BCE
BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Code sujet : 339

Conception : ESSEC BS

Filière Littéraire

Programme ENS B/L

Mardi 7 mai 2019, de 14 h. à 18 h.

OPTIONS :

Le candidat traitera au choix l'un des deux sujets :

- MATHÉMATIQUES

- SCIENCES SOCIALES

Tournez la page S.V.P.

BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Conception : ESSEC BS

MATHÉMATIQUES

Programme ENS B/L

Mardi 7 mai 2019, de 14 h. à 18 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Aucun document n'est autorisé. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

EXERCICE

Dans cet exercice :

- on désigne par I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point
- α et β sont deux réels fixés de I
- on désigne par f une fonction de deux variables définie sur $I \times I$

On pourra dériver partiellement f sur $I \times I$ sans justification de l'existence des dérivées partielles.
La dérivée partielle de f par rapport à sa première variable en (x,y) pourra être notée indifféremment $\partial_1 f(x,y)$ ou $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$.

On utilisera de même la notation $\partial_2 f(x,y)$ ou $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ pour la dérivée partielle de f par rapport à sa deuxième variable en (x,y).

On admettra que si u et v sont deux fonctions de classe C^1 sur I à valeurs dans I, alors la fonction définie sur I par $t \mapsto f(u(t),v(t))$ est dérivable sur I de dérivée :

$$t \mapsto u'(t)\partial_1 f(u(t),v(t)) + v'(t)\partial_2 f(u(t),v(t))$$

Le but de l'exercice est d'étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = \alpha, \quad u_1 = \beta \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = f(u_{n+1}, u_n)$$

lorsque f vérifie les hypothèses notées (H) :

$$(H) \qquad f(I\times I) \subset I \text{ et } \forall (x,y) \in I\times I, \quad |\partial_1 f(x,y)| + |\partial_2 f(x,y)| \leq k$$

où k est un réel de $]0,1[$.

Partie I - Étude d'un exemple

Dans cette partie seulement, la fonction f est définie par $f(x,y) = \cos\left(\dfrac{x+y}{4}\right)$ et $I = [0,1]$.

1) Déterminer $\partial_1 f(x,y)$ et $\partial_2 f(x,y)$, pour $(x,y) \in I^2$ et justifier que f vérifie les deux hypothèses (H). On donnera une valeur de k convenable.

2) En étudiant l'application φ définie sur I par $\varphi(t) = t - \cos(\dfrac{t}{2})$, montrer que l'équation

$$f(t,t) = t$$

admet dans I, une solution unique, notée ℓ par la suite.

3) Justifier que pour tout couple de réels (u,v), on a $|\cos(u) - \cos(v)| \leq |u-v|$.

4) Montrer par récurrence, que pour tout n dans $\mathbb{N}$, on a $|u_{2n} - \ell| \leq \dfrac{1}{2^n}$ et $|u_{2n+1} - \ell| \leq \dfrac{1}{2^n}$.

5) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

La suite du problème consiste à étudier le cas général. On se donne donc une fonction f quelconque vérifiant les hypothèses (H) et on note toujours $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie dans le préambule de ce problème.

Partie II - Une inégalité préliminaire

Dans cette partie, on fixe quatre réels x, x', y et y' dans I.
On pose, pour t dans $[0,1]$, $\psi(t) = f(tx' + (1-t)x, ty' + (1-t)y)$
(on ne cherchera pas à justifier que ψ est bien définie et dérivable sur $[0,1]$).

6) Montrer que, pour t dans $[0,1]$,

$$\psi'(t) = (x'-x)\partial_1 f(tx' + (1-t)x, ty' + (1-t)y) + (y'-y)\partial_2 f(tx' + (1-t)x, ty' + (1-t)y)$$

7) En déduire, que pour t dans $[0,1]$, on a $|\psi'(t)| \leq k\max(|x'-x|, |y'-y|)$.

