n.

On a $rg(J_n) = 1$.

On a $\dim(E_0) = n-1$ d'après le Théorème du rang.

Soit le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0$, on a $J_n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

Donc n est valeur propre de J_n.

Finalement J_n possède deux valeurs propres qui sont 0 et n.

prepaindex.fr

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

1)d) On a le vecteur $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, on sait que J_n est diagonalisable et que $rg(J_n) = 1$.

On a $J_n \cdot U = n \cdot U$ (1c)

donc on a $E_n = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid (A - n \cdot I_n)X = 0\}$.

et on a $E_n = Vect(U)$, et $U \neq 0$ donc

U représente une famille libre et génératrice de E_n, donc forme une base.

Et on a $\dim(E_n) = 1$.

D'après le théorème du rang, et puisqu'on sait que J_n est diagonalisable on a

$\dim(E_n) = 1$, $E_n = Vect(U)$ et $\dim E_0 = n-1$

2)a) Le graphe suivant compte 4 sommets donc il est bien d'ordre 4. Tous les sommets possèdent 2 arêtes donc on a bien un degré maximal de 2 sur chaque sommet, avec un diamètre de 2.

Donc | ce graphe est élément de $E_4(2)$ |

prépaindex.fr

2)b) Sur le graphe G_2, les sommets 1, 3, 4 ont un degré supérieur à 2 donc $G_2 \notin E_5(2)$.

Sur le graphe G_4, le diamètre est supérieur à 2. Donc $G_4 \notin E_5(2)$.

Le graphe G_1, on a diamètre = 2, le degré de chaque sommets = 2, donc $G_1 \in E_5(2)$.

Le graphe G_3 a un diamètre = 2, le degré de chaque sommet = 2, donc $G_3 \in E_5(2)$

Donc $\boxed{G_1 \text{ et } G_3 \in E_5(2)}$

3)a) Soit s un sommet fixé d'un graphe G élément de $E_n(d)$. Le degré maximum de chaque sommet est donc d.
Donc au maximum s est relié par d arêtes et relié à d voisins distincts.

Donc si $\boxed{G \in E_n(d),\ s \text{ possède } d \text{ voisins au maximum.}}$

3)c) Puisqu'on a le nombre n de sommets autres que s est au maximum égal à

$d + d(d-1)$. On a donc

$$n = d + d^2 - d$$
donc $n = d^2$
donc $n \leq d^2 + 1$

Donc $\boxed{n \leq d^2 + 1}$

prepamonex.fr

4) A est symétrique car le graphe de Moore est non-orienté.

5)a) $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j}$ désigne le nombre d'arêtes reliant le sommet i au sommet j.

Or c'est un graphe de Moore, il y a donc au maximum 1 arête reliant le sommet i au sommet j, ou alors aucune arête.

Donc $\boxed{\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{i,j} \in \{0,1\}}$

5)b) Le graphe ne contient aucune boucle

donc, $\boxed{\forall i \in [\![1,n]\!],\ a_{i,i} = 0}$

6)a) D'après la définition du produit matriciel, puisque $B = A^2$, on a $B = A.A$ (ligne 2 du rappel)

donc :

$$\boxed{\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\quad b_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\, a_{j,k}}$$

Fin

prepaindex.fr

IMPRIMERIE NATIONALE – 2025-12-1003094