Rapport et exercices oraux HEC Mathématiques BL

Juin 2024

Le bilan de la session 2024 de mathématiques voie BL est satisfaisant.

Cette année les notes se sont étalées entre 4 et 20. La moyenne s'établit à 11,52 et l'écart-type à 4,29.

Le jury a fortement apprécié les qualités d'expression ainsi que la finesse de raisonnement de certains candidats qui ont fait forte impression.

A contrario, certains candidats se sont révélés approximatifs, au niveau du calcul, mais surtout au niveau de la connaissance des théorèmes du cours.

Le jury aimerait insister sur les points suivants :

- La question de cours n'est pas à négliger. La jury attend une réponse précise et rigoureuse.
- Le jury a parfois rencontré des erreurs étonnantes dans les calculs de dérivée.
- Quand on introduit un objet, par exemple une intégrale, il est attendu du candidat qu'il justifie son existence avec toute la rigueur nécessaire.
- Il est important de participer à la journée de l'oral ou, au moins, de la visionner. Elle répond aux questions de l'organisation et des attendus de chaque oral. Cela permet aux étudiants d'apprendre le déroulement d'un oral du point de vue des membres du jury.

Nous félicitons les candidats pour leur combattivité, qui s'est particulièrement exprimée lors des questions sans préparation, où certains ont pu redresser une situation bien compromise.

Voici quelques sujets proposés cette année. Nous publions aussi leurs corrigés, mais insistons sur le fait que ces corrigés sont indicatifs, qu'ils ont été écrits à l'intention des membres de jury et ne correspondent pas toujours exactement à ce que l'on peut attendre des élèves.

SUJET BL 1

Exercice principal BL 1

1. Question de cours : définition d'une densité de probabilité.

   Toutes les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Soient α et β deux réels strictement positifs et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ x^\alpha & \text{si} \quad 0 \leqslant x < 1 \\ \dfrac{1}{x^\beta} & \text{si} \quad x \geqslant 1 \end{cases}$$

2. (a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$. La fonction f est-elle dérivable à droite en 0 ? à gauche en 1 ? à droite en 1 ?

   (b) Donner l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé. On discutera suivant les valeurs de α et β .

3. (a) Quelle est la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ en fonction de α et β ?

   (b) Quelle est sa valeur lorsqu'elle converge ?

4. (a) A quelles conditions sur (α, β), la fonction f est-elle une densité de probabilité ?
   On suppose ces conditions vérifiées dans la suite de l'exercice.

   (b) Soit X une variable aléatoire de densité f.
   La variable X admet-elle une espérance $\mathbb{E}(X)$? une variance $\mathbb{V}(X)$?
   Si oui, que valent $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$?

5. (a) Peut-on trouver un segment $[0, x]$ (avec $0 \leqslant x \leqslant 1$) tel que $\mathbb{P}(X \in [0, x]) = \dfrac{1}{2}$?
   Peut-on trouver un segment $[1, y]$ (avec $1 \leqslant y$) tel que $\mathbb{P}(X \in [1, y]) = \dfrac{1}{2}$?

   (b) Pour une variable aléatoire à densité, on appelle médiane tout réel m tel que $\mathbb{P}(X \leqslant m) = \mathbb{P}(X \geqslant m)$. Déterminer la (les) médiane(s) de X.

Solution :

1. Question de cours : f est une densité de probabilité si f est définie sur $\mathbb{R}$, positive ou nulle sur $\mathbb{R}$, continue sauf éventuellement en un nombre fini de points et si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et vaut $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

2. (a) La fonction g définie sur $[0,1]$ par $g(x) = x^\alpha$ est continue sur $[0,1]$ et $g(1) = 1$ et g est dérivable sur $[0,1]$ si $\alpha \geqslant 1$, sur $]0,1]$ si $0 < \alpha < 1$. La fonction h définie sur $[1, +\infty[$ par $h(x) = x^{-\beta}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, +\infty[$. On en déduit que : f est continue sur $\mathbb{R}$, f est dérivable sur $\mathbb{R} - \{0, 1\}$, dérivable à droite en 0 si $\alpha \geqslant 1$ avec $f'_d(0) = 1$ si $\alpha = 1$ et $f'_d(0) = 0$ si $\alpha > 1$ et alors f est dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$. dérivable à gauche en 1 et $f'_g(1) = g'(1) = \alpha$ dérivable à droite en 1 et $f'_d(1) = h'(1) = -\beta$

   (b) Sur $[0,1]$, f est affine si $\alpha = 1$, concave si $0 < \alpha < 1$ et convexe si $\alpha > 1$. Dans tous les cas, f est convexe sur $[1, +\infty[$ avec une limite nulle en $+\infty$. D'où l'allure de la courbe (avec une demi-tangente verticale en O si $0 < \alpha < 1$).

3. f est continue sur $\mathbb{R}$.
   f est nulle sur $\mathbb{R}_-$ donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et vaut 0.

f est continue sur $[0,1]$ donc $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ existe et vaut $\dfrac{1}{\alpha+1}$

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\beta}$ converge si et seulement si $\beta > 1$ et alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\beta} = \frac{1}{\beta-1}$

Conclusion : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge si et seulement si $\beta > 1$ et alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\beta-1}$

4. (a) f est continue sur $\mathbb{R}$, positive sur $\mathbb{R}$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et vaut 1 si et seulement si

$$\beta > 1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\beta-1} = 1$$

Ces conditions sont vérifiées dans la suite.

(b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x}{x^\beta}\,\mathrm{d}x$ converge si et seulement si $\beta > 2$.

$\mathbb{E}(X)$ existe si et seulement si $\beta > 2$ et alors : $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{\alpha+2} + \dfrac{1}{\beta-2}$

$\mathbb{E}\left(X^2\right)$ existe si et seulement si $\beta > 3$ et alors $\mathbb{E}\left(X^2\right) = \dfrac{1}{\alpha+3} + \dfrac{1}{\beta-3}$

$\mathbb{V}(X)$ existe si et seulement si $\beta > 3$ et alors $\mathbb{V}(X) = \dfrac{1}{\alpha+3} + \dfrac{1}{\beta-3} - \left(\dfrac{1}{\alpha+2} + \dfrac{1}{\beta-2}\right)^2$

5. (a) L'aire du triangle de sommets les points de coordonnées $(0,0), (1,1)$ et $(1,0)$ vaut $1/2$.

Cas $\alpha > 1$.

f est convexe et non affine sur $[0,1]$ et sa courbe est au-dessous du segment joignant l'origine au point de coordonnées $(1,1)$.

Donc $\forall x \in [0,1] \quad \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t < \frac{1}{2}$ et il n'existe pas de segment $[0,x]$ tel que $\mathbb{P}(X \in [0,x]) = 1/2$.

Mais alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t > 1/2$ et, comme $y \mapsto \displaystyle\int_1^y f(t)\,\mathrm{d}t$ est continue sur $[1,+\infty[$, il existe un segment $[1,y]$ tel que $\mathbb{P}(X \in [1,y]) = 1/2$

Cas $0 < \alpha < 1$.

f est concave et non affine sur $[0,1]$ et sa courbe est au-dessus du segment joignant l'origine au point de coordonnées $(1,1)$.

Donc $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t > \frac{1}{2}$ et, comme $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est continue sur $[0,1]$ il existe un segment $[0,x]$ tel que $\mathbb{P}(X \in [0,x]) = 1/2$. Mais alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t < 1/2$ et il n'existe pas de segment $[1,y]$ tel que $\mathbb{P}(X \in [1,y]) = 1/2$

Cas $\alpha = 1$.

$\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$

$\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1/2$ donc $\forall y > 1 \quad \displaystyle\int_1^y f(t)\,\mathrm{d}t < \frac{1}{2}$. et il n'existe pas de segment $[1,y]$ tel que $\mathbb{P}(X \in [1,y]) = 1/2$

(b) Il résulte de a) que la médiane m est unique, vérifie $P(X \leqslant m) = P(X \geqslant m) = 1/2$ et si $\alpha = 1$, on a $m = 1$

si $\alpha < 1 \quad m \in [0,1] \quad \displaystyle\int_0^m t^\alpha dt = 1/2$ soit $m = \left(\dfrac{\alpha+1}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}}$ si $\alpha > 1 \quad m \in \left[1,+\infty\right[\quad \displaystyle\int_m^{+\infty} \frac{dt}{x^\beta} = 1/2$ soit $m = \left(\dfrac{2}{\beta-1}\right)^{\frac{1}{\beta-1}}$.

Exercice sans préparation BL 1

Soit $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels. Soit φ l'endomorphisme de E défini par :

$$\text{si } M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{alors} \quad \varphi(M) = \begin{pmatrix} c & a \\ d & b \end{pmatrix}$$

1. Déterminer φ^4 et en déduire les valeurs propres possibles de φ.
2. Déterminer les valeurs propres de φ et les sous-espaces propres associés.
3. L'endormorphisme φ est-il diagonalisable ?

Solution :

1. $\varphi^4 = Id_E$.
   Si on connait la notion de polynôme annulateur, les valeurs propres possibles sont -1 et 1 , racines de $X^4 - 1$.
   Sinon, soit λ une valeur propre de φ et M un vecteur propre associé. Alors $\varphi^4(M) = \lambda^4 M = M$. Or $M \neq 0$, donc $\lambda^4 = 1$ de racines -1 et 1. Donc les valeurs propres possibles sont -1 et 1.
2. $\varphi(M) = M \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & a \\ d & b \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad a = b = c = d$. Donc 1 est valeur propre de φ et le sous-espace propre associé est : $\mathcal{E}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix} / a \in \mathbb{R} \right\}$ engendré par $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   $\varphi(M) = -M \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} c & a \\ d & b \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad a = -b = -c = d$. Donc -1 est valeur propre de φ et le sous-espace propre associé est : $\mathcal{E}_{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -a \\ -a & a \end{pmatrix} / a \in \mathbb{R} \right\}$ engendré par $K = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
3. (J, K) n'est pas une base de E, donc φ n'est pas diagonalisable.

SUJET BL 2

Exercice principal BL 2

1. Question de cours : comment trouver les éventuelles valeurs propres de la matrice à coefficients réels $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$?

   Soient f et g deux endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ tels que $f \circ g = g \circ f$.
   On appelle homothétie de $\mathbb{R}^2$ tout endomorphisme de la forme $a\mathrm{Id}$ où a est un réel et Id l'application identique de $\mathbb{R}^2$.
2. Vérifier que toute homothétie de $\mathbb{R}^2$ commute avec tout endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.

   Dans les questions suivantes, on suppose que ni f ni g ne sont des homothéties.
3. (a) On suppose que f admet deux valeurs propres distinctes λ et λ'.
   Soient u et u' des vecteurs propres respectivement associés à λ et λ'.
   Montrer que u et u' sont aussi des vecteurs propres de g.
   L'endomorphisme g est-il diagonalisable ?

   (b) Que peut-on dire de f si g admet deux valeurs propres distinctes ?

   (c) Réciproquement, soient φ et ψ des endomorphismes de $\mathbb{R}^2$.
   On suppose que (u, u') est une base de vecteurs propres pour φ et ψ. A-t-on $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$?
   On suppose que φ et ψ ont chacun deux valeurs propres distinctes. A-t-on $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$?
   On pourra s'intéresser aux matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
4. (a) On suppose que f n'admet qu'une valeur propre : λ.
   Soit u un vecteur propre associé à λ. On complète par v pour obtenir une base de $\mathbb{R}^2$.
   Quelle est la forme de la matrice de f dans la base (u, v) ?
   Quelle est la forme de la matrice de g dans la base (u, v) ?

   (b) Si φ et ψ n'ont chacun qu'une seule valeur propre, a-t-on $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$?
5. On suppose que f n'a pas de valeur propre réelle.

   (a) Montrer que g n'a pas de valeur propre réelle.

   (b) On suppose que $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
   Proposer une matrice B, qui ne soit pas une matrice d'homothétie, telle que $AB = BA$.

Solution :

1. Question de cours :

   les éventuelles valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sont les racines réelles de l'équation $x^2 - (a+d)x + (ad - bc) = 0$.
2. Si φ est un endomorphisme quelconque de $\mathbb{R}^2$ et a un réel quelconque ; $\varphi \circ a\mathrm{Id} = a\varphi \circ \mathrm{Id} = a\varphi = a\mathrm{Id} \circ \varphi$.
3. (a) $f \circ g(u) = g \circ f(u) = g(\lambda u) = \lambda g(u)$ donc $g(u)$ appartient au sous-espace engendré par u. D'où, il existe μ tel que $g(u) = \mu u$ et comme u est non nul, u est un vecteur propre de g.
   De même v est un vecteur propre de g.
   La famille (u, v) étant une base de vecteurs propres pour f est aussi une base de vecteurs propres pour g. Donc g est diagonalisable.

(b) Comme f et g jouent le même rôle, si g admet deux valeurs propres distinctes, g et f admettent une même base de vecteurs propres. Et f admet deux valeurs propres distinctes puisque f n'est pas une homothétie.

(c) Si u et u' sont des vecteurs propres associés aux valeurs propres λ et λ' pour φ et μ et μ' pour ψ : $\varphi \circ \psi(u) = \varphi(\mu u) = \lambda\mu u = \mu\lambda u = \psi \circ \varphi(u)$. De même $\varphi \circ \psi(v) = \psi \circ \varphi(v)$ $\varphi \circ \psi$ et $\psi \circ \varphi$ coïncident sur la base (u, v) donc $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$.

Si φ et ψ ont chacun deux valeurs propres distinctes, et s'ils ont même base de vecteurs propres, alors ils commutent mais sinon, on peut trouver deux tels endomorphismes qui ne commutent pas. Par exemple, les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ont chacune deux valeurs propres distinctes : 1 et 2 pour A et 1 et -1 pour B, mais $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \neq BA = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4. (a) Soit M la matrice de f dans la base (u, v). La première colonne est $\begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix}$ et la deuxième $\begin{pmatrix} a \\ \lambda \end{pmatrix}$ car λ est la seule valeur propre et $a \neq 0$ car f n'est pas une homothétie. D'où $M = \begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ avec $a \neq 0$. Avec le même raisonnement que dans la question 3.a), u est un vecteur propre de g associé à une valeur propre μ. De plus, g n'a pas d'autre valeur propre car sinon, d'après 3.a) f, n'étant pas une homothétie, aurait deux valeurs propres distinctes.

La matrice de g est donc $N = \begin{pmatrix} \mu & b \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ avec $b \neq 0$.

(b) Si φ et ψ ont une seule valeur propre et un vecteur propre u en commun et ne sont pas des homothéties, alors, dans une base (u, v), ils ont des matrices de la forme M et N comme ci-dessus. Et $MN = \begin{pmatrix} \lambda\mu & b\lambda + a\mu \\ 0 & \lambda\mu \end{pmatrix} = NM$. Donc, dans ce cas $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$. Mais, on peut avoir deux endomorphismes qui ont une seule valeur propre sans commuter : par exemple si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ on a : $AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. De plus, A et B ne sont pas des matrices d'homothéties et elles admettent chacune une seule valeur propre.

(a) D'après 3. et 4. si g a une ou deux valeurs propres réelles, il en est de même pour f. Par contraposée, g n'a pas de valeur propre réelle.

(b) Les éventuelles valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sont les solutions de l'équation : $x^2 - x + 1 = 0$ Donc A n'a bien pas de valeur propre réelle.

Une matrice qui n'est pas une matrice d'homothétie et qui commute avec A ne doit pas avoir de valeur propre réelle par la question précédente.

On peut prendre $B = A$ ou $B = A^T$ (transposée de A) qui commutent avec A.

Exercice sans préparation BL 2

Soit k un réel positif.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ k\dfrac{\ln x}{x^3} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

1. Déterminer k pour que f soit une densité de probabilité.
   Dans la suite on fixe cette valeur pour k.
2. Soit X une variable aléatoire de densité f.
   La variable X admet-elle une espérance ? Si oui, la déterminer.
   La variable X admet-elle une variance ? Si oui, la déterminer.

Solution :

1. f est continue sur $\mathbb{R}$, positive car $k \geqslant 0$.
   En intégrant par parties :
   $\forall A \geqslant 1 \quad \displaystyle\int_1^A f(x)dx = k\int_1^A \frac{\ln x}{x^3}dx = -\frac{k}{2} \times \frac{\ln A}{A^2} + \int_1^A \frac{dx}{x^3} = -\frac{k}{2} \times \frac{\ln A}{A^2} - \frac{k}{4}\left(\frac{1}{A^2} - 1\right)$ $\lim\limits_{A\to+\infty} \dfrac{\ln A}{A^2} = 0$
   (croissances comparées) Donc $\lim\limits_{A\to+\infty} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \frac{k}{4}$ et f est une densité si et seulement si $k = 4$.
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} xf(x)dx = 4\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}dx$
   Cette intégrale converge car pour $x > 1$, $\quad 0 \leqslant \dfrac{\ln x}{x^2} \leqslant \dfrac{\sqrt{x}}{x^2}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2}dx$ converge (intégrale de Riemann).
   $\forall A \geqslant 1 \quad \displaystyle\int_1^A \frac{\ln x}{x^2}dx = -\frac{\ln A}{A} + \int_1^A \frac{dx}{x^2} = \frac{\ln A}{A} - \frac{1}{A} + 1$ qui tend vers 1 quand A tend vers $+\infty$ Donc X admet une espérance et $\mathbb{E}(X) = 4$
   $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^2 f(x)dx$ diverge car $\displaystyle\int_1^A \frac{\ln x}{x}dx = \frac{\ln^2 A}{2}$ qui tend vers $+\infty$ quand A tend vers $+\infty$ Donc X n'a pas de moment d'ordre 2 et par suite pas de variance.