8) En utilisant l'inégalité des accroissements finis que l'on rappellera, montrer que :

$$|f(x',y') - f(x,y)| \leq k\max(|x'-x|, |y'-y|)$$

Tournez la page S.V.P.

Partie III - Étude de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Dans cette partie, on pose, pour n dans $\mathbb{N}$, $v_n = \max(|u_{n+1}-u_n|, |u_{n+2}-u_{n+1}|)$.

9) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |f(u_{n+2},u_{n+1}) - f(u_{n+1},u_n)| \leq k v_n$$

10) En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

11) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_{n+2} \leq k v_n$.

12) En déduire qu'il existe une constante $A \geq 0$ telle que pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_n \leq A(\sqrt{k})^n$.

13) En déduire que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge.

14) En déduire que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_{n+1}-u_n|$ converge, puis que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

15) Montrer que $\lim(u_n)$ ne dépend pas de α et β.

16) Dans le cas particulier où I est un segment $[a,b]$, montrer que l'équation $f(t,t) = t$ a une solution unique ℓ dans I et que cette solution est $\lim(u_n)$.

PROBLÈME

Dans ce problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Notations :

- si M est une matrice, on note $m_{i,j}$ le coefficient (i,j) de M ; dans le cas d'une matrice colonne C, le coefficient $(i,1)$ sera simplement noté c_i
- si M est une matrice, on note M^T la matrice transposée de M ; on rappelle que le coefficient (i,j) de M^T est $m_{j,i}$
- si M est une matrice carrée, la trace de M sera notée $\mathrm{tr}(M)$; on rappelle que $\mathrm{tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,i}$
- le rang d'une matrice M, noté $\mathrm{rg}(M)$, est le rang de la famille de ses vecteurs colonnes
- une matrice carrée 1×1 est confondue avec le coefficient la constituant.

On désigne par :

- $\mathscr{B}_n$, l'ensemble des matrices carrées $n\times n$ dont les coefficients sont dans $\{0,1\}$
- $\mathscr{C}_n$, l'ensemble des matrices (ou vecteurs) colonnes à n lignes à coefficients dans $\{0,1\}$
- $\mathscr{U}_n$, l'ensemble des matrices carrées $n\times n$ de la forme CD^T où C et D parcourent $\mathscr{C}_n$

Par ailleurs, on désigne par $\mathscr{E} = (\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
Les seules variables aléatoires utilisées dans cet exercice sont des variables aléatoires indépendantes relatives à $\mathscr{E}$, à valeurs dans $\{0,1\}$ suivant une loi de Bernoulli de paramètre p dans $]0,1[$.

Le but du problème est d'étudier les matrices de $\mathscr{U}_n$ (étude algébrique et probabiliste).

Partie I - Cas $n = 2$

Dans cette partie, on suppose que $n = 2$.

17) Donner les matrices de $\mathscr{U}_2$.

18) Donner avec justification :

(a) les matrices de $\mathscr{U}_2$ qui sont inversibles ;

(b) les matrices de $\mathscr{U}_2$ qui sont de rang 1 ;

(c) les matrices de $\mathscr{U}_2$ qui sont de rang 1 et diagonalisables ; on précisera les valeurs propres et les espaces propres associés.

Dans la fin de cette partie X_1, Y_1, X_2 et Y_2 sont quatre variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre p dans $]0,1[$ et à valeurs dans $\{0,1\}$.

Pour $\omega \in \Omega$, on note $C(\omega)$ la matrice $C(\omega) = \begin{pmatrix} X_1(\omega) \\ X_2(\omega) \end{pmatrix}$, $D(\omega)$ la matrice $D(\omega) = \begin{pmatrix} Y_1(\omega) \\ Y_2(\omega) \end{pmatrix}$ et enfin $M(\omega)$ la matrice $M(\omega) = C(\omega)D(\omega)^T$.

19) Quelle est la probabilité de l'événement «la matrice M est inversible» ?

20) Quelle est la probabilité de l'événement «la matrice M est nulle» ?

21) Quelle est la probabilité de l'événement «la matrice M est de rang 1» ?

22) Quelle est la probabilité de l'événement «la matrice M est diagonalisable» ?

23) Déterminer la loi, l'espérance et la variance de la variable aléatoire T définie sur Ω par $T(\omega) = \mathrm{tr}(M(\omega))$ (on admettra que T définit bien une variable aléatoire).

Partie II - Matrices de $\mathscr{B}_n$ de rang inférieur ou égal à 1

Dans le début de cette partie, M désigne une matrice de $\mathscr{B}_n$ de rang égal à 1.

24) Montrer qu'il existe une colonne C de M non nulle et appartenant à $\mathscr{C}_n$.

25) Montrer qu'il existe une matrice D non nulle dans $\mathscr{C}_n$ telle que $M = CD^T$.

26) Montrer réciproquement qu'une matrice de la forme CD^T avec C et D dans $\mathscr{C}_n$ non nulles est dans $\mathscr{B}_n$ et de rang 1.

27) Justifier que l'écriture d'une matrice M sous la forme CD^T avec C et D dans $\mathscr{C}_n$ non nulles est unique.

28) Soit $M = CD^T$ avec C et D dans $\mathscr{C}_n$ non nulles.
Exprimer la trace de M à l'aide des matrices C et D^T.

29) Montrer que $M^2 = \mathrm{tr}(M)M$.

30) En déduire que M est diagonalisable si et seulement si $D^TC \neq 0$ (on pourra calculer MC).

31) Montrer que la matrice nulle de $\mathscr{B}_n$ peut s'écrire sous la forme CD^T avec C et D dans $\mathscr{C}_n$; l'écriture est-elle unique pour cette matrice ?

32) Montrer que $\mathscr{U}_n$ est exactement l'ensemble des matrices de $\mathscr{B}_n$ de rang inférieur ou égal à 1.

Partie III - Matrices de $\mathscr{U}_n$ aléatoires

Dans cette partie, on dispose de variables aléatoires X_i et Y_j avec $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$ définies sur Ω, à valeurs dans $\{0,1\}$ indépendantes et suivant toutes une loi de Bernoulli de paramètre p dans $]0,1[$.

Pour ω dans Ω, on note $C(\omega)$ (resp. $D(\omega)$) la matrice colonne $\begin{pmatrix} X_1(\omega) \\ X_2(\omega) \\ \vdots \\ X_n(\omega) \end{pmatrix}$ (resp. $\begin{pmatrix} Y_1(\omega) \\ Y_2(\omega) \\ \vdots \\ Y_n(\omega) \end{pmatrix}$).

Ceci permet de définir une application M de Ω dans $\mathscr{U}_n$ en posant $M(\omega) = C(\omega)D(\omega)^T$.

33) Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire T définie sur Ω par $T(\omega) = \mathrm{tr}(M(\omega))$?
(on admettra qu'il s'agit bien d'une variable aléatoire)

34) Dans cette question seulement, on suppose que $p = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.
Quelle est la loi suivie approximativement par T lorsque n tend vers $+\infty$?

35) Déterminer la probabilité de l'événement «la matrice M est de rang 1» (on ne justifiera pas qu'il s'agit bien d'un événement).

36) Déterminer la probabilité de l'événement «la matrice M est diagonalisable» (on ne justifiera pas qu'il s'agit bien d'un événement).

Tournez la page S.V.P.

BCE
BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Conception : ESSEC BS

Filière Littéraire

Programme ENS B/L

SCIENCES SOCIALES

Mardi 7 mai 2019, de 14 h. à 18 h.

Les transferts intergénérationnels, liens de solidarité ou liens de dépendance ?

N.B. :
Il sera tenu compte des qualités de plan et d'exposition, ainsi que de la correction de la langue.
Aucun document n'est autorisé.
L'utilisation de toute calculatrice et de tout autre matériel électronique est interdite